

文章编号: 1001-1455(2003)05-0405-10

# 冲击荷载作用下简支圆板的塑性动力响应统一解\*

王延斌<sup>1,2</sup>, 俞茂宏<sup>1</sup>, 肖 耘<sup>3</sup>, 李林生<sup>3</sup>

(1. 西安交通大学建筑工程与力学学院, 陕西 西安 710049;

2. 西北电力试验研究院, 陕西 西安 710054;

3. 中国运载火箭技术研究院, 北京 100076)

摘要: 采用统一强度理论求解了简支圆板在中等脉冲荷载作用下的动力响应问题, 得出了统一的动力塑性极限荷载、内力场和速度场, 并给出了上限解和下限解。讨论了静力许可条件和运动许可条件。利用本文的解还得出简支圆板在静力荷载作用下的极限荷载、内力场和速度场。根据选择不同的拉压比参数  $\alpha$ , 本文所给出的解可以适用于各种拉压异性和拉压同性材料。Tresca 解、Mohr-Coulomb 解和双剪统一屈服准则解是本文的特例, Mises 解是本文当  $\alpha=1$  和  $b=0.5$  时的线性逼近。研究表明, 拉压比  $\alpha$  和强度理论参数  $b$  对动力解的影响要大于对静力解的影响, 所以, 根据材料的不同选择合适的强度理论, 对于更好的发挥材料的强度潜力, 减轻结构的重量具有重要的意义。

关键词: 固体力学; 动力塑性响应; 统一强度理论; 简支圆板; 中等脉冲荷载

中图分类号: O342 国标学科代码: 130·1565 文献标志码: A

## 1 引 言

圆板在短时强荷载作用下的动力弯曲问题是机械、航空、航天等工程领域中常遇到的问题。但是直到目前为止, 这方面的研究还很不完善。薄板的弹性动力响应问题的研究比较多。对板的塑性动力响应分析, 则主要限于理想刚塑性板的轴对称问题。由于本构模型的复杂性导致了求解板的塑性动力响应的困难。H.G.Hopkins 等<sup>[1]</sup>首先研究了刚塑性的简支圆板的动力响应问题。在过去的 40 年中, 国外许多学者<sup>[2-6]</sup>针对不同的边界条件和荷载条件对圆板的塑性动力响应做了大量工作。但迄今为止, 上述研究所采用的屈服准则多数为最大正应力准则和 Tresca 屈服准则。几乎没有人注意到屈服准则的选择对动力响应求解的影响。事实上, 不同的材料服从不同的屈服准则<sup>[7]</sup>, 如由于高强度钢(如机械设备中的不锈钢、耐热钢等)和高强度合金(如航空航天器中的高强度铝合金等)具有 SD 效应, 所以各种单参数的屈服准则已不再适用。在我国也有学者对圆板和方板的塑性动力响应分析做了一些工作<sup>[8-11]</sup>。G.W.Ma 等<sup>[12]</sup>在圆板的塑性动力响应分析方面做了新的尝试, 采用俞茂宏提出的统一屈服准则<sup>[13-14]</sup>求解了中等脉冲荷载作用下的简支圆板的塑性动力响应, 得出了一系列有价值的结果。但统一屈服准则只适用于拉压强度相等的材料, 对于拉压异性材料并不适用。因此, 根据文献[12]的求解思路, 本文将运用统一强度理论<sup>[13-14]</sup>求解简支圆板在中等脉冲荷载作用下的塑性动力响应, 日本学者应用统一屈服准则得出的结果以及国内外学者采用 Tresca 准则和 Mises 准则得出的静力和动力结果均为本文的特例或线性逼近。

## 2 统一强度理论

从双剪单元体出发, 全面考虑了作用在单元体的应力, 建立了一种全新的可以适用于各种不同材料的统一强度理论。它用一个统一的模型、简单的统一的数学表达式, 能十分灵活地适用于各种不同特性

\* 收稿日期: 2002-11-04; 修回日期: 2003-04-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(59779028)

作者简介: 王延斌(1967—), 男, 博士研究生, 高级工程师。

的材料,其数学表达式为<sup>[13~14]</sup>

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1 \quad \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \quad (1a)$$

$$F' = \frac{1}{1+b} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_1 \quad \sigma_2 > \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \quad (1b)$$

式中:  $\alpha$  为拉伸极限强度  $\sigma_t$  与压缩极限强度  $\sigma_c$  之比,即  $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$ 。  $b$  为反映中间主应力效应以及相应面上的正应力对材料破坏的影响的材料强度参数 ( $0 \leq b \leq 1$ )。其值可由下式确定

$$b = \frac{(1 + \alpha)\tau_0 - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_0} \quad (2)$$

式中:  $\tau_0$  为材料的剪切强度极限。随着  $\alpha, b$  值的不同,统一强度理论可退化为几种经典的强度准则。当  $b=0$  时,为 Mohr-Coulomb 理论,  $b=1$  时,为双剪强度理论。当  $\alpha=1$  时,为双剪统一屈服准则,在此基础上,当  $b=0, b=0.5, b=1$  时,分别得到 Tresca 屈服准则, Mises 屈服准则的线性逼近和双剪应力屈服准则。统一强度理论在  $\pi$  平面及双向应力下的屈服线图形如图 1 所示。

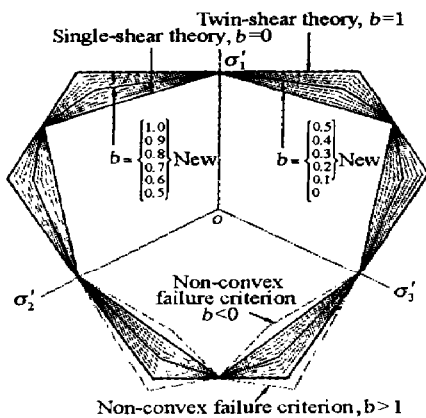


图 1(a) 统一强度理论的  $\pi$  平面迹线图  
Fig.1(a) Unified strength theory in  $\pi$  plane

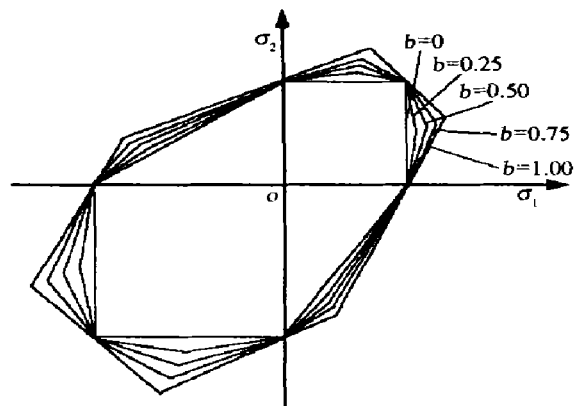


图 1(b) 统一强度理论的平面应力迹线图  
Fig.1(b) Unified strength theory in plane stress state

### 3 圆板的动力方程和边界条件

如图 2 所示,周边简支的圆板,半径为  $a$ ,厚度为  $h$ ,单位面积质量为  $\bar{\mu}$ ,挠度响应为  $W$ ,矩形脉冲荷载为  $P$  (即  $P_s \leq P \leq 2P_s$ ,其中  $P_s$  是板的静力塑性极限荷载)。设圆板的广义应力为径向弯矩  $M_r$ 、切向弯矩  $M_\theta$ 、横向剪力  $Q_{rz}$  和塑性极限弯矩  $M_0$ 。其中塑性极限弯矩  $M_0$  可根据塑性屈服条件求得,当圆板为理想弹塑性材料时,  $M_0 = \sigma_t h^2 / (2(1 + \alpha))$ 。

量纲一的参数为

$$r = R/a, m_\theta = M_\theta/M_0, m_r = M_r/M_0, p = Pa^2/M_0, q = Q_{rz}a/M_0, \mu = \bar{\mu}a^3/M_0, w = W/a$$

假设  $t=0$  时,圆板上突然受到  $P(t)=P$  的脉冲荷载,荷载的持续时间为  $\tau$ 。板的运动可分为两相,即  $0 \leq t \leq \tau$  和  $\tau < t \leq T$ ,其中  $T$  为响应持续时间。则简支圆板的运动方程为

$$\partial(rm_r) / \partial r - m_\theta - rq = 0 \quad (3)$$

$$\partial(rq) / \partial r + rp - \mu r \dot{w} = 0 \quad (4)$$

几何方程分别为

$$k_r = - \mathcal{E} \dot{w} / \partial r^2 \quad (5a)$$

$$k_\theta = - (\partial \dot{w} / \partial r) / r \quad (5b)$$

量纲一的脉冲荷载  $p$  在第一相中满足

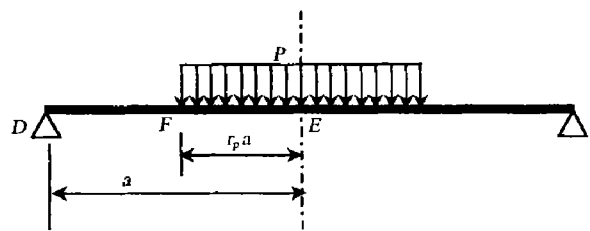


图 2 矩形脉冲荷载作用下的简支圆板  
Fig.2 Simply supported circular plate under moderate partial uniformly distributed impulsive load

$$p = \begin{cases} p_0 & 0 \leq r \leq r_p \\ 0 & r_p < r \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $r_p$  表示无量纲的荷载作用半径,  $r_p = R_p/a$ 。在第二相中满足

$$p = 0 \quad (7)$$

采用由广义应力  $m_r$ 、 $m_\theta$  表示的统一强度理论, 屈服线图形如图 3 所示。在塑性极限状态时, 板中心 ( $r=0$ ) 弯矩满足  $m_r = m_\theta = 1$  (图 3 中的 A 点), 简支边界 ( $r=1$ ) 满足  $m_r = 0$  (图 3 中的 C 点), 所以圆板上所有点的弯曲弯矩均位于 AB 和 BC 段上。这两段的屈服条件可表示为

$$m_\theta = a_i m_r + b_i \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

式中:  $i=1$  表示 AB 边,  $i=2$  表示 BC 边。  $a_i, b_i$  是常数, 分别为  $a_1 = -b, b_1 = 1+b; a_2 = \alpha b / (1+b), b_2 = 1$ 。

根据相关流动法则则有

$$k_r = \lambda \partial F / \partial m_r, \quad k_\theta = \lambda \partial F / \partial m_\theta \quad (9)$$

式中:  $F$  是塑性势函数, 即屈服函数。因此

$$k_r = -a_i / k_\theta \quad (10)$$

由(3)、(4)和(8)式可以得到弯矩控制方程

$$\partial(rm_r) / \partial r^2 - a_i \partial m_r / \partial r = -rp + \mu r \ddot{w} \quad (11)$$

将(5)式代入(10)式可以得到速度控制方程

$$\partial \dot{w} / \partial r^2 + a_i \dot{w} / (r \partial r) = 0 \quad (12)$$

#### 4 第一相运动 ( $0 \leq t \leq \tau$ )

在第一相运动中, 圆板在  $0 \leq r \leq r_p$  范围内承受常荷载  $p_0$  的作用。由方程(12)可以得到速度方程

$$\dot{w} = \dot{w}_1 = \begin{cases} c_{11} r^{1-a_1} + c_{21} & 0 \leq r \leq r_1 \\ c_{12} r^{1-a_2} + c_{22} & r_1 < r \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $c_{1i}, c_{2i} (i=1, 2)$  是积分常数。  $r_1$  表示分割半径, 其分割点的弯矩与图 3 中的 B 点弯矩相同。  $\dot{w}_1$  表示圆板中心的速度响应, 是时间的函数。

根据连续和边界条件: (1)  $\dot{w} |_{r=0} = \dot{w}_1$ ; (2)  $d\dot{w} / dr |_{r=r_1}$  和  $\dot{w} |_{r=r_1}$  连续; (3)  $\dot{w} |_{r=1} = 0$ 。求出积分常数

$$c_{11} = -\frac{(1+b-\alpha b)r_1^{-\frac{b^2+b+\alpha b}{1+b}}}{(1+b)^2 - b(1+b+\alpha)r_1^{\frac{1+b-\alpha b}{1+b}}}, \quad c_{21} = 1, \quad c_{12} = -c_{22} = -\frac{(1+b)^2}{(1+b)^2 - b(1+b+\alpha)r_1^{\frac{1+b-\alpha b}{1+b}}}$$

在第一相运动中, 求解弯矩时要考虑  $r_p \leq r_1$  和  $r_p > r_1$  两种情况。连续和边界条件为: (4)  $m_r |_{r=0} = 1$ ; (5)  $m_r |_{r=r_1}$  连续且等于  $(1+b)/(1+b+\alpha)$ ; (6)  $\partial m_r / \partial r |_{r=r_1}$  连续; (7)  $m_r |_{r=r_p}$  连续; (8)  $\partial m_r / \partial r |_{r=r_p}$  连续; (9)  $m_r |_{r=1} = 0$ 。

##### 4.1 第一种情况 ( $r_p \leq r_1$ )

由方程(11)可以得到第一种情况弯矩响应场

$$m_{r1} = \frac{-p_0 + \mu \ddot{w}_1 c_{21}}{2(3-a_1)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{11}}{(3-a_1)(4-2a_1)} r^{3-a_1} + c_{31} r^{-1+a_1} + c_{41} \quad 0 \leq r \leq r_p \quad (14a)$$

$$m_{r2} = \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{21}}{2(3-a_1)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{11}}{(3-a_1)(4-2a_1)} r^{3-a_1} + c_{32} r^{-1+a_1} + c_{42} \quad r_p < r \leq r_1 \quad (14b)$$

$$m_{r3} = \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{22}}{2(3-a_2)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} r^{3-a_2} + c_{33} r^{-1+a_2} + c_{43} \quad r_1 < r \leq 1 \quad (14c)$$

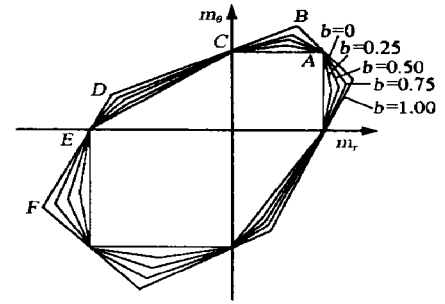


图 3 统一强度理论的广义平面应力屈服线  
Fig.3 Unified strength theory in  $m_r$ - $m_\theta$  space

式中:  $c_{3i}$ 、 $c_{4i}$  ( $i=1, 2, 3$ )是积分常数。根据连续和边界条件可以求出积分常数为

$$\begin{aligned} c_{31} &= 0, \quad c_{41} = 1, \quad c_{32} = \frac{p_0 r_p^{3-a_1}}{(1-a_1)(3-a_1)}, \quad c_{42} = 1 - \frac{p_0 r_p^2}{2(1-a_1)} \\ c_{33} &= \left[ \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{21}}{(3-a_1)(a_2-1)} - \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{22}}{(3-a_2)(a_2-1)} \right] r_1^{3-a_2} + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{11} r_1^{4-a_1-a_2}}{(4-2a_1)(a_2-1)} - \\ &\quad \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12} r_1^{4-2a_2}}{(4-2a_2)(a_2-1)} + \frac{a_1-1}{a_2-1} c_{32} r_1^{a_1-a_2} \\ c_{43} &= \frac{1+b}{1+b+a} - c_{33} r_1^{-1+a_2} - \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{22}}{2(3-a_2)} r_1^2 - \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} r_1^{3-a_2} \end{aligned}$$

而且

$$\mu \ddot{w}_1 = \frac{(3-a_1)(4-2a_1)}{(2-a_1)r_1^2 + c_{11}r_1^{3-a_1}} \left[ -\frac{\alpha}{1+b+\alpha} + \frac{p_0 r_p^2}{2(1-a_1)} - \frac{p_0 r_p^{3-a_1} r_1^{-1+a_1}}{(1-a_1)(3-a_1)} \right] \quad (15)$$

其中  $r_1$  满足

$$\frac{\mu \ddot{w}_1 c_{22}}{2(3-a_2)} + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} + c_{33} + c_{43} = 0 \quad (16)$$

给定脉冲荷载  $p_0$  和作用半径  $r_p$ , 根据(16)式和(15)式以及积分常数可以求出  $r_1$ , 求解在  $(r_p, 1)$  范围内进行。

#### 4.2 第二种情况 ( $r_p > r_1$ )

根据4.1节的求解思路, 可得到第二种情况下弯矩响应场

$$m_{r1} = \frac{-p_0 + \mu \ddot{w}_1 c_{21}}{2(3-a_1)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{11}}{(3-a_1)(4-2a_1)} r^{3-a_1} + c_{31} r^{-1+a_1} + c_{41} \quad 0 \leq r \leq r_1 \quad (17a)$$

$$m_{r2} = \frac{-p_0 + \mu \ddot{w}_1 c_{22}}{2(3-a_2)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} r^{3-a_2} + c_{32} r^{-1+a_2} + c_{42} \quad r_1 < r \leq r_p \quad (17b)$$

$$m_{r3} = \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{22}}{2(3-a_2)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} r^{3-a_2} + c_{33} r^{-1+a_2} + c_{43} \quad r_p < r \leq 1 \quad (17c)$$

式中:  $c_{3i}$ 、 $c_{4i}$  ( $i=1, 2, 3$ )是积分常数。根据连续和边界条件可以求出积分常数

$$\begin{aligned} c_{31} &= 0, \quad c_{41} = 1 \\ c_{32} &= \left[ \frac{-p_0 + \mu \ddot{w}_1 c_{21}}{(3-a_2)(a_2-1)} - \frac{-p_0 + \mu \ddot{w}_1 c_{22}}{(3-a_2)(a_2-1)} \right] r_1^{3-a_2} + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{11} r_1^{4-a_1-a_2}}{(4-2a_1)(a_2-1)} - \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12} r_1^{4-2a_2}}{(4-2a_1)(a_2-1)} \\ c_{42} &= \frac{1+b}{1+b+\alpha} - c_{32} r_1^{-1+a_2} - \frac{-p_0 + \mu \ddot{w}_1 c_{22}}{2(3-a_2)} r_1^2 - \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} r_1^{3-a_2} \\ c_{33} &= \frac{p_0 r_p^{3-a_2}}{(1-a_2)(3-a_2)} + c_{32}, \quad c_{43} = c_{42} + c_{32} r_p^{-1+a_2} - \frac{p_0 r_p^2}{2(3-a_2)} - c_{33} r_p^{-1+a_2} \end{aligned}$$

而且

$$\mu \ddot{w}_1 = \frac{(2+b)(1+b+\alpha)p_0 r_1^2 - 2\alpha(3+b)(2+b)}{(2+b)(1+b+\alpha)r_1^2 + (1+b+\alpha)c_{11}r_1^{3+b}} \quad (18)$$

其中  $r_1$  满足

$$\frac{\mu \ddot{w}_1 c_{22}}{2(3-a_2)} + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{(3-a_2)(4-a_2)} + c_{33} + c_{43} = 0 \quad (19)$$

给定脉冲荷载  $p_0$  和作用半径  $r_p$ , 根据(18)式和(19)式以及积分常数可以求出  $r_1$ , 求解在  $(0, r_p)$  范围内进行。进而可求出弯矩场。

设脉冲荷载满足静力和运动许可条件, 则在两种情况之间存在一个临界点。对应的半径  $r_{1p}$  称为临界半径, 满足  $r_{1p} = r_p = r_1$ 。求出  $r_{1p}$  后, 与实际荷载半径  $r_p$  进行比较, 如果  $r_p \leq r_{1p}$ , 则用第一种情况的公式求解弯矩场, 否则使用第二种情况的公式求解弯矩场。

方程(16)和(18)表明在第一相中  $\mu \ddot{w}_1$  是一个常数。在第一相中两种情况下板的最终位移和速度

分别为

$$w = \dot{w}_1 \tau^2 (c_{1i} r^{1-a_i} + c_{2i}) / 2 \quad i = 1, 2 \tag{20}$$

$$\dot{w} = \dot{w}_1 \tau (c_{1i} r^{1-a_i} + c_{2i}) \quad i = 1, 2 \tag{21}$$

则从 (21) 式可以得到在第一相中吸收的动能为

$$\begin{aligned} k_e &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} \mu M_0 a \dot{w}^2 r d\theta dr \\ &= \mu M_0 a \dot{w}_1^2 \tau^2 \left[ \int_0^{r_1} (c_{11} r^{1-a_1} + c_{21})^2 r dr + \int_{r_1}^1 (c_{12} r^{1-a_2} + c_{22})^2 r dr \right] = \mu M_0 a \dot{w}_1^2 \tau^2 K \end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$K = \frac{c_{11}^2}{4-2a_1} r_1^{4-2a_1} + \frac{2c_{11}c_{21}}{3-a_1} r_1^{3-a_1} + \frac{c_{21}^2}{2} r_1^2 + \frac{c_{12}^2}{4-2a_2} (1-r_1^{4-2a_2}) + \frac{2c_{12}c_{22}}{3-a_2} (1-r_1^{3-a_2}) + \frac{c_{22}^2}{2} (1-r_1^2)$$

$k_e$  也是第二相中要消耗的动能。

### 5 第二相运动 ( $\tau \ll t \leq T$ )

在第二相运动中  $p=0$ 。但是在  $t=\tau$  处塑性变形是连续的。速度分布与第一相运动相同, 用  $r_2$  来代替 (13) 式中的  $r_1$  即可得到第二相运动的速度响应。与第一相运动相类似, 得到第二相运动的弯矩响应场为

$$m_{r1} = \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{21}}{2(3-a_1)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{11}}{(3-a_1)(4-2a_1)} r^{3-a_1} + c_{31} r^{-1+a_1} + c_{41} \quad 0 < r \leq r_2 \tag{23a}$$

$$m_{r2} = \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{22}}{2(3-a_2)} r^2 + \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} r^{3-a_2} + c_{32} r^{-1+a_2} + c_{42} \quad r_2 < r < 1 \tag{23b}$$

边界和连续条件为: (10)  $m_r|_{r=0}=1$ ; (11)  $m_r|_{r=r_2}$  连续且等于  $(1+b)/(1+b+\alpha)$ ; (12)  $\partial m_r / \partial r|_{r=r_2}$  连续; (13)  $m_r|_{r=1}=0$ 。

利用边界和连续条件可以求出积分常数

$$\begin{aligned} c_{31} &= 0, \quad c_{41} = 1 \\ c_{32} &= \left[ \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{21}}{(3-a_1)(a_2-1)} - \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{22}}{(3-a_2)(a_2-1)} \right] r_2^{3-a_2} + \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{11} r_2^{4-a_1-a_2}}{(4-2a_1)(a_2-1)} - \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{12} r_2^{4-2a_2}}{(4-2a_2)(a_2-1)} \\ c_{42} &= \frac{1+b}{1+b+\alpha} - c_{32} r_2^{-1+a_2} - \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{22}}{2(3-a_2)} r_2^2 - \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} r_2^{3-a_2} \end{aligned}$$

而且

$$\mu \ddot{w}_2 = \frac{-2\alpha(3+b)(2+b)}{(2+b)(1+b+\alpha)r_2^2 + (1+b+\alpha)c_{11}r_2^{3+b}} \tag{24}$$

其中  $r_2$  满足

$$\frac{\mu \ddot{w}_2 c_{22}}{2(3-a_2)} + \frac{\mu \ddot{w}_2 c_{12}}{(3-a_2)(4-2a_2)} + c_{32} + c_{42} = 0 \tag{25}$$

可以看出, 在第二相运动中  $\mu \ddot{w}_2$  是一个常量。

由于  $\mu$  是常数, 所以  $\ddot{w}_2$  也是常数, 根据加速度、速度和位移的边界和连续条件可以求得圆板中心位移响应为

$$w_2 = \frac{1}{2} \ddot{w}_2 (t-\tau)^2 + \frac{1}{2} \dot{w}_1 \tau (2t-\tau) \tag{26}$$

速度响应为

$$\dot{w}_2 = \dot{w}_2 (t-\tau) + \dot{w}_1 \tau \tag{27}$$

式中  $\dot{w}_1$ 、 $\dot{w}_2$  分别由 (15) 和 (24) 式确定。

板的永久横向塑性变形为

$$w_f = -\frac{1}{2} \ddot{w}_2 \tau^2 \eta (\eta-1)^2 (c_{1i} r^{1-a_i} + c_{2i}) \quad i = 1, 2 \tag{28}$$

式中:  $\eta$  为响应时间系数,  $\eta=1-\ddot{w}_1/\ddot{w}_2$ 。

## 6 静力和运动许可条件

当脉冲荷载作用的时间足够长, 而且在第一相中的圆板中心加速度  $\ddot{w}_1$  等于 0, 那么, 动力求解问题退化为静力塑性极限荷载求解问题。将  $\ddot{w}_1=0$  代入 (15) 和 (18) 式, 得到两种情况下的静力塑性极限荷载

$$p_s = \frac{2\alpha(1+b)(3+b)}{(1+b+\alpha)\left[(3+b)-2(r_p/r_s)^{1+b}\right]r_p^2} \quad (29)$$

和

$$p_s = \frac{2\alpha(3+b)}{(1+b+\alpha)r_s^2} \quad (30)$$

式中:  $r_s$  表示分割半径, 其分割点的弯矩与图 3 中的 B 点弯矩相同。将  $\ddot{w}_1=0$  代入 (16) 或 (19) 式可以求出  $r_s$ 。两种情况之间存在一个临界点。对应的半径为临界半径  $r_{sp}$ , 满足  $r_{sp}=r_p=r_s$ 。求出  $r_{sp}$  后, 与实际荷载半径  $r_p$  进行比较, 如果  $r_p \leq r_{sp}$ , 则用 (16) 和 (29) 式求解  $r_s$  和  $p_s$ , 否则使用 (19) 和 (30) 式进行求解。将  $\ddot{w}_1=0$  以及  $r_{sp}=r_p=r_s$  代入 (16) 或 (19) 式, 并利用 (29) 或 (30) 式可以求出临界半径

$$r_{sp} = \left[ \frac{2\alpha}{(2+b)\alpha - (1+b)} \right]^{\frac{1+b}{b-1-b}} \quad (31)$$

圆板能够承受短时的超过静力的塑性极限荷载, 但必须还要证明前面的理论求解没有违反屈服条件和静力许可条件。根据图 3 所示的屈服条件, 圆板的径向弯矩场是一个减函数 ( $A \rightarrow B \rightarrow C$ )。而且径向弯矩在  $r=0$  处有最大值, 在  $r=1$  处有最小值, 则

$$\partial m_r / \partial r \leq 0, \quad \partial^2 m_r / \partial r^2 \leq 0 \quad r=0 \quad (32)$$

$$\partial m_r / \partial r \leq 0, \quad \partial^2 m_r / \partial r^2 \geq 0 \quad r=1 \quad (33)$$

对第一相运动, 在板中心 ( $r=0$ ), 自动满足条件  $\partial m_r / \partial r=0$ 。所以只需要在  $r=0$  处有  $\partial^2 m_r / \partial r^2 \leq 0$ 。由 (14a) 或 (17a) 式, 并根据  $r=0$  处有  $\partial^2 m_r / \partial r^2 \leq 0$ , 可以得出

$$-p_0 + \mu \ddot{w}_1 \leq 0 \quad (34)$$

用 (15)、(16) 和 (34) 式以及 (18)、(19) 式和 (34) 式可以分别预计两种情况下的最大动力脉冲荷载  $p_{d1}$ 。

由于  $r=1$  时, 自动满足条件  $\partial^2 m_r / \partial r^2 \geq 0$ , 所以由 (14c) 或 (17c) 式, 并根据  $r=1$  有  $\partial m_r / \partial r=0$ , 可以得到

$$\frac{\mu \ddot{w}_1 c_{22}}{3-a_2} + \frac{\mu \ddot{w}_1 c_{12}}{4-2a_2} + (-1+a_2)c_{33} = 0 \quad (35)$$

用 (15)、(16) 和 (35) 式以及 (18)、(19) 式和 (35) 式可以分别预计两种情况下的最大许可脉冲荷载  $p_{d2}$ 。

在第二相运动中,  $m_r$  与  $p_0$  没有关系。这样, 脉冲荷载必须满足下列不等式

$$p_s \leq p_0 \leq p_d = \min(p_{d1}, p_{d2}) \quad (36)$$

式中:  $p_d$  是最大许可脉冲荷载。

设  $\beta=p_0/p_s$ ,  $\beta_d=p_d/p_s$ , 则 (36) 式可写为

$$1 \leq \beta \leq \beta_d \quad (37)$$

式中:  $\beta$  表示静力许可荷载系数,  $\beta_d$  表示最大静力许可荷载系数。

不管是在第一相运动中还是在第二相运动中, 加速度响应与时间没有关系, 而且, 位移、速度、加速度在整个响应时间里于整个板上都是连续的。所以, 动力解明显地符合运动许可条件。在  $1 \leq \beta \leq \beta_d$  条件下, 上面的理论解满足静力许可条件。因此, 以上的解是刚塑性圆板动力响应的完全解。

## 7 讨 论

为讨论问题的简单化, 假定  $r_p=1$ 。

根据上面的理论推导可以看出,利用本文动力解可以得到静力解。图 4 给出了静力塑性极限荷载  $p_s$  与拉压比  $\alpha$  和强度理论参数  $b$  的关系曲线。当  $\alpha$  一定时,极限荷载在  $b=0$  时取得最小值,在  $b=1$  时取得最大值。图 5 给出静力塑性极限弯矩场与与参数  $\alpha, b$  的关系曲线。

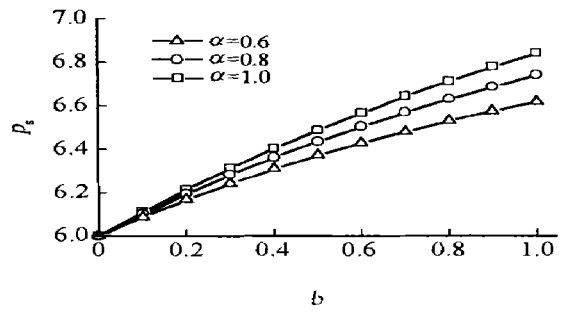


图 4 静力极限荷载与  $b, \alpha$  关系曲线  
Fig.4 Relations of static limit loads and  $b, \alpha$

图 6 给出了动力塑性极限荷载与  $\alpha, b$  的关系曲线。与静力极限荷载相同,当  $\alpha$  一定时,动力极限荷载在  $b=0$  时取得最小值,在  $b=1$  时取得最大值。在  $b$  值一定时,极限荷载随  $\alpha$  值的增大而增大 ( $b=0$  除外)。从图 5 和图 6 可以看出,  $b$  值的变化对动力极限荷载的影响要大于对静力极限荷载的影响。

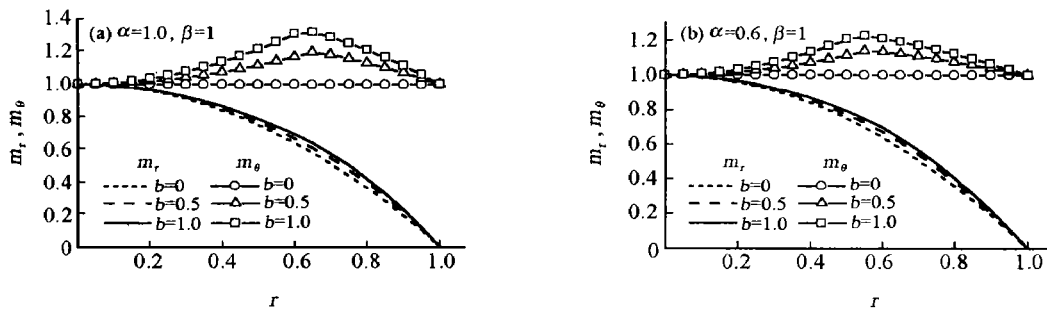


图 5 静力塑性极限弯矩场  
Fig.5 Static limit moment fields

图 7 和图 8 分别给出了第一相运动中和第二相运动中的动力塑性极限弯矩场随参数  $\alpha, b$  的变化情况,第一相运动中的塑性极限弯矩场与冲击荷载有关,而第二相运动中的塑性极限弯矩场与冲击荷载无关。可以看出,  $b$  值的变化对切向弯矩场有较大影响,对径向弯矩场影响较小,而  $\alpha$  对切向弯矩场和径向弯矩场均有较大影响。

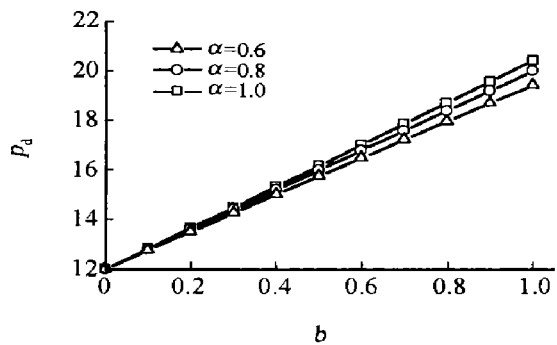


图 6 动力极限荷载与  $b, \alpha$  关系曲线  
Fig.6 Relations of dynamic limit impulsive loads and  $b, \alpha$

图 9 和图 10 分别给出了动力极限荷载作用下不同  $\alpha, b$  时的圆板中心位移响应和速度响应曲线。 $\alpha$  对位移响应和速度响应有较大影响。 $\alpha$  为定值时,圆板中心位移响应和速度响应随  $b$  值的增大而增大。

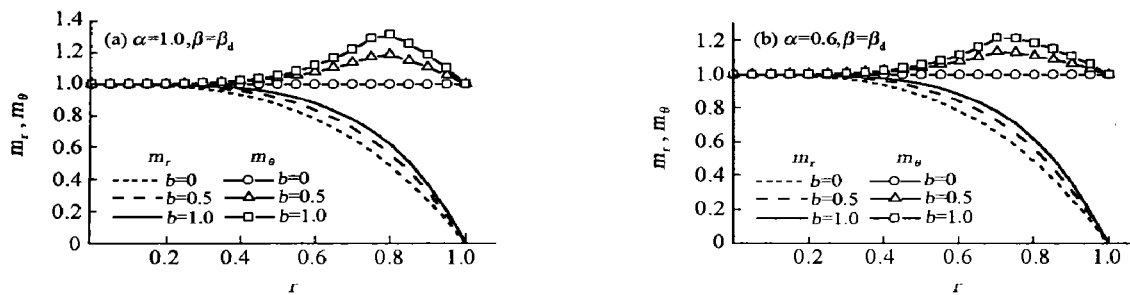


图 7 第一相运动中动力塑性极限弯矩场  
Fig.7 Limit moment fields during the first phase of motion

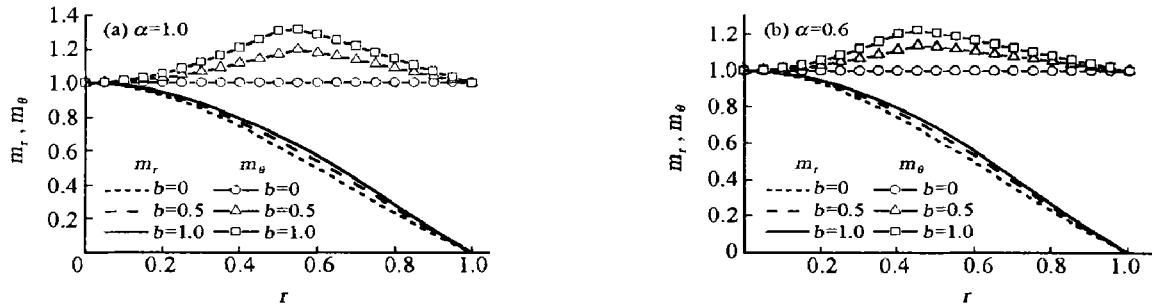


图 8 第二相运动中动力塑性极限弯矩场

Fig.8 Limit moment fields during the second phase of motion

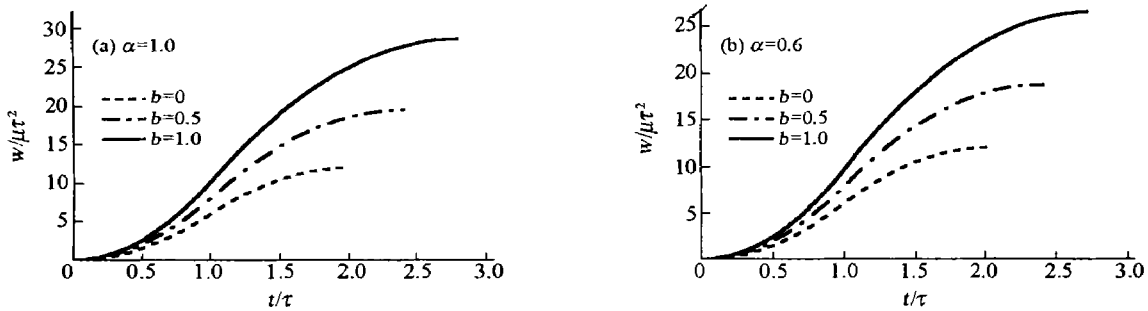


图 9 圆板中心位移响应

Fig.9 Limit displacement responses at the plate center

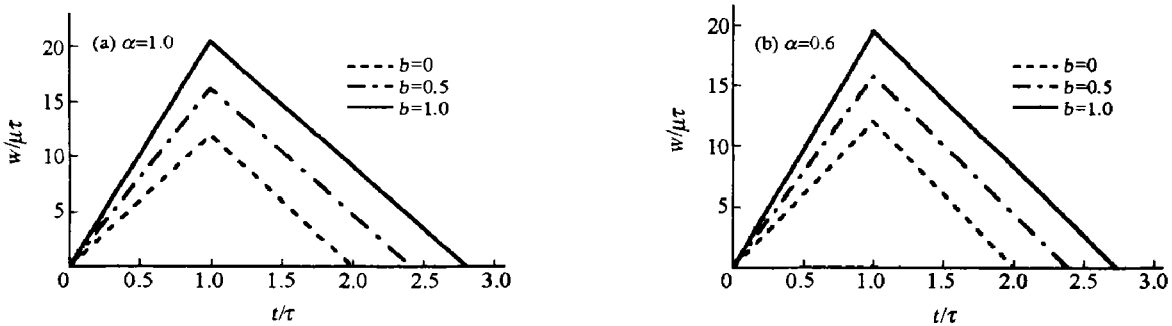


图 10 圆板中心速度响应

Fig.10 Limit velocity responses at the plate center

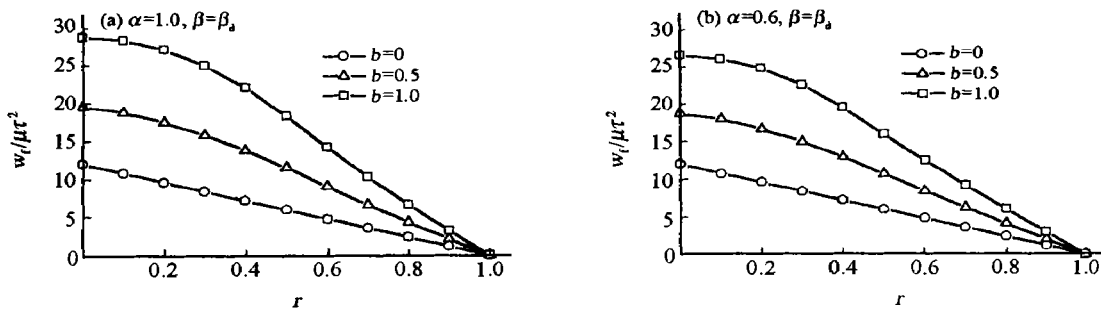


图 11 圆板的塑性变形曲线

Fig.11 Permanently deformed transverse displacements

图 11 给出了动力极限荷载作用下圆板的最终塑性变形曲线。可以看出  $\alpha, b$  对塑性变形有较大影响。 $\alpha$  为定值时, 塑性变形随  $b$  值的增大而增大。 $b$  值为定值时, 塑性变形随  $\alpha$  的减小而减小。



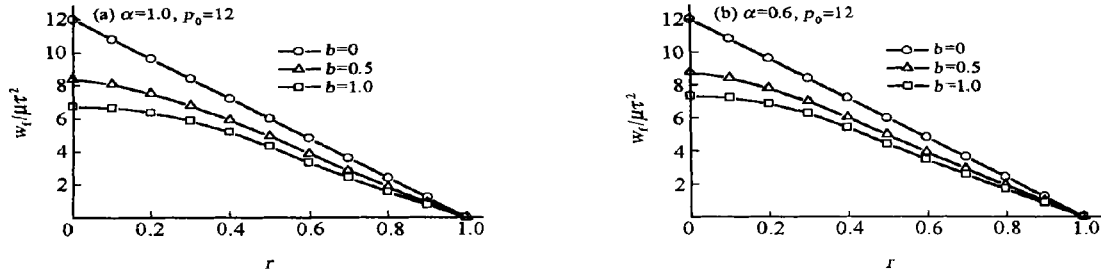


图 12 圆板的塑性变形曲线

Fig. 12 Permanently deformed transverse displacements

图 12 给出了相同动力荷载作用下圆板的塑性变形随  $\alpha$ 、 $b$  的变化曲线。可以看出,当  $b=0$  时,  $\alpha$  值的变化对塑性变形无影响,而且,当  $b=0$  时的塑性变形为最大,  $b=1$  时的塑性变形为最小。

当  $\alpha=1$  时,统一强度理论退化为统一屈服准则。在此基础上,当  $b=0$  时,统一屈服准则退化为 Tresca 准则,  $b=1$  时退化为双剪应力屈服准则,而  $b=0.5$  可以作为 Mises 准则的线性近似。由图 4、图 6 和图 12 可以看出, Tresca 准则解的位移响应为最大,静力、动力塑性极限荷载为最小,为下限解。而双剪应力屈服准则解的位移响应为最小,静力、动力塑性极限荷载为最大,为上限解。

## 8 结 论

运用可以适用拉压异性材料的统一强度理论求解了简支圆板在中等脉冲荷载作用下的动力响应问题,并根据静力和运动许可条件求出了动力塑性极限荷载以及在此作用下的圆板内力场和速度场。选择不同的参数,可以得到一系列从单剪到双剪应力强度理论的极限解。从这一系列结果中,可以看到:

(1) 本文的解满足静力许可条件和运动许可条件,所以为完全解。

(2) 利用本文的解可以得到该问题的静力解,即静力塑性极限荷载以及内力场和速度场。

(3) 材料的拉压比  $\alpha$  和强度理论参数  $b$  对动力弯矩场、位移响应、速度响应均有较大影响。对动力极限荷载的影响要大于对静力极限荷载的影响,尤其是  $b$  值的影响最为显著。当  $\alpha=1$  时,  $b=0$  和  $b=1$  时的静力极限荷载相差 14%,而动力极限荷载相差 70%。

(4) 根据  $\alpha$  值的不同,本文的解可以适用于各种拉压异性材料。当  $\alpha=1$  时,即拉压强度相同时,统一强度理论退化为统一屈服准则,所以本文的解也可以适用于各种拉压同性材料。

(5) 由于 Tresca 准则和 Mohr-Coulomb 强度理论都没有考虑中间主应力效应,并且与大多数的实验结果不符合。因此,用  $b>0$  的强度理论可以更好地发挥材料的强度潜能,从而提高结构的极限承载能力或减轻结构的重量,这对于航空航天器结构更具有特别重要的意义。

## 参考文献:

- [1] Hopkins H G, Prager W. On the dynamics of plastic circular plates[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1954, 5: 317-330.
- [2] Florence A L. Response of circular plates to central pulse loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 1977, 13: 091-102.
- [3] Jones N, De Oliveira J G. Dynamic plastic response of circular plates with transverse shear and rotatory inertia[J]. Journal of Applied Mechanics, 1980, 47(1): 27-34.
- [4] Jones N. Impulsive loading of a simple supported circular rigid plastic plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35: 59-65.
- [5] Shen W, Jones N. Dynamic response and failure of fully clamped circular plates under impulsive loading [J]. International Journal of Impact Engineering, 1993, 13: 259-278.
- [6] Symond P S, Wierzbicki T. Membrane mode solutions for impulsively loaded circular plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1979, 46(1): 58-64.
- [7] YU Mao-hong. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century[J]. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55(3): 169-218.

- [8] 于政文. 冲击荷载作用下简支方板的理论解[J]. 振动与冲击, 1999, 18(1):17—22.  
YU Zheng-wen. Theoretical solution of a simply supported square plate subjected to impulsive loading [J]. Chinese Journal of Vibration and Shock, 1999, 18(1):17—22.
- [9] 席丰, 杨嘉陵. 强脉冲荷载作用下弹-塑性薄圆板的大挠度动力响应[J]. 爆炸与冲击, 2000, 20(4):379—384.  
XI Feng, YANG Jia-ling. Dynamic response analysis of elastic-plastic thin circular plates under impulse loading with consideration of large deflection[J]. Explosion and Shock Waves, 2000, 20(4):379—384.
- [10] 于政文. 简支方板在弹性基础上的塑性动力响应[J]. 爆炸与冲击, 1997, 17(4):347—352.  
YU Zheng-wen. Dynamic plastic response of simple square plate on the elastic foundation[J]. Explosion and Shock Waves, 1997, 17(4):347—352.
- [11] 杨桂通. 塑性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000:146—220.
- [12] Ma G W, Iwasaki S, Miyamoto Y, et al. Dynamic plastic behavior of circular plate using unified yield criterion[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36:3257—3275.
- [13] Yu M H, He L N. A new model and theory on yield and failure of materials under complex stress problems[A]. Mechanical Behavior of Materials-6[C]. Oxford: Pergamon Press, 1991: 841—846.
- [14] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998:254—288.

## Unified solutions of dynamic plastic response for circular plate under impulsive Load

WANG Yan-bin<sup>1,2\*</sup>, YU Mao-hong<sup>1</sup>, XIAO Yun<sup>3</sup>, LI Lin-sheng<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University,

Xi'an 710049, Shaanxi, China;

2. Northwest China Electric Power Test and Research Institute, Xi'an 710054, Shaanxi, China;

3. China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

**Abstract:** The dynamic response of a simply supported circular plate under moderate impulsive loading is solved with the unified strength theory. The unified dynamic plastic limit load, internal stress field, and velocity field are obtained together with the upper and the lower bound solutions. Both the static and the dynamic admissible conditions are discussed. The limit load, the internal stress field, and the velocity field are also obtained for static loading case. The solutions given in this paper are applicable to various materials with and without the SD effect (strength different in tension and compression). The solutions based on the Tresca, Von Mises, Mohr—Coulomb theories and the unified yield criterion are special cases of the unified solutions herein. It is shown that the influence of the tension—compression ratio and the strength parameter on the dynamic solution is more significant than on the static solution.

**Key words:** solid mechanics; dynamic plastic response; unified strength theory; simply supported circular plate; moderate impulsive loading

---

\* Corresponding author: WANG Yan-bin  
E-mail address: yanbinwang@21cn.com