

文章编号: 1001-1455(2004)01-0001-06

流体可压缩性对 Rayleigh-Taylor 不稳定性 影响机理分析*

秦承森, 王 裴

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

摘要: 在等熵方程为压力是密度的任意单值函数形式情况下, 分析了 R-T (Rayleigh-Taylor) 不稳定性中流体可压缩性的作用。在没有边界效应的条件下所作的分析表明: 在重力场作用下流体可压缩性形成的密度分布是 R-T 不稳定性中的致稳因素, 而扰动流体的膨胀(收缩)效应助长 R-T 不稳定性的发展; 上层重流体的可压缩性是稳定因素, 而下层轻流体的可压缩性是失稳因素。从扰动发展驱动力和扰动带动的等效质量两个方面对该结论的物理机制进行了分析。

关键词: 流体力学; Rayleigh-Taylor 不稳定性; 可压缩性; 流体; 致稳因素; 失稳因素

中图分类号: O357.41 国标学科代码: 130°2531 文献标志码: A

1 引 言

流体可压缩性对 R-T 不稳定性的作用一直是 R-T 不稳定研究中的热点课题, 分歧颇大, 尚无定论。

问题的复杂性在于初始状态不同、边界条件不同或状态方程形式不同, 流体可压缩性对 R-T 不稳定性的影响可能都不相同。而以往的研究均限于不同的状态方程形式, 且不可压缩流体系统的初始状态为均匀密度分布。因而得出流体可压缩性或者是致稳因素、或者是失稳因素的结论; 还有的作者得出了在状态方程的不同参数范围内, 可压缩性的作用是不同的这种不完全确定的结论^[1~8]。

有的研究中, 引入了上层流体的外边界为自由面的边界条件^[8]。众所周知, 上层流体外自由面对扰动是稳定的, 这种边界上的稳定因素对两层流体界面的扰动发展有抑制作用, 且随上层流体厚度的变薄而增强, 或者说, 这种抑制作用对长波扰动更强。因此, 在研究流体可压缩性对 R-T 不稳定性的作用时, 应该采用足够远的边界条件, 使之对 R-T 不稳定性不产生影响。而边界条件与可压缩性的综合作用应该作为一个单独研究的课题。本文采用无限远的上下边界条件, 在物理上表示所研究的上下流体层的厚度足够大, 在小扰动发展阶段(扰动幅度小于三分之一波长)完成前, 边界不影响界面 R-T 不稳定性的发展。

为了避免不同状态方程具体形式带来的特殊性, 本文中采用的色散关系适用于任何形式的等熵方程, 只要求等熵方程为压力是密度的单值函数。为了与不可压缩流体系统进行对比, 采用了与可压缩流体系统初态完全相同的密度分布作为不可压缩流体系统的初态。其中主要推导见文献[9], 本文是在文献[9]的基础上, 着重探讨流体可压缩性对 R-T 不稳定性影响的机理。

2 R-T 不稳定性

设初始时两层流体的交界面位于 $y=0$ 处, 密度为 $\rho_{10}(y)$ 的重流体“1”在密度为 $\rho_{20}(y)$ 的轻流体“2”上方, 重力加速度 g 指向 $-y$ 方向。以 c_i, ω, k 表示流体声速和扰动波数。

在文献[9]中, 针对任意形式的等熵方程, 给出了具有形式 $\eta(y)\exp(n_c t + ikx)$ 扰动色散关系的一

* 收稿日期: 2003-03-04; 修回日期: 2003-05-26

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(10135010)

作者简介: 秦承森(1941—), 男, 研究员, 博士生导师。

般表达式

$$n_c^2 = \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{\rho_{10}q_1 + \rho_{20}q_2}g \quad (1)$$

式中:

$$q_1 = - \left[\Phi_1 / \left[\frac{d\Phi_1}{dy} \right] \right]_{y=0}, \quad q_2 = \left[\Phi_2 / \left[\frac{d\Phi_2}{dy} \right] \right]_{y=0} \quad (2)$$

$\Phi_i(y)$ 满足方程

$$\frac{d^2\Phi_i}{dy^2} - \frac{g}{c_{i0}^2} \frac{d\Phi_i}{dy} - \left[k^2 + \frac{n_c^2}{c_{i0}^2} \right] \Phi_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

在声速缓变的条件下,可以给出(3)式的渐近解 $\Phi_i(y)$,从而得出

$$\begin{cases} \frac{1}{L_{c1}} = (q_1 k)^{-1} = -\frac{g}{2kc_{10}^2} + \sqrt{\left[\frac{g}{2kc_{10}^2} \right]^2 + 1 + \frac{n_c^2}{k^2 c_{10}^2}} \\ \frac{1}{L_{c2}} = (q_2 k)^{-1} = \frac{g}{2kc_{20}^2} + \sqrt{\left[\frac{g}{2kc_{20}^2} \right]^2 + 1 + \frac{n_c^2}{k^2 c_{20}^2}} \end{cases} \quad (4)$$

对于初始具有相同密度分布的不可压缩流体,由文献[10]可得其色散关系为

$$n_{in}^2 = \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{\rho_{10}Q_1 + \rho_{20}Q_2}gk^2 \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{L_{in1}} = Q_1 k^{-1} = -\frac{g}{2kc_{10}^2} + \sqrt{\left[\frac{g}{2kc_{10}^2} \right]^2 + 1 + \frac{g^2}{n_{in}^2 c_{10}^2}} \\ \frac{1}{L_{in2}} = Q_2 k^{-1} = \frac{g}{2kc_{20}^2} + \sqrt{\left[\frac{g}{2kc_{20}^2} \right]^2 + 1 + \frac{g^2}{n_{in}^2 c_{20}^2}} \end{cases} \quad (6)$$

式中:

$$Q_1 = - \left[\left[\frac{dW_1}{dy} \right] / W_1 \right]_{y=0}, \quad Q_2 = \left[\left[\frac{dW_2}{dy} \right] / W_2 \right]_{y=0} \quad (7)$$

W_i 满足方程

$$\frac{d^2W_i}{dy^2} - \frac{g}{c_{i0}^2} \frac{dW_i}{dy} - \left[k^2 + \frac{k^2 g^2}{n_{in}^2 c_{i0}^2} \right] W_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

3 短波近似下的色散关系展开式

在短波近似下, $k^{-1} \rightarrow 0$,将(1)式展开,可得

$$\frac{n_c^2}{gk} = \alpha_0 + \frac{\alpha_0(1 - \alpha_0^2)g}{4} \left[\frac{1}{c_{20}^2} - \frac{1}{c_{10}^2} \right] k^{-1} + \dots \quad (9)$$

将(5)式展开,得

$$\frac{n_{in}^2}{gk} = \alpha_0 - \frac{(1 - \alpha_0^2)g}{4} \left[\frac{1}{c_{20}^2} + \frac{1}{c_{10}^2} \right] k^{-1} + \dots \quad (10)$$

式中: $\alpha_0 = (\rho_{10} - \rho_{20}) / (\rho_{10} + \rho_{20})$ 。

略去高阶项,将(9)式与(10)式相减,可得

$$n_c^2 - n_{in}^2 = \frac{2\rho_{10}^2\rho_{20}^2g^2}{(\rho_{10} + \rho_{20})^3} \left[\frac{1}{\rho_{10}c_{10}^2} + \frac{1}{\rho_{20}c_{20}^2} \right] \quad (11)$$

引入绝热压缩系数 $\gamma = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_s = \frac{1}{\rho \cdot c^2}$,其中 ρ 、 p 、 s 分别表示密度、压力和熵。则(11)式可写为

$$n_c^2 - n_{in}^2 = \frac{2\rho_{10}^2\rho_{20}^2g^2}{(\rho_{10} + \rho_{20})^3} (\gamma_{10} + \gamma_{20}) > 0 \quad (12)$$

(12)式表明,可压缩流体界面扰动增长率高于同样初始密度的不可压缩系统的界面扰动增长率,其

原因是由于流体的等熵膨胀或压缩引起的。

在不可压缩流体公式(10)中,略去 k^{-1} 项,则 $n_{in}^2 = \alpha_0 g k$ 即为初始密度均匀分布条件下的界面扰动增长速率,因此,(10)式的第二项表示初始密度分布的作用。由于 $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} = -\frac{g}{c_0^2}$, (10)式可以写为

$$\frac{n_{in}^2}{gk} = \alpha_0 + \frac{1 - \alpha_0^2}{4} \left[\frac{1}{\rho_{10}} \frac{d\rho_{10}}{dy} + \frac{1}{\rho_{20}} \frac{d\rho_{20}}{dy} \right] k^{-1} + \dots \quad (13)$$

第二项表明,沿重力加速度方向(-y)增加的密度分布是稳定性因素。

综合(9)、(12)和(13)式,可以将(9)式的第二项分成两部分

$$\frac{\alpha_0(1 - \alpha_0^2)g}{4} \left[\frac{1}{c_{20}^2} - \frac{1}{c_{10}^2} \right] = \frac{1 - \alpha_0^2}{4} \left[\frac{1}{\rho_{10}} \frac{d\rho_{10}}{dy} + \frac{1}{\rho_{20}} \frac{d\rho_{20}}{dy} \right] + \frac{(1 - \alpha_0^2)^2 g}{8} (\rho_1 + \rho_2) (\gamma_{10} + \gamma_{20}) \quad (14)$$

(14)式十分清楚地显示,流体可压缩性对 R-T 不稳定性的影响是由两部分组成的:一部分是密度梯度的作用,另一部分是流体的膨胀(压缩)效应,两部分的作用效果恰好相反。

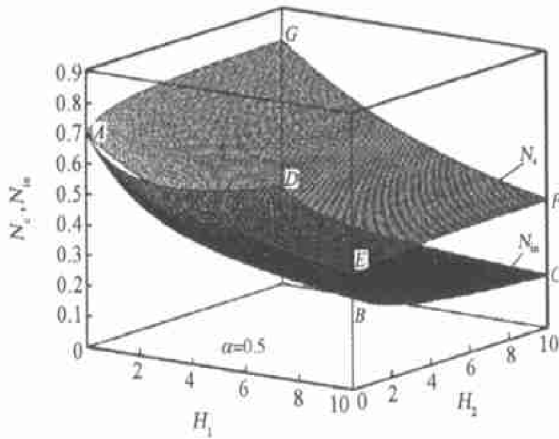
4 一般波长情况下的数值结果

第 3 节中的结论是在短波近似条件下得到的,对于一般波长,结论是否成立,需要研究数值解。

将(1)式和(5)式量纲一化后,进行数值求解,其结果显示在图 1 中。其中

$$N_c^2 = \frac{n_c^2}{gk}, \quad N_{in}^2 = \frac{n_{in}^2}{gk}, \quad H_1 = \frac{g}{2kc_{10}^2}, \quad H_2 = \frac{g}{2kc_{20}^2}$$

显然, $N_{in}(0, 0, \alpha) = N_c(0, 0, \alpha)$, 它对应于初态密度均匀的不可压缩流体情况。 $N_{in}(H_1, H_2, \alpha) - N_{in}(0, 0, \alpha)$ 显示了流体初始密度不均匀性的影响。



坐标点	(H_1, H_2, N_{in})	坐标点	(H_1, H_2, N_c)
A	(0, 0, 0.707)	A	(0, 0, 0.707)
B	(10, 0, 0.322)	E	(10, 0, 0.390)
C	(10, 10, 0.176)	F	(10, 10, 0.425)
D	(0, 10, 0.325)	G	(0, 10, 0.804)

图 1 $N_c-H_1-H_2$ 和 $N_{in}-H_1-H_2$ 关系曲面图

Fig.1 The relationship of $N_c-H_1-H_2$ and $N_{in}-H_1-H_2$ surfaces

由此可见, $N_{in}(H_1, H_2, \alpha) \leq N_{in}(0, 0, \alpha)$, 表明沿重力方向增加的密度分布使扰动增长率减少,这个结论对于任何波长的扰动均适用。差值 $\Delta N \equiv N_c(H_1, H_2, \alpha) - N_{in}(H_1, H_2, \alpha)$ 反映的是流体可压缩性的膨胀(收缩)效应。对于除 $H_1=0, H_2=0$ 点的任何 H_1, H_2 值,均有 $\Delta N > 0$, 这表明:对任何波长,流体的膨胀(收缩)效应均是助长扰动发展的因素。

5 关于可压缩性作用的讨论

5.1 界面扰动发展方程

色散关系(1)式等价于运动方程

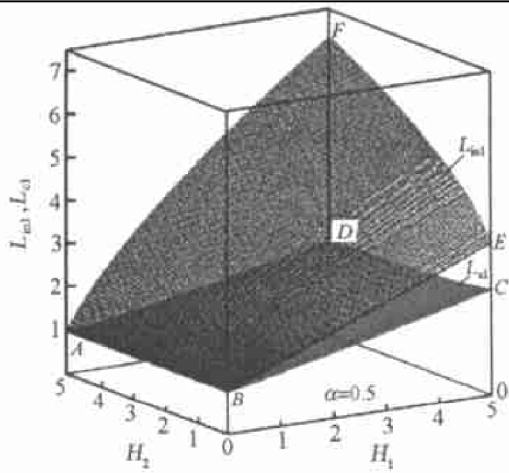
$$(\rho_{10}q_1 + \rho_{20}q_2)\ddot{\eta} = (\rho_{10} - \rho_{20})g\eta \quad (15)$$

将方程乘以界面单位面积,则 η 表示单位面积上扰动幅度为 η 的流体体积,于是方程右侧为作用于单位界面扰动体积上的力,方程左侧 $\ddot{\eta}$ 为界面扰动加速度, $(\rho_{10}q_1 + \rho_{20}q_2)$ 为扰动界面单位面积上所驱动的(深度分别为 q_1, q_2)等效质量。显然,扰动所驱动的质量越大,扰动增长的加速度越小。事实上,由 q_1, q_2 的定义可直接得出

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{10} \exp\left[-\int_0^y q_1^{-1} dy\right] & y \geq 0 \\ \Phi_2 = \Phi_{20} \exp\left[\int_0^y q_2^{-1} dy\right] & y < 0 \end{cases} \quad (16)$$

可见, $L_i = q_i k$ 是扰动在流体中衰减的量纲一特征长度, 也是扰动力所需要驱动的流体深度或(单位面积上的)体积。

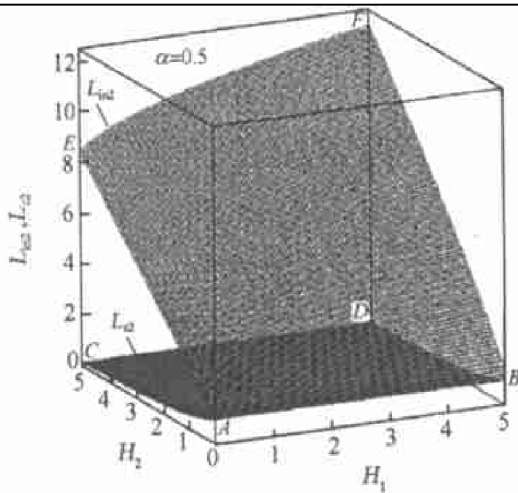
同理, 由(6)式和(7)式可知, 对于不可压缩流体, 扰动力所需驱动的体积为 L_{in1} 和 L_{in2} 。图2、图3比较了 L_{ci} 与 L_{ini} ($i=1, 2$), 可以看出, 总有 $L_{ci} < L_{ini}$, 即在扰动发展过程中, 可压缩流体所需驱动的体积总是比不可压缩流体的小。也就是可压缩流体所需驱动的质量比不可压缩流体的少。这使得可压缩流体扰动增长的加速度比相应的不可压缩流体的加速度要大。



坐标点	(H_1, H_2, L_{c1})	坐标点	(H_1, H_2, L_{in1})
A	(0, 5, 1.000)	A	(0, 5, 1.000)
B	(0, 0, 1.000)	B	(0, 0, 1.000)
C	(5, 0, 2.457)	E	(5, 0, 3.556)
D	(5, 5, 2.210)	F	(5, 5, 6.899)

图2 $L_{in1}-H_1-H_2$ 和 $L_{c1}-H_1-H_2$ 关系曲面图

Fig.2 The relationship of $L_{in1}-H_1-H_2$ and $L_{c1}-H_1-H_2$ surfaces



坐标点	(H_1, H_2, L_{c2})	坐标点	(H_1, H_2, L_{in2})
A	(0, 0, 1.000)	A	(0, 0, 1.000)
B	(5, 0, 1.000)	B	(5, 0, 1.000)
C	(0, 5, 0.175)	E	(0, 5, 8.480)
D	(5, 5, 0.183)	F	(5, 5, 11.899)

图3 $L_{in2}-H_1-H_2$ 和 $L_{c2}-H_1-H_2$ 关系曲面图

Fig.3 The relationship of $L_{in2}-H_1-H_2$ and $L_{c2}-H_1-H_2$ surfaces

5.2 界面失稳驱动力

流体失稳后, 进入新的位置, 其浮力与重力之差即为界面不稳定性的驱动力。从这个角度分析可压缩性的作用。

界面扰动示意图如图4所示。在小扰动发展初期, 单膜扰动界面形状对于初始界面 $y=0$ 是对称

的。作为界面失稳驱动力的初步分析,不妨取位置对称点的单位体积流体作为研究对象。进入 $y < 0$ 区的流体“1”,位于 $y = -\xi$; 而进入 $y > 0$ 区的流体“2”的体元位于 $y = \xi$ 。

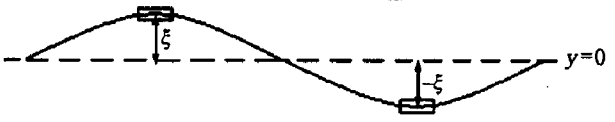


图 4 界面扰动示意图

Fig. 4 Sketch map of interface perturbation

单位体积流体在偏离 $y = 0$ 位置时,产生的力为 $(\rho_1(y) - \rho_2(y))g$ 。假设流体是不可压缩的,则进入新位置的流体的密度不发生变化,设流体“1”进入到流体“2”中,则 $\rho_1(-\xi) = \rho_{10}(0)$, 而位于 $y = -\xi$ 处,流体“2”的密度将由于其密度分布而含有 $\rho_{20}(0) - \left[\frac{d\rho_{20}}{dy} \right]_0 \xi$, 于是,界面不稳定性的驱动力为

$$(\rho_1 - \rho_2)g = \left[\rho_{10} - \rho_{20} + \frac{d\rho_{20}}{dy}\xi \right]g$$

而 $\frac{d\rho_{20}}{dy} = -\frac{\rho_{20}g}{c_{20}^2}$, 故

$$(\rho_1 - \rho_2)g = (\rho_{10} - \rho_{20})g - \frac{\rho_{20}}{c_{20}^2}g^2\xi$$

同样,流体“2”进入流体“1”中,处于 $y = \xi$ 位置 ($\xi > 0$), 则有

$$(\rho_1 - \rho_2)g = (\rho_{10} - \rho_{20})g - \frac{\rho_{10}}{c_{10}^2}g^2\xi$$

于是,由于密度分布而引起的驱动力的变化为

$$-\left[\frac{\rho_{10}\xi}{c_{10}^2} + \frac{\rho_{20}\xi}{c_{20}^2} \right]g^2 < 0 \quad (17)$$

可知,由于密度分布的作用,使界面失稳的驱动力减小。

在可压缩流体情况下,可压缩性使流体密度在新位置发生了变化。在重流体“1”进入轻流体“2”中时,由于压力增加,使流体“1”的体积压缩,于是在新位置 $y = -\xi$ 处的流体“1”密度增加一个量: $-\frac{d\rho_{10}}{dp} \left[\frac{dp}{dy} \right]_{20} \xi = \frac{g}{c_{10}^2} \rho_{20} \xi$, 这使向下的重力增加,从而增加了流体“1”向下运动的驱动力,加剧界面失稳。

同样,当轻流体“2”进入重流体“1”中时,由于压力减小,使流体“2”的体积膨胀,于是在新位置 $y = \xi$ 处流体“2”密度减少一个量: $-\frac{d\rho_{20}}{dp} \left[\frac{dp}{dy} \right]_{10} \xi = \frac{g}{c_{20}^2} \rho_{10} \xi$, 这个量使向下的重力减小,从而增加流体“2”进入流体“1”向上运动的驱动力,加速扰动发展。于是,由于可压缩流体的膨胀压缩效应,增加的 R-T 不稳定性的驱动力为

$$F = \left[\frac{\rho_{10}}{c_{20}^2} + \frac{\rho_{20}}{c_{10}^2} \right]g^2\xi \quad (18)$$

综上所述,在可压缩流体情况下,位于 $y = \xi$, $y = -\xi$ 扰动流体元增加的界面失稳驱动力

$$F = -\left[\frac{\rho_{10}\xi}{c_{10}^2} + \frac{\rho_{20}\xi}{c_{20}^2} \right]g^2 + \left[\frac{\rho_{10}\xi}{c_{20}^2} + \frac{\rho_{20}\xi}{c_{10}^2} \right]g^2 \quad (19)$$

式中:等号右边第一项为密度分布的贡献,是稳定性因素;第二项是可压缩性膨胀压缩作用,是失稳因素,也可以将(19)式整理为

$$F = \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{c_{20}^2} \xi g^2 - \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{c_{10}^2} \xi g^2 \quad (20)$$

这个表达式表明,流体“1”的可压缩性综合效应是稳定性因素,这是因为流体“1”的密度分布致稳作用贡献 $\frac{\rho_{10}\xi g^2}{c_{10}^2}$ 比其压缩的失稳作用 $\frac{\rho_{20}\xi g^2}{c_{10}^2}$ 大。相反,流体“2”的可压缩性的综合效果是失稳作用。

6 结 论

(1) 流体可压缩性体现在两个方面:一是流体在重力场作用下形成的密度分布;二是在扰动发展

过程中,流体的膨胀(压缩)。可压缩流体形成的密度分布,是 R-T 不稳定性中的致稳因素;可压缩流体扰动过程中的膨胀(压缩)效应是助长扰动发展的因素。

(2)上层重流体可压缩性的综合作用效果是致稳作用,因为密度分布的作用是主要的。下层轻流体可压缩性的综合作用效果是加速扰动发展,流体的膨胀起主要作用。流体可压缩性对 R-T 不稳定性的作用是以上两个因素(密度分布与扰动流体的压缩膨胀)在相反方向上作用的综合效果。可压缩性的作用大小,取决于两种流体的相对可压缩性。

(3)若不考虑边界效应,由于扰动流体的膨胀压缩效应是助长扰动发展的因素。因此,与具有相同密度分布的不可压缩流体系统相比,可压缩流体系统的 R-T 不稳定性发展总是快的。

参考文献:

- [1] Mathews W G, Blumenthal G R. Rayleigh-Taylor stability of compressible and incompressible radiation-supported surfaces and slabs; Application to QSO clouds[J]. *Astrophys*, 1977, 10: 1214.
- [2] Scannapieco A J. Atmospheric type mode in laser fusion targets[J]. *Phys Fluids*, 1981, 24: 1699.
- [3] Newcomb W A. Compressibility effect on instability growth rates[J]. *Phys Fluids*, 1983, 26: 950.
- [4] Baker L. Analytic theory of ablator layer instability[J]. *Phys Fluids*, 1983, 26: 3246.
- [5] Nayfeh A H. Perturbation methods[M]. New York: Wiley, 1973.
- [6] Bemstein I B, Book D L. Effect of compressibility on the Rayleigh-Taylor instability[J]. *Phys Fluids*, 1983, 26: 453.
- [7] Plesset M S, Hsich Y Y. General analysis of the stability of superposed fluids[J]. *Phys Fluids*, 1964, 7: 1099.
- [8] Lezzi A M, Prosperetti A. Rayleigh-Taylor instability for adiabatically stratified fluids[J]. *Phys Fluids A*, 1989, 1(11): 1784.
- [9] 秦承森,张凤国,李勇.可压缩性对 Rayleigh-Taylor 不稳定性的影响[J].*爆炸与冲击*, 2001, 21(3): 193-197.
QIN Cheng-sen, ZHANG Feng-guo, LI Yong. Compressibility effect on Rayleigh-Taylor instability [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2001, 21(3): 193-197.
- [10] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydro magnetic stability[M]. Oxford, England: Oxford University Press, 1961: 435.

The role of fluid compressibility in Rayleigh-Taylor instability

QIN Cheng-sen^{*}, WANG Pei

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*)

Abstract: The role of fluid compressibility in Rayleigh-Taylor instability is studied when the state equation of compressible fluid is an arbitrary function of density and pressure. The analyses without boundary effect shows that the density distributing induced by the gravity is a stable factor, while the fluid expanding and compressing effect is an instable factor. The compressibility of upper heavier fluid is a stable factor, while the compressibility of lower lighter fluid is an instable factor. The physical mechanism of this conclusion is explained by the force which driving perturbation development and the equivalent mass driven by perturbation.

Key words: fluid mechanics; Rayleigh-Taylor instability; compressibility; fluid; stable factor; instable factor

* Corresponding author; QIN Cheng-sen;

E-mail address: li-yong@mail.iapcm.ac.cn; Telephone: 010-62014411-2654