

文章编号: 1001-1455(2003)05-0385-06

# 爆炸波作用下地下防护结构与围岩的非线性动力相互作用分析<sup>\*</sup>

曹志远, 曾三平

(1. 同济大学工程力学与技术系固体力学教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 针对实际地下工程中普遍存在的材料非线性以及半无限介质域的处理问题, 给出了基于时间有关基本解的时域边界元法与非线性动力有限元法的耦合方法, 应用该耦合方法计算了一马蹄形截面地下防护结构与围岩受爆炸冲击波作用下非线性相互作用的时间历程, 并与线弹性情况进行了比较分析。结果表明: 本文的方法具有较高精度, 真实地再现了波在弹性层中传播以及反射的全过程。

关键词: 爆炸力学; 耦合法; 边界元和有限元; 动力相互作用; 非线性分析;  
中图分类号: O322 国标学科代码: 130°3520 文献标志码: A

## 1 引言

近 30 年来, 有限元法和边界元法作为数值分析的两大有力工具, 在实际工程的分析应用中各自发挥了重要作用。有限元法对材料特性变化的适应性较强, 但需域内剖分单元, 而且对于无限域问题需设置人工边界; 与之相反, 边界元法只需边界离散, 对于无限域问题则由于基本解自动满足无穷远处的辐射条件而无需设置人工边界, 但对与材料特性的变化相应的基本解无法普遍构造<sup>[1]</sup>。纵观有限元法和边界元法各自的优缺点, 可将这两种方法联合应用以克服缺点而发挥各自的优点, 从而提高求解效率。文献[2]最早提出有限元与边界元耦合方法这一思想, 并成功应用于求解线弹性静力问题, 文献[3~5]分别研究了土与结构相互作用问题、弹性基础的动力响应以及瞬态波的传播问题, 以上应用均给出了令人满意的结果, 但又限于线弹性范围内。

本文的工作在于, 将有限元与边界元耦合方法进一步拓广, 用于解决计及材料非线性、非匀质等复杂的动力问题, 为地下防护结构与围岩的非线性动力相互作用分析提供一个更切实际而又行之有效的方法。对于材料非匀质、非线性区域采用有限元法, 而对于匀质无限域则采用边界元法, 为便于与有限元法直接耦合, 采用基于与时间有关的基本解的时域边界元法, 这样可以在时域中直接求解, 提高计算精度。文中给出了时域边界元与动力有限元耦合的基本公式以及数值化实施所必需的计算技术, 并对耦合的动力非线性方程的求解进行了必要的探讨, 提出一种计算量少、迭代稳定的计算格式。还对地下防护工程中常见的马蹄形截面岩洞以及支护结构在爆炸冲击波作用下进行了非线性动力相互作用分析, 得出了一些具有工程实用价值的结论。

## 2 边界元法基本公式

根据结构的几何形状及材料特性, 将结构划分为两个区域  $\Omega_A$  和  $\Omega_B$  (如图 1 所示), 材料非匀质、非线性区域  $\Omega_A$  采用有限元离散、而线弹性匀质区域  $\Omega_B$  采用边界元离散, 共同边界为  $S_C$ 。对于域  $\Omega_B$ , 在不计体力以及结构初始状态为静止的假定下, 二维问题的边界积分方程由弹性动力学互易定理给出

\* 收稿日期: 2002-08-08; 修回日期: 2002-11-08

基金项目: 211 工程重点建设项目

作者简介: 曹志远(1938—), 男, 教授。

$$C_{ik}(\xi)u_k(\xi, t_F) + \int_0^{t_F} \int_S p_{ik}^*(\xi, t_F; X, t)u_k(X, t)dS(X)dt = \int_0^{t_F} \int_S u_{ik}^*(\xi, t_F; X, t)p_k(X, t)dS(X)dt \quad (1)$$

式中:  $u_k(X, t)$  和  $p_k(X, t)$  分别为  $t$  时刻边界上任意一点  $X = X(x, y)$  沿  $k$  方向的位移和面力; 积分曲面  $S$  为域  $\Omega_B$  的边界面;  $dS$  为曲面  $S$  上的任一面元;  $u_{ik}^*(\xi, t_F; X, t)$  和  $p_{ik}^*(\xi, t_F; X, t)$  分别为二维弹性动力学问题的位移和面力的时域基本解。

一般情况下, 积分方程(1)需采用边界及时间离散求解, 其离散形式的积分方程为

$$C_{ik}(\xi)u_k(\xi, t_F) + \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^J h_{jfik}^{l,m} u_k^{l,m} = \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^J g_{jfik}^{l,m} p_k^{l,m} \quad (2)$$

式中 
$$h_{jfik}^{l,m} = \int_{S_j} \phi_m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_l p_{ik}^* dt dS \quad (3a)$$

$$g_{jfik}^{l,m} = \int_{S_j} \phi_m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_l u_{ik}^* dt dS \quad (3b)$$

边界插值函数  $\phi_m$  和时间插值函数  $\psi_l$  分别为

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) \\ \psi_{f-1} = (t_f - t) / \Delta t_f \\ \psi_f = (t - t_{f-1}) / \Delta t_f \\ \Delta t_f = t_f - t_{f-1} \end{cases} \quad (4)$$

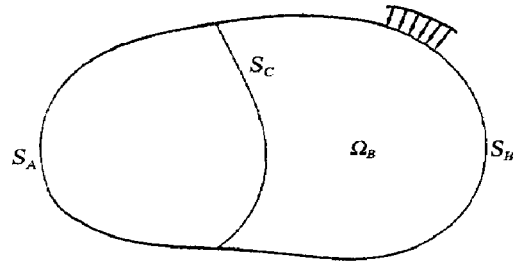


Fig.1 Coupling of FEM & BEM  
图 1 有限元与边界元耦合

考虑边界上所有  $N$  个结点, 应用方程(2)可以得到  $2N$  个线性方程组, 任意  $t_f$  时刻的支配方程可用矩阵形式表示为

$$HU^F = GP^F + D \quad (5)$$

式中 
$$\begin{cases} H = H_{FF}^2 \\ G = G_{FF}^2 \\ D = \sum_{f=1}^F (G_{Ff}^1 P^{f-1} - H_{Ff}^1 U^{f-1}) + \sum_{f=1}^{F-1} (G_{Ff}^2 P^f - H_{Ff}^2 U^f) \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $U^f$  和  $P^f$  分别为  $t_f$  时刻边界上所有  $2N$  个结点位移及面力值组成的列阵;  $H_{Ff}^1$ 、 $H_{Ff}^2$ 、和  $G_{Ff}^1$ 、 $G_{Ff}^2$  的系数依次为  $h_{fFik}^{1,m}$ 、 $h_{fFik}^{2,m}$ 、 $g_{fFik}^{1,m}$  和  $g_{fFik}^{2,m}$ , 各矩阵的特性以及矩阵系数关于时间  $t$  的解析积分见文献[6]。

一般情况下, 域  $\Omega_B$  有三种边界:  $S_\sigma$  上给定面力  $\bar{P}_\sigma^F$ ,  $S_u$  上给定位移  $\bar{U}_u^F$ , 公共边界  $S_C$  上位移  $U_{BC}^F$  及面力  $P_{BC}^F$  均为未知, 方程(5)可进一步用分块矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{BC}^F \\ U_\sigma^F \\ \bar{U}_u^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{BC}^F \\ \bar{P}_\sigma^F \\ P_u^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

经矩阵运算, 方程(7)可化为

$$\begin{bmatrix} U_\sigma^F \\ P_u^F \end{bmatrix} = M^{-1} \left[ \begin{bmatrix} G_{21} \\ G_{31} \end{bmatrix} U_{BC}^F - \begin{bmatrix} H_{21} \\ H_{31} \end{bmatrix} P_{BC}^F + N \begin{bmatrix} \bar{P}_\sigma^F \\ \bar{U}_u^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \right] \quad (8a)$$

$$P_{BC}^F = QU_{BC}^F - P_{B0}^F \quad (8b)$$

式中 
$$Q = \bar{H}^{-1} \bar{G} \quad (9a)$$

$$P_{B0}^F = \bar{H}^{-1} \left[ (H_{12} - G_{13})M^{-1} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} - (G_{12} - H_{13})M^{-1} N \begin{bmatrix} \bar{P}_\sigma^F \\ \bar{U}_u^F \end{bmatrix} - D_1 \right] \quad (9b)$$

式中 
$$M = \begin{bmatrix} H_{22} & -G_{23} \\ H_{32} & -G_{33} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} G_{22} & -H_{23} \\ G_{32} & -H_{33} \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$\bar{H} = H_{11} - (H_{12} - G_{13})M^{-1} \begin{bmatrix} H_{21} \\ H_{31} \end{bmatrix} \quad \bar{G} = G_{11} - (H_{12} - G_{13})M^{-1} \begin{bmatrix} G_{21} \\ G_{31} \end{bmatrix} \quad (10b)$$

这样,支配方程(5)的求解转化为方程(8)的求解,一旦公共边界  $S_C$  上的未知量  $U_{BC}^F$  和  $P_{BC}^F$  由方程(8b)和域  $\Omega_A$  的有限元支配方程联立求出,则代回式(8a)便可求出其它未知量  $U_\sigma^F$  和  $P_u^F$ 。

### 3 边界元法与有限元法的耦合

对于材料非匀质、非线性区域  $\Omega_A$  采用有限元离散,在不计阻尼力的情况下,  $t_F$  时刻的有限元动力支配方程为

$$M \dot{U}_A^F + K_A U_A^F = F_A^F \quad (11)$$

式中:  $F_A^F$  为等效结点荷载列阵,  $M$  为质量矩阵,  $K_A$  为弹塑性刚度矩阵

$$K_A = \sum_j \int_{V_j} (B^j)^T D_{ep}^j B^j dV \quad (12)$$

$$D_{ep}^j = D - D_p^j \quad (13)$$

式中:  $D_p^j$  为  $j$  单元的塑性矩阵,对于不同的材料以及不同的屈服准则,其矩阵系数各不相同。

方程(11)可进一步分块表示为

$$M \dot{U}_A^F + \begin{bmatrix} K_{II}^A & K_{IC}^A \\ K_{CI}^A & K_{CC}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{AI}^F \\ U_{AC}^F \end{bmatrix} = R_A^F + \begin{bmatrix} o \\ R_{AC}^F \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中:  $U_{AC}^F$  为公共边界  $S_C$  上的位移;  $U_{AI}^F$  为其余边界以及域内点的位移;  $R_{AC}^F$  为  $S_C$  上作用面力的等效结点荷载;  $R_A^F$  为除  $S_C$  上面力以外的各外力等效结点荷载。

对于与  $S_C$  共边界的域  $\Omega_B$ ,由式(8b),其作用于  $S_C$  上面力的等效结点荷载为

$$R_{BC}^F = E Q U_{BC}^F - E P_{Bo}^F \quad (15)$$

公共边界  $S_C$  上的协调条件及平衡条件为

$$\begin{cases} U_{AC}^F = U_{BC}^F = U_C^F \\ R_{AC}^F R_{BC}^F = o \end{cases} \quad (16)$$

由方程(14)及(15)并考虑到式(16),得到耦合后的动力支配方程

$$M \dot{U}_A^F + \begin{bmatrix} K_{II}^A & K_{IC}^A \\ K_{CI}^A & K_{CC}^A + K_{CC}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{AI}^F \\ U_{AC}^F \end{bmatrix} = R_A^F + \begin{bmatrix} o \\ R_B^F \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中

$$K_{CC}^B = E Q \quad (18)$$

$$R_B^F = E P_{Bo}^F \quad (19)$$

式(17)表明区域  $\Omega_B$  对区域  $\Omega_A$  的贡献通过附加刚度  $K_{CC}^B$  和附加荷载  $R_B^F$  反映出来,实际上域  $\Omega_B$  的附加质量贡献也隐含于其中。一般情况下,式(18)给出的附加刚度矩阵  $K_{CC}^B$  不具有对称性,但采用其极小化处理后的对称形式

$$K_{CC}^B = \frac{1}{2} (E Q + Q^T E^T) \quad (20)$$

仍给出非常满意的结果<sup>[7]</sup>,这样,耦合动力方程(17)的求解可按常规的有限元程序实施。

### 4 耦合动力非线性方程的求解

为书写上的方便,可将耦合动力方程(17)写成一般形式

$$M \dot{U}^F + K U^F = R^F \quad (21)$$

若  $t = t_F$  时域  $\Omega_A$  内的单元开始出现屈服,方程(21)为非线性方程,则需迭代求解,增量形式的修正由 Newton-Raphson<sup>[8]</sup> 迭代格式给出

$$M (\dot{U}^F)^k + K^{F-1} \Delta U^F = R^F - (F^F)^{k-1} \quad (22)$$

$$(U^F)^k = (U^F)^{k-1} + (\Delta U^F)^k \quad (23)$$

式中 
$$(\mathbf{F}^F)^{k-1} = \int_{\Omega_A} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^F)^{k-1} dV \quad (24)$$

迭代初始条件 
$$(\mathbf{U})^0 = \mathbf{U}^{F-1}, \quad (\mathbf{F}^F)^0 = \mathbf{F}^{F-1} \quad (25)$$

由 Newmark 法 ( $\delta=1/2, \alpha=1/4$ ) 的速度及加速度假设, 方程 (22) 化为

$$(\mathbf{K}^{F-1} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M})(\Delta \mathbf{U}^F)^k = \mathbf{R}^F - (\mathbf{F}^F)^{k-1} - \mathbf{M} \left[ \frac{4}{\Delta t^2} [(\mathbf{U}^F)^{k-1} - \mathbf{U}^{F-1}] - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{F-1} - \ddot{\mathbf{U}}^{F-1} \right] \quad (26)$$

按格式 (26) 进行迭代求解, 其计算工作量将十分庞大, 因为每一增量步和迭代步需重新形成  $\mathbf{K}^{F-1}$  和  $(\mathbf{F}^F)^{k-1}$ , 而且需域内积分。当采用常量搜索方向 ( $\mathbf{K}^{F-1} = \mathbf{K}_1$ ) 并考虑到增量形式的本构关系, 可以得到如下迭代格式 (推导参见文献 [9])

(1) 第一迭代步 ( $k = 1$ ) 
$$(\mathbf{K}_1 + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M})(\Delta \mathbf{U}^F)^k = \Delta \mathbf{R}^F + \mathbf{M} (\frac{4}{\Delta t} \mathbf{U}^{F-1} + 2 \dot{\mathbf{U}}^{F-1}) \quad (27a)$$

(2) 以后各迭代步 ( $k > 1$ ) 
$$(\mathbf{K}_1 + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M})(\Delta \mathbf{U}^F)^k = (\mathbf{K}_p^f)^{k-1} (\Delta \mathbf{U}^F)^{k-1} \quad (27b)$$

式中 
$$(\mathbf{U}^F)^k = (\mathbf{U}^F)^{k-1} + (\Delta \mathbf{U}^F)^k \quad (28)$$

$$\Delta \mathbf{R}^F = \mathbf{R}^F - \mathbf{R}^{F-1} \quad (29)$$

按格式 (27) 进行迭代求解, 每一位移迭代步仅需对进入塑性屈服的单元计算形成  $(\mathbf{K}_p^f)^{k-1}$ , 无需对整个域  $\Omega_A$  进行积分计算, 迭代格式 (27) 与 (26) 相比, 计算工作量大幅度减少。

### 5 计算实例及结果分析

图 2 的计算模型为模拟空中核爆炸所产生的冲击波在刚性基础上的弹性介质层中传播问题, 计算波在其中传播及反射的全过程, 以考查本文方法给出的解答的正确性, 有关参数为:  $E = 1.4 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 2084 \text{ kg/m}^3$ ,  $\gamma = 0.15$ ,  $H = 30.5 \text{ cm}$ ,  $p_0 = 70 \text{ N/cm}^2$ 。

上半部采用有限元法, 分 18 个单元; 下半部用边界元法, 边界划分为 9 个单元。其 A、B 两点竖向位移的时域响应计算结果见图 3, 与一维平面波理论解 [9] 的比较可以看出, 运用本文中的方法得到的结果具有较高精度, 真实再现了波在弹性层中传播及反射的全过程。

图 4 为地表下 6a 处一马蹄形截面无限长岩洞, 内支护结构为钢结构, 地表作用为由核爆炸引起的突

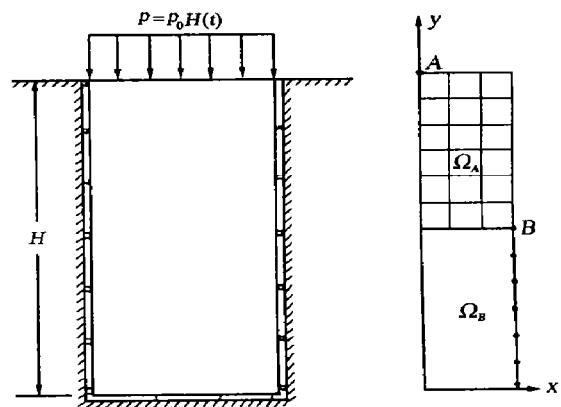


图 2 爆炸波在弹性层中传播的计算模型  
Fig. 2 Computation model for the wave propagation in elastic layer

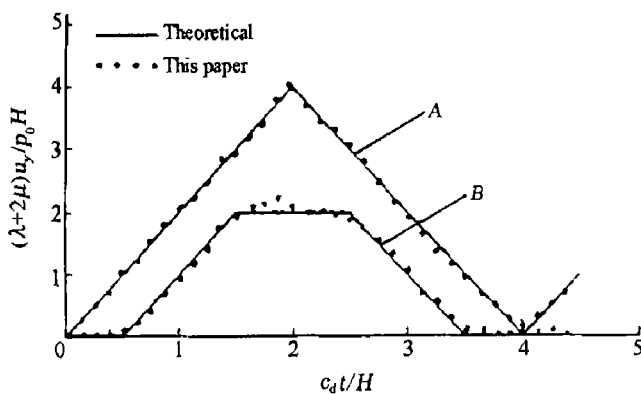


图 3 A、B 两点位移响应  
Fig. 3 Displacement responses of A、B

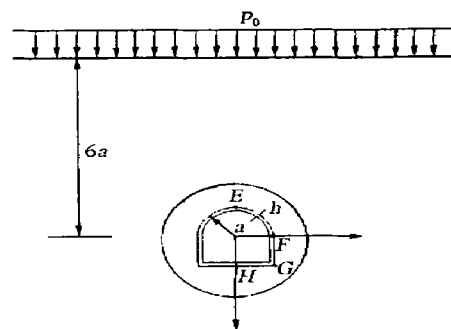


图 4 爆炸波在地下结构与围岩中传播  
Fig. 4 Wave propagation in the under-ground structure and surrounding medium

加载荷  $p = p_0 H(t)$ 。内支护结构采用 Mises 屈服条件, 围岩采用 Drucker-Prager 屈服条件, 各参数如下:  $a = 120 \text{ cm}$ ,  $h = 20 \text{ cm}$ ; 结构:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $\rho = 7840 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma_y = 2.2 \times 10^4 \text{ N/cm}^2$ ; 围岩:  $E = 6.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $\rho = 2679 \text{ kg/m}^3$ ,  $\varphi = 18.34^\circ$ ,  $c = 2.476 \times 10^2 \text{ N/cm}^2$ 。半径  $R = 2a$  的圆域采用有限元离散, 其界面及地表面用边界元离散。用上述方法先计算两种情况: (1)  $p_0 = 100 \text{ N/cm}^2$ , 无支护结构, 线弹性分析; (2)  $p_0 = 100 \text{ N/cm}^2$ , 有支护结构, 线弹性分析。

图 5 及图 6 分别给出了有无支护结构的两种情况下  $E$ 、 $H$  两点及  $F$ 、 $G$  两点竖向位移响应的计算结果, 时间从波阵面到达洞顶的时刻起算。M. L. Baron 等<sup>[10]</sup> 曾分析了无限域中圆柱形孔洞的相应结果, 也绘于以上两图。 $E$ 、 $F$  两点的本文计算结果与理论解十分接近, 再次说明本文方法具有较高精度。而在  $H$  点两者相差较大, 这也是合理的, 因为  $H$  点附近孔洞形状有别于圆柱形。另外从两图还可以看出, 当存在内支撑结构时, 由于支撑的加强, 各点位移与变形都相对减小。

对同样地下结构与围岩, 又计算下述两种情况: (3)  $p_0 = 1134 \text{ N/cm}^2$ , 无支护结构, 弹塑性分析; (4)  $p_0 = 1134 \text{ N/cm}^2$ , 有支护结构, 弹塑性分析。计算表明, 对无支护结构的岩洞, 当  $\tau = c_d t/a = 0.34$  时,  $E$  点附近区域开始产生塑性屈服, 当  $\tau = 2$  时则引起洞底角部区域屈服, 以后时段塑性区将逐渐扩展, 到  $\tau = 7$  时基本上趋于稳定。图 7 给出了  $\tau = 3, 8$  时刻的塑性分布。对有支护情况, 当  $\tau = 2.17$  时结构底部内拐点开始产生塑性变形, 到  $\tau = 3$  时(见图 7)该处附近岩石介质也相继产生屈服, 并逐渐扩展。图 7 也给出了有支护情况下相应时刻塑性区分布, 显然, 当设置支护结构后, 围岩塑性破坏区域则明显减少。

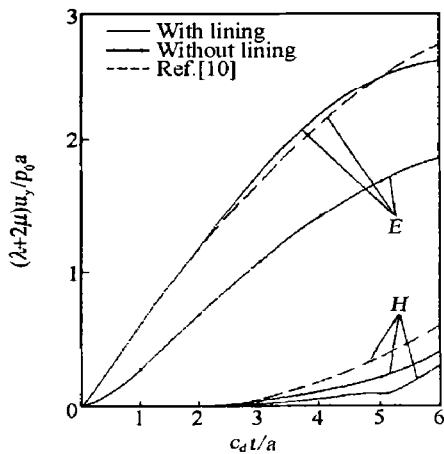


图 5  $E$ 、 $H$  两点位移响应

Fig. 5 Displacement responses of  $E$ 、 $H$

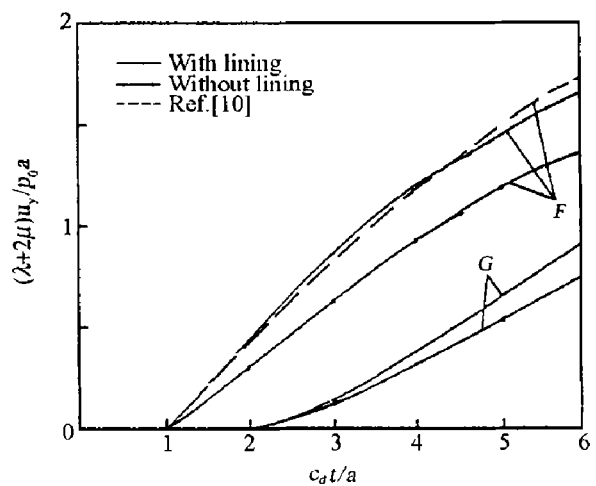


图 6  $F$ 、 $G$  两点位移响应

Fig. 6 Displacement responses of  $F$ 、 $G$

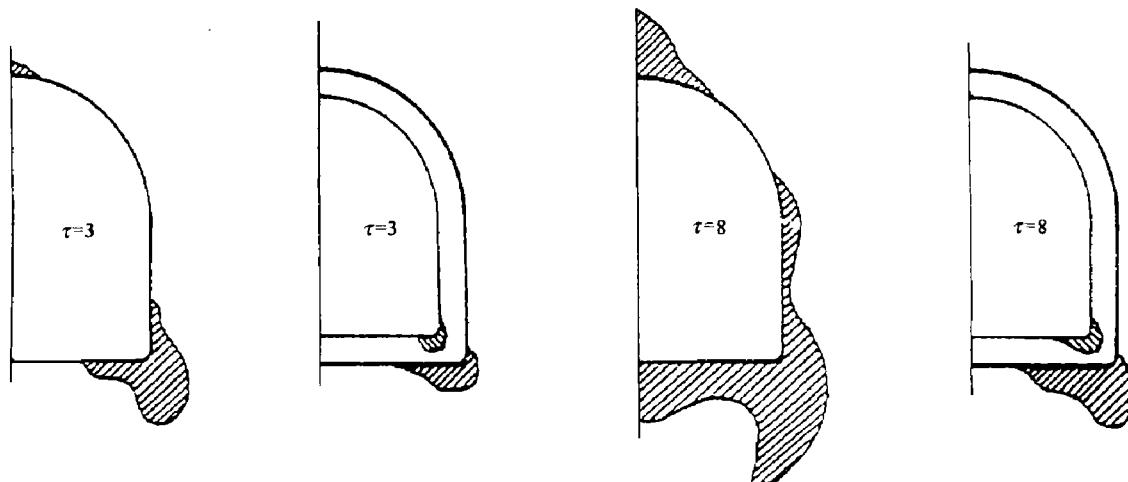


图 7 塑性区扩展(有、无支护结构)

Fig. 7 Development of plastic domain (with lining & without lining)

## 参考文献:

- [ 1 ] Beskos D E. Boundary element method in dynamic analysis[J]. Applied Mechanics Reviews, 1987, 40:1—23.
- [ 2 ] Zienkiewicz O C. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures[J]. International Journal of Numerical Method Engineering, 1977, 11:355—375.
- [ 3 ] Karabalis D L, Beskos D E. Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1985, 4:91—101.
- [ 4 ] Spyarakos C C, Beskos D E. Dynamic response of flexible strip foundations by boundary and finite elements[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1986, 5:84—96.
- [ 5 ] Estorff O V, Prabuedi M J. The coupling of boundary and finite elements to solve transient problems in elastodynamics [A]. Boundary Element X[M]. London: Springer-Verlag, 1988, 447—459.
- [ 6 ] 曾三平. 爆炸波在非均匀介质中传播以及地下防护结构与围岩动力相互作用分析[D]. 上海: 同济大学, 1992.
- [ 7 ] Brebbia CA. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. London: Springer-Verlag, 1984.
- [ 8 ] Bathe K J. Numerical Methods in Finite Element Analysis[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: [s. n.] 1984.
- [ 9 ] Eringen A C. Elastodynamics-linear Theory[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [ 10 ] Baron M L, Mathews A T. Diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium[J]. Journal of Applied Mechanics, 1961, 28(3):216—228.

## Nonlinear dynamic interaction between underground structure and surrounding medium under blast loading

CAO Zhi-yuan<sup>\*</sup>, ZENG San-ping

(Department of Engineering Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** A coupling method is presented that combines the time domain boundary element method and the nonlinear dynamics finite element method. It is used to solve the time path of the nonlinear interaction between the underground shielding structure and surrounding medium under blast loading. The results are compared with the linear elastic case, showing that this method has high precision and can satisfactorily duplicate the whole process of wave propagation and reflection in the elastic layers.

**Key words:** mechanics of explosion; coupling method; boundary element and finite element; dynamic interaction; nonlinear analyses

\* Corresponding author: CAO Zhi-yuan E-mail address: caozytj@sina.com; Telephone: 021-65981789