

文章编号: 1001-1455(2003)05-0398-07

柱状交界面 Richtmyer-Meshkov 不稳定性的数值研究^{*}

马东军, 何 兴, 孙德军, 尹协远
(中国科技大学力学与机械工程系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 采用基于有限体积法的二阶 Godunov 格式模拟了柱形密度交界面在同轴激波加速下的演化过程。得到了以下初步结果: 在参数相同的情形下, 内聚激波比中心爆炸波对界面的扰动更危险; 内聚激波从轻质流体进入重质流体与从重质流体进入轻质流体相比, 界面有更快的增长。周向波数大小对界面增长率有很大的影响, 在计算的参数下, $n=8 \sim 12$ 有最大增长率, 大于和小于这个范围的周向波长, 增长率均明显减弱。

关键词: 爆炸力学; R-M 不稳定性; 高阶 Godunov 格式; 柱状交界面; 自适应非结构网格; Euler 方程

中图分类号: O381; O354 国标学科代码: 130°3520 文献标志码: A

1 引 言

当激波穿过密度不同的两种流体界面时, 界面上的扰动会随时间急剧增长, 产生 R-M (Richtmyer-Meshkov) 不稳定性^[1,2]。这种激波-交界面的相互作用在研究激光驱动的 ICF (惯性约束核聚变) 等过程中有着重要的作用, 在天体物理中的超新星爆发等领域也存在 R-M 不稳定性现象。主要的 R-M 不稳定性理论有 R. D. Richtmyer^[1] 的脉冲模型理论和可压缩线性理论, 以及 Zhang Qiang 等^[3] 的非线性理论。最早的实验是由 E. E. Meshkov^[2] 作出的, B. Benjamin^[4] 做了 Air-SF₆ 和 Air-He 激波管实验。最初 K. A. Meyer 等^[5] 用 Lagrangian 程序进行了初步的数值研究, 而 R. L. Holmes 等^[6] 用界面跟踪方法对 Meshkov 和 Benjamin 的实验做了数值模拟, 数值结果同实验和理论模型预测大致相符。最近的研究表明激波加速交界面在早期是可压和近似线性的, 后期则可看作近似不可压和非线性的。导致扰动最终稳定的主要因素是非线性而不是可压缩性。现在多数的研究都限于交界面为平面, 但实际中交界面一般不是简单的平面, 而且 R-M 不稳定现象多为三维问题^[7]。

在本文中, 运用基于自适应非结构网格的高精度高分辨率二阶 Godunov 格式求解平面和柱坐标下的 Euler 方程, 数值模拟柱形激波加速下柱状物质交界面的横截面和子午面上小扰动的 R-M 不稳定现象, 并对其做出一定的理论分析。

2 数值方法

为了有效地模拟激波和密度间断交界面的相互作用, 我们推广 A. A. Fursenko 等^[8,9] 发展的基于有限体积法的二阶 Godunov 格式, 结合非结构自适应网格, 求解柱坐标下的 Euler 方程。时间推进采用预估-校正两步方法, 该方法在空间和时间上都具有二阶精度。在求解激波时, 运用有效的限制算子抑制数值解的非物理振荡。网格自适应技术的运用, 能有效地计算密度间断交界面, 提高计算的精度和效率。有限体积法的应用不仅保证了计算的守恒性和高精度, 同时也避免了柱坐标对称轴上的奇异性。

平面和轴对称 Euler 方程组可统一写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = \frac{H(U)}{y^\alpha} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2002-03-26; 修回日期: 2003-06-10

作者简介: 马东军(1975—), 男, 博士。

或
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x(U)}{\partial x} + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} [y^\alpha F_y(U)] = \frac{H(U)}{y^\alpha} \quad (2)$$

式中： $\alpha=0$ 是二维平面流； $\alpha=1$ 是轴对称流， x, y 分别为轴向和径向坐标，以及

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F_x(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad F_y(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}, \quad H(U) = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中： $E = (p/\gamma - 1) + \rho(u^2 + v^2)/2$ 是单位体积的能量。

非结构网格单元控制体 Ω_i 如图 1(a)所示，该单元控制体是由网格点 i 与其邻点集合 $B(i)$ 构成的各三角形中线交点(中心)与各边中点构成的多边形，多边形的周线记为 S_i ，多边形的面积为 A_i 。对每个控制单元积分，并根据 Gauss 定理，式(1)可化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} U y^\alpha d\Omega + \oint_{S_i} F(U) \cdot n_i y^\alpha dS = \int_{\Omega_i} H(U) d\Omega$$

式中： $n_i = (n_x, n_y)$ 是控制单元周线 S_i 的单位外法线矢量。左手边时间分裂使用二阶预估-校正方法，并且在校正步利用了 Riemann 问题精确解。对流项离散利用二阶 MUSCL 型迎风 Godunov 格式。

预估步采用

$$\tilde{U}_i = U_i^n - \frac{\Delta t}{\sum_e y_e^\alpha A_e} \left(\sum_{j \in B(i)} (F_x(V_{ij}^{\text{in}})n_x + F_y(V_{ij}^{\text{in}})n_y) y_{ij}^\alpha S_{ij} \right) + \frac{\Delta t}{\sum_e y_e^\alpha A_e} H(V_i^n) A_i \quad (4)$$

式中： A_e 是控制单元 Ω_i 内子三角形面积， $V_{ij}^{\text{in}}, V_{ij}^{\text{out}}$ 是流动变量 $V = (u, v, p, \rho)$ 在 \vec{ij} 连线上与周界 S_i 交点两边的值

$$\begin{cases} V_{ij}^{\text{in}} = V_i + \frac{1}{2} \nabla V_i \cdot \vec{ij} \\ V_{ij}^{\text{out}} = V_i - \frac{1}{2} \nabla V_i \cdot \vec{ij} \end{cases} \quad (5)$$

式中： ∇V_i 是物理量的平均梯度

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \right| = \frac{1}{A_i} \sum_e \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \Big|_e A_e \\ \left| \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \right|_i = \min \text{mod} \left[\left| \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \right|_i, 2 \left| \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \right|_e \right] \end{cases} \quad (6)$$

式中： $\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \max(0, \min(|x|, y \text{sgn}(x)))$ 。

校正步采用

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\sum_e y_e^\alpha A_e} \left(\sum_{j \in B(i)} (F_x(W_{ij})n_x + F_y(W_{ij})n_y) y_{ij}^\alpha S_{ij} \right) + \frac{\Delta t}{\sum_e y_e^\alpha A_e} H(\tilde{V}_i) A_i \quad (7)$$

W_{ij} 是通过求 Riemann 问题解得到， $W_{ij} = W_{ij}(\tilde{V}_{ij}^{\text{in}}, \tilde{V}_{ij}^{\text{out}})$ 。

$$\begin{cases} \tilde{V}_{ij}^{\text{in}} = \frac{1}{2} (V_i + \tilde{V}_i + \nabla \tilde{V}_{ij}) \\ \tilde{V}_{ij}^{\text{out}} = \frac{1}{2} (V_j + \tilde{V}_j + \nabla \tilde{V}_{ji}) \end{cases} \quad (8)$$

和二维平面的格式相比，轴对称的格式在计算时只需用 $y_{ij} S_{ij}$ 代替 S_{ij} ，用 $\sum_e y_e A_e$ 代替 A_i ，并在方程组右边多了一个源项，便于统一编程。

为提高分辨率和减少计算费用，采用了 Fursenko 的网格自适应技术^[8]，局部网格根据需要自动加密和粗化。图 1(b)是加密后网格的例子。另外主要考虑三类边界条件：固壁边界满足无穿透条件 $u \cdot n = 0$ ，对称面上 $\partial U / \partial n = 0$ 和远场无反射边界条件^[9]。

本算法基于 Euler 方程, 不考虑湍流耗散对小尺度结构的影响, 因此, 更适合于初期不稳定及中期蘑菇状结构的卷起。而对后期演化的计算必须考虑湍流混合的因素, 否则计算只有纯数值上的意义。

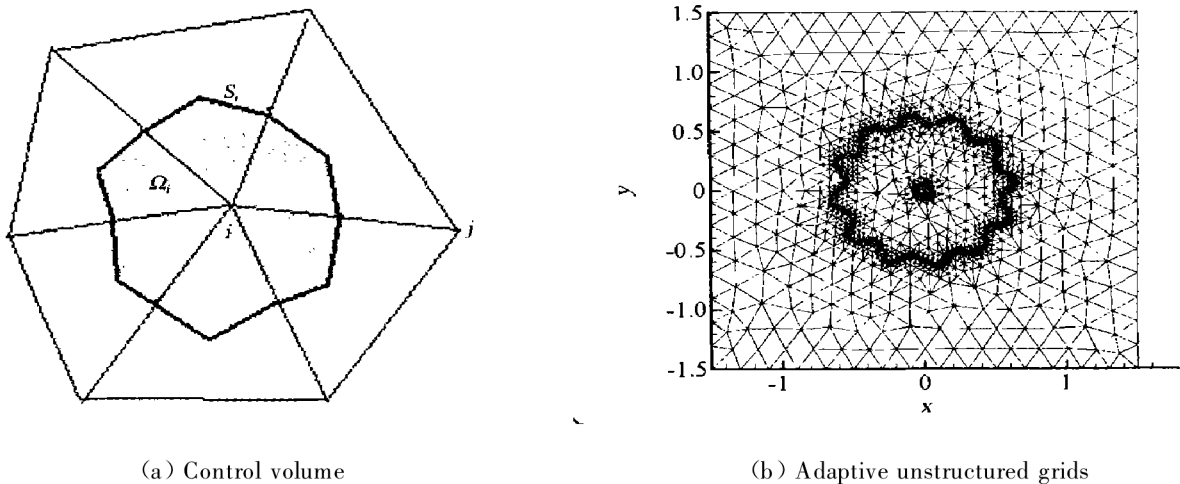


图 1 控制体单元和自适应非结构网格

Fig.1 Control volume and adaptive unstructured grids

2 数值结果和分析

激波加速下的两种不同物质交界面的 R-M 不稳定是指形 (Finger) 不稳定。即激波加速交界面后, 交界面将形成泡状 (Bubble) 和钉状 (Spike) 结构。当轻质流体进入重质流体中形成泡状结构, 当重质流体进入轻质流体中形成钉状结构。激波和物质交界面相遇后, 激波将会分解为穿透激波和反射波。反射波的类型将取决于不同的流场类型。如果激波是从轻质流体进入重质流体, 反射波为激波。而若激波由重质流体进入轻质流体, 反射波为稀疏波。在交界面为平面时的 R-M 不稳定性只有两种类型, 即激波由重质流体进入轻质流体和激波由轻质流体进入重质流体两种情形。但是在本文研究的柱状交界面模型却应分为四种类型^[7, 8]: 重质流体包围轻质流体, 或者轻质流体包围重质流体, 每种类型又可分为

中心爆炸波和内聚激波两种情形。本文模拟的重质流体是 SF₆, 轻质流体为空气, 密度比 $\rho_{\text{SF}_6} : \rho_{\text{Air}} = 4.82 : 1$ 。由于是单一组分的算法, 只能进行简化处理, 本文中只是模拟 SF₆ 和空气的密度, 而比热比都还是采用空气的。下面我们就分别讨论以上四种情况的数值模拟结果。

数值模拟时给交界面一个初始小扰动

$$r = r_0 + \epsilon \sin(n\theta) \quad (9)$$

式中: ϵ 为初始扰动的幅值; n 为扰动的周向波数。

3.1 内聚激波情形

初始交界面取 $\epsilon = 0.03$, $n = 12$ 。内聚运动激波的马赫数 $Ma = 1.2$ 。

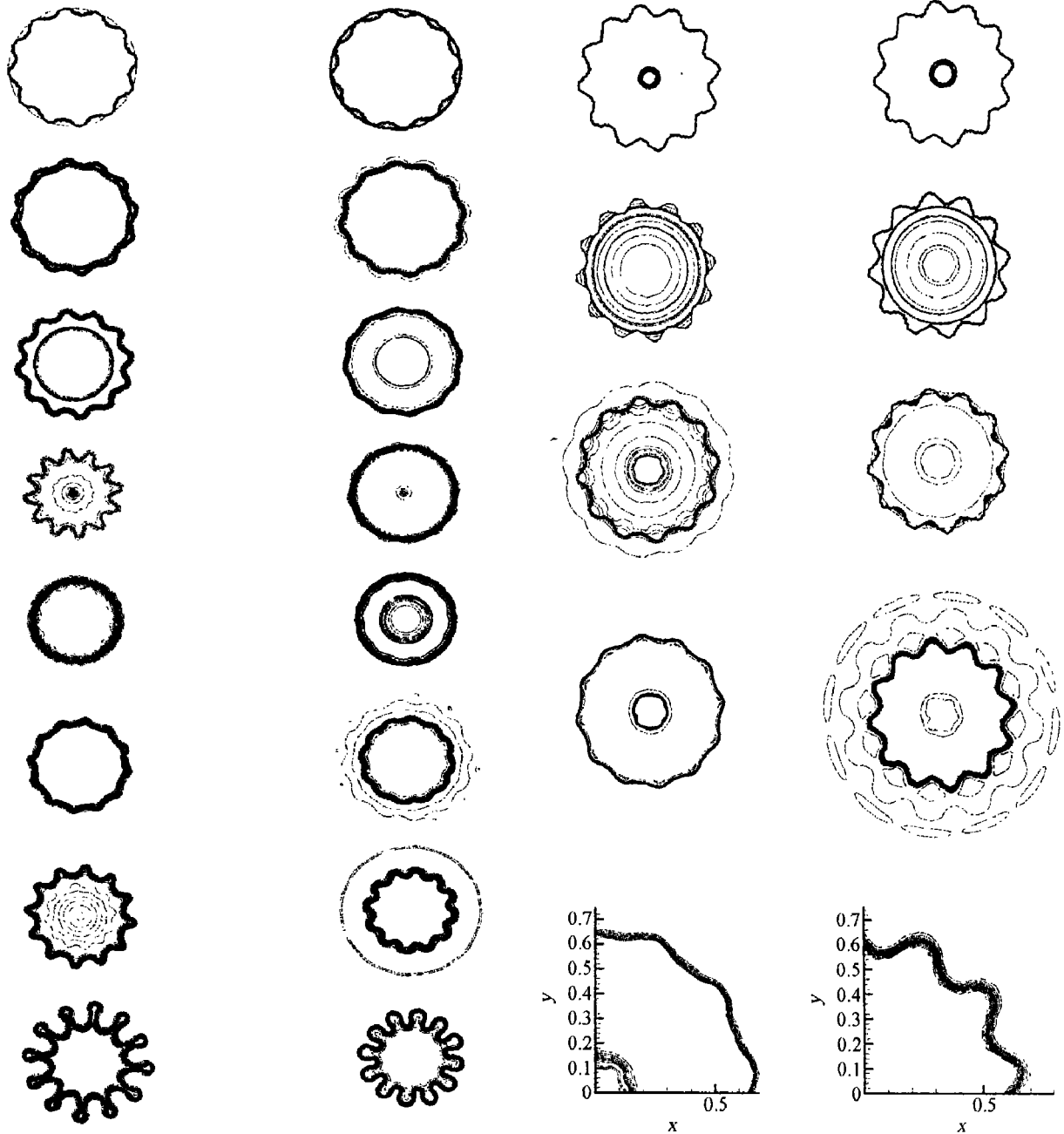
图 2(a) 和 (b) 分别是空气包围 SF₆ (内聚激波从轻到重物质) 和 SF₆ 包围空气 (内聚激波从重到轻物质) 时界面随时间的演化。图 2(a) 中入射激波和交界面作用产生出透射激波和反射激波, 反射波不断远离交界面, 不再和交界面作用, 对交界面的发展没有影响。交界面在激波加速下也向内运动, 扰动增大。透射激波在圆心相聚, 反射形成二次激波。二次激波将和交界面再次作用, 在二次激波加速时, 交界面扰动要反转 (即峰谷位置反转), 交界面的扰动幅值先是减小, 在实现反转后, 扰动幅值不断增大, 最终出现蘑菇状结构。

图 2(b) 为在这种情况下内聚激波和交界面作用后, 产生透射激波和反射稀疏波。交界面在第一次激波加速后扰动幅值变小, 交界面扰动发生了反转。透射激波在圆心相聚后, 接着反射产生二次激波, 二次激波对交界面二次加速, 使得扰动幅值增长, 最终出现蘑菇状结构。图 2(a) 和图 2(b) 最终都形成了蘑菇状结构, 但二者的形成过程是不同的。图 2(a) 中的交界面反转是第二次激波加速的结果, 而图 2(b) 的交界面反转是第一次激波加速的结果。

3.2 中心爆炸波情形

初始界面扰动 $\epsilon=0.05$, $n=12$ 。爆炸波的运动马赫数 $Ma=1.2$ 。

图 3(a)和(b)分别是空气包围 SF6(中心爆炸波从重到轻物质)和 SF6 包围空气(中心爆炸波从轻到重物质)时界面随时间的演化。在图 3(a)情形下产生透射波和反射稀疏波,透射激波离开物质界面后将远离界面,不再和界面作用。界面在第一次激波加速后扰动幅值变小。由于反射波的强度很弱,对界面的二次作用也很小。



From air to SF6 From SF6 to air
图 2 内聚激波从轻物质(Air)进入重物质(SF6)和从重物质(SF6)进入轻物质(Air)

Fig. 2 Imploding shock from air to SF6 and imploding shock from SF6 to air

From SF6 to air From air to SF6
图 3 中心爆炸波从重物质(SF6)进入轻物质(Air)和从轻物质(Air)进入重物质(SF6)

Fig. 3 Exploding shock from SF6 to air and Exploding shock from air to SF6

图 3(b)情形产生了透射激波和反射激波,第一次激波加速使界面扰动幅值变大。反射激波在圆心聚焦后的二次激波强度较弱。以上两种情形均没有产生明显的蘑菇状结构。

从以上分析可知,在其它参数不变的条件下,最不稳定的扰动发生在内聚激波从轻(Air)物质进入重

(SF6)物质情形。以下就集中研究这种情形

3.3 周向波数对扰动增长率的影响

我们关心的是增长率随周向波数 n 的变化, 是否存在最大增长率。为此, 分别考虑了 $n=0, 2, 4, 6$ 以及更高波数 $n=8, 12, 16, 20$ 的情形。

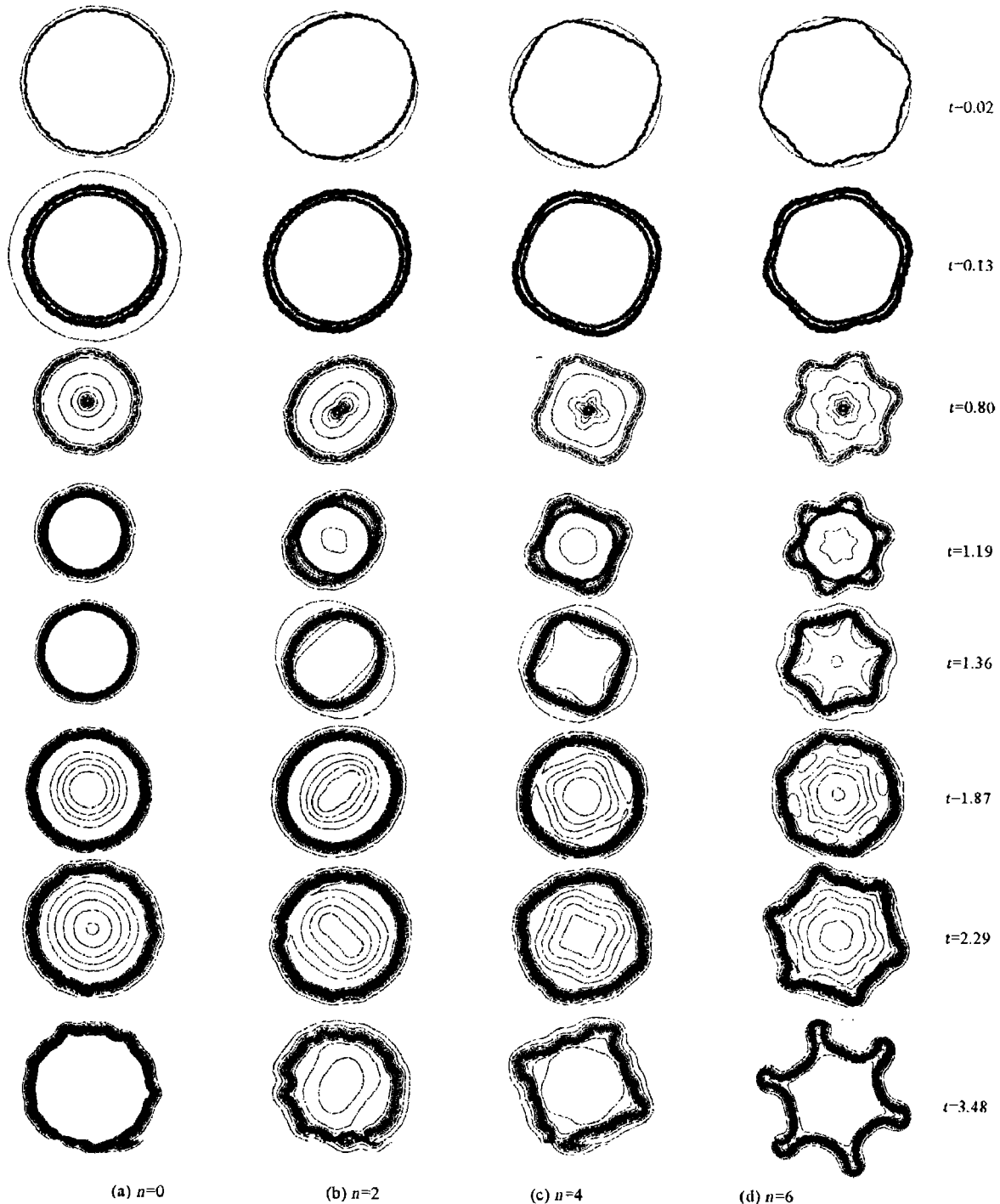


图 4 低周向波数界面时间演化

Fig. 4 Temporal evolution of the interface for low azimuthal wave numbers

图 4(a)~(d)分别是 $n=0, 2, 4, 6$ 交界面演化情形, $n=0$ 时由于没有交界面初始扰动, 在内聚激波作用下, 使交界面向内运动; 透射激波聚焦后形成的二次激波又加速界面向外运动。由于计算误差和机器误差的存在, 不可避免地会产生不对称的小扰动, 并在后期已看到放大的了扰动。这种由误差引起的不对称扰动随着格式精度、网格数量、及网格对称性的提高而减弱。直到 $n=2, 4$ 以前没有明显的指形结构, 但在 $n=4$ 时可以看到界面扰动的反转。 $n=6$ 时界面的反转和指形结构的形成已很明显, 与

图 2(a)情形类似,不再赘述。

图 5 是高周向波数界面在演化后期的情形。为了清楚地比较出不同 n 对增长率的影响,我们将它们画在一张图上。可以发现在 $n=8$ 和 $n=12$ 时交界面不稳定发展的最快, $n=16$ 时已明显减弱,到 $n=20$ 时界面已减弱波状扰动。这就明白地告诉我们,最危险的扰动增长率在 $n=8 \sim 12$ 之间,大约在 $n=10$ 左右有最大增长率。

3.4 轴向扰动的影响

若界面受到轴向初始扰动 $r = r_0 + \epsilon \sin(kx)$, 内聚激波从轻物质 (Air) 进入重物质 (SF6)。图 6 为交界面的演化,和图 2(a)描述的现象相类似,交界面受到激波的第一次加速后扰动的幅值是增大的。透射激波在对称轴处相聚,然后反射形成的反射激波对交界面二次加速,在二次激波加速下交界面扰动的波峰波谷要发生反转,故在二次加速后的早期可看到交界面的扰动幅值是减小的,发生反转后交界面的幅值不断增大并且最终出现蘑菇状结构。

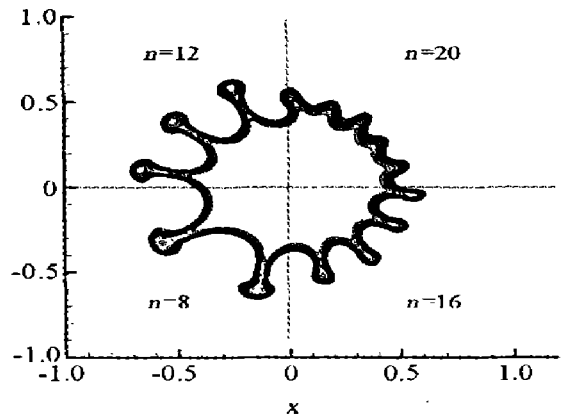


图 5 高周向波数对界面扰动增长率的影响
Fig. 5 Effects of high azimuthal wave numbers on the growth rate of interface perturbation

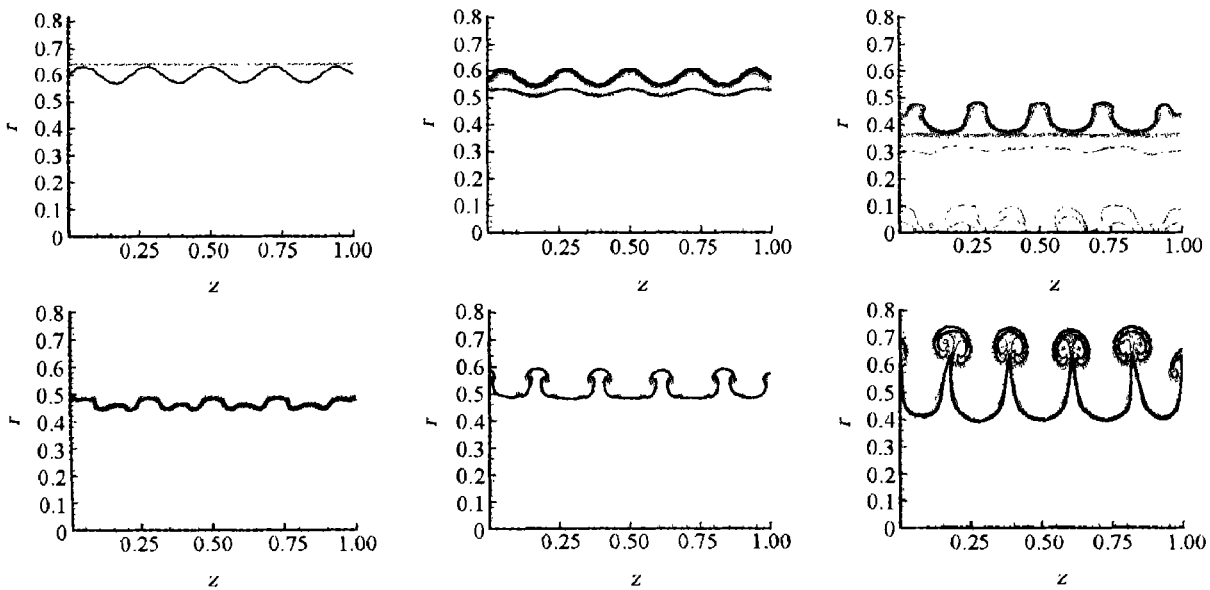


图 6 轴向扰动时界面的演化
Fig. 6 Evolution of the interface with axial perturbation

4 总结和讨论

采用基于有限体积法的二阶 Godunov 格式模拟了柱形密度交界面在同轴激波加速下的演化过程。得到了以下初步结果:在参数相同的情形下,内聚激波比中心爆炸波对界面的扰动更危险;内聚激波从轻质流体进入重质流体比从重质流体进入轻质流体,界面有更快的增长。周向波数大小对界面增长率有很大的影响,在计算的参数下, $n=8 \sim 12$ 有最大增长率,大于和小于这个范围的周向波长,增长率均明显减弱。

应该指出,该研究仅是初步的,所得结论仅是从有限的算例得出的,它的普适性有待进一步研究,今后的工作包括对高密度比,不同介质(气/液,气/固),多模扰动,轴向波数大小的影响等。

参考文献:

- [1] Richtmyer R D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids[J]. *Communications on Pure Applied Mathematics*, 1960, 13:297—319.
- [2] Meshkov E E. Instability of a shock wave accelerated interface between two gases[R]. NASA TT F-13, 1970.
- [3] Zhang Qiang, Sohn S. An analytical nonlinear theory of Richtmyer-Meshkov instability[J]. *Physical Letters A*, 1996, 212:149—155.
- [4] Benjamin B, Besnard D, Haas J. Shock and reshock of an unstable interface[R]. LA-UR 92-1185, 1993.
- [5] Meyer K A, Blewett P J. Numerical investigation of the stability of a shock-accelerated interface between two fluids[J]. *Physics Fluids*, 1972, 15:753—759.
- [6] Holmes R L, Dimonte G, Fryxell B, et al. Richtmyer-Meshkov instability growth: experiment, simulation and theory [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, 389:55—79.
- [7] Zhang Qiang, Graham M J. A numerical study of R-M instability driven by cylindrical shocks[J]. *Physics Fluids*, 1998, 10:974—992.
- [8] Fursenko A A, Sharov D M, Timofeev E V, et al. High-resolution schemes and unstructured grids in transient shocked flow simulation[A]. *Lecture Notes in Physics*[M]. Berlin:Springer Verlag, 1993. 250—254.
- [9] Poinot T J, Lele S K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 101:104—129.

Numerical study on the Richtmyer-Meshkov instability in cylindrical geometry

MA Dong-jun, HE Xing, SUN De-jun, YIN Xie-yuan*

*(Department of Modern Mechanics, University of Science and
Technology of China, Hefei 230027, Anhui, China)*

Abstract: High resolution Godunov scheme on adaptive unstructured grids is extended to Euler equations in cylindrical coordinates. A numerical study is presented on the Richtmyer-Meshkov instability driven by both the imploding and exploding cylindrical shocks. Various azimuthal and axial perturbation wave numbers are considered for their effects on perturbation growth rate.

Key words: mechanics of explosion; Richtmyer-Meshkov instability; Godunov scheme; cylindrical interface; adaptive unstructured grids; Euler equations

* Corresponding author; YIN Xie-yuan E-mail address: xyin@ustc.edu.com; Telephone: 0551-3601263