

文章编号: 1001-1455(2004)04-0289-10

含损伤材料的热粘塑性本构关系及其应用^{*}

李永池, 谭福利, 姚磊, 胡秀章

(中国科学技术大学力学和机械工程系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 对含损伤材料的热粘塑性本构关系进行了较全面和较系统的研究。首先对“半径回归方法”的本构公式给出了最一般性的严格证明, 并讨论了其适用性和局限性。接着以应力空间中的屈服函数和 Drucker 公设为基础, 以材料本构关系的内变量理论为工具, 推导并建立了增量型热粘塑性本构关系的普适形式和计算流程。然后结合实践中最常用的几类本构模型, 导出了所建立的增量型动态本构关系的具体形式, 并简要总结了其各自的特点和意义。最后通过一些典型的波传播和高速冲击问题的算例, 介绍了所建立的本构关系及计算方法的具体应用情况和效果, 从而展示了其理论意义和应用前景。

关键词: 材料力学; 本构关系; 计算; 热粘塑性材料; 损伤

中图分类号: O348 国标学科代码: 430·1010 文献标志码: A

1 引言

材料的塑性和粘塑性本构关系研究始终是理论和应用力学领域的重要研究课题。随着计算机技术和现代计算力学的兴起, 其本构关系的研究又与其本构计算流程的研究紧密结合起来。自从 D. C. Drucker^[1]和 A. A. Ильюшин^[2]奠定了近代塑性理论的基础以来, 国内王仁、黄克智、王自强、黄筑平、俞茂鑫等^[3~7]又相继开展了许多有价值的工作, 作者^[8~11]也曾将本构理论和动态数值计算相结合在材料塑性本构的基本框架、普适表述和计算流程等方面开展了一些工作, 与前人相比, 其特点主要是提出了内变量硬(软)化、温度软化和损伤软化相互影响的多耦合热塑性本构关系和计算流程。在涉及时率效应的材料粘塑性本构行为方面, 虽然迄今为止人们已提出了超应力模型、拟线性模型、无屈服粘塑性模型(确切地说应称为随遇屈服模型)和基于位错动力学和热激活理论的各种模型^[12~15], 但与动力学问题的应用相结合、涉及多因素耦合效应并与计算流程相结合的研究工作却并不多见。而且在迄今为止的绝大多数国内外数值软件中, 其本构计算方法多采用所谓的“半径回归方法”, 这一方法的计算公式是人们最初在冲击动力学计算中对理想塑性的 Mises 材料提出并进行了证明的, 以后便被推广到有多种硬(软)化因素的本构计算中, 但并未给出一般的证明和适用性的详细证明。

本文中以冲击动力学中粘塑性本构计算的需要为背景, 首先对多耦合因素粘塑性本构计算的“半径回归方法”进行了严格证明, 并讨论了其适用性和局限性; 接着给出了含损伤热粘塑性本构关系的严格的增量型计算公式, 并对几种常用模型下的表现形式和特点进行了简单讨论; 最后应用所提出的本构关系和计算公式, 对若干冲击动力学问题进行了数值模拟, 说明了所提计算方法的有效性。

2 “半径回归法”的本构计算公式

在国内外各类高速冲击动力学数值软件中, 广泛采用广义的 Mises 屈服准则和相应的“半径回归法”本构计算公式。但是人们只是对无率效应、无热效应、无损伤、无硬化的理想塑性的情况给出了证明, 并将之应用于一般情况。以下给出其在一般情况下的证明。

* 收稿日期: 2003-08-22; 修回日期: 2004-04-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(10272097); 国家 863 强辐射重点实验室基金项目(20010501);

863 青年基金项目

作者简介: 李永池(1941—), 男, 教授, 博士生导师。

常用的广义 Mises 屈服准则可写为

$$\bar{\sigma} = f(p, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, D, T), \quad \bar{\sigma} - f(p, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, D, T) \equiv \Phi(p, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, D, T) = 0 \quad (1)$$

式中:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}, \quad \bar{\epsilon} = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} dt, \quad \dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad (2)$$

分别为等效应力、等效塑性应变累积量(内变量)、等效塑性应变率, D 为损伤, T 为温度, p 为平均压力, σ 为表观应力, \mathbf{s} 为偏应力。精确的本构计算需要由微过程的增量应变分别求出弹性和塑性的增量应变 $d\epsilon^e$ 和 $d\epsilon^p$, 进而求出增量应力 $d\sigma$ 以及 dD 、 dT 等参量(参见第 3 节)。但当弹性增量应变与塑性增量应变相比很小而可以忽略时, 则可有

$$\dot{\bar{\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}}, \quad \bar{\epsilon}^p \approx \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}} dt \quad (3)$$

而 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 是可由速度场算出的, 故新时刻 $t+dt$ 的 $\dot{\bar{\epsilon}}(t+dt)$ 和 $\bar{\epsilon}(t+dt) = \bar{\epsilon}(t) + \dot{\bar{\epsilon}}dt$ 也可由速度场算出; 忽略弹性变形影响时, 也可直接由损伤演化方程和温升方程算出 $D(t+dt)$ 和 $T(t+dt)$ (参见第 3 节), $p(t+dt)$ 则可由状态方程算出。故新时刻 $t+dt$ 时刻的等效应力 $\bar{\sigma}(t+dt)$ 即可算出。分别以 $d\mathbf{s}$ 和 $d\mathbf{s}^*$ 记 dt 时段内的真实偏应力增量和按弹性变载所算出的偏应力增量, 则有

$$d\mathbf{s} = 2G(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p) = 2G(d\mathbf{e} - 3d\lambda \mathbf{s}^0), \quad d\mathbf{s}^* = 2Gd\mathbf{e} \quad (4)$$

式中: G 为剪切模量, $d\lambda$ 为塑性流动因子, $d\mathbf{e}$ 和 $d\mathbf{e}^p$ 分别为增量偏应变和增量塑性偏应变, \mathbf{s}^0 为 t 时刻的偏应力, 而(4)式第一式利用了正交法则和屈服准则(1)。而由 t 时刻的起始状态 \mathbf{s}^0 经 dt 到达 $t+dt$ 时刻的新真实应力状态 \mathbf{s} 和按弹性变载而算得的尝试应力状态 \mathbf{s}^* 将分别为

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^0 + 2G(d\mathbf{e} - 3d\lambda \mathbf{s}^0), \quad \mathbf{s}^* = \mathbf{s}^0 + d\mathbf{s}^* \quad (5)$$

故有

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^0 + d\mathbf{s}^* - 6Gd\lambda \mathbf{s}^0 = \mathbf{s}^* - 6Gd\lambda \mathbf{s}^0 = \mathbf{s}^* - 6Gd\lambda(\mathbf{s}^* - d\mathbf{s}^*) \quad (6)$$

当忽略二阶小量时, (6)式即可写为

$$\mathbf{s} = (1 - 6Gd\lambda)\mathbf{s}^* \quad (7)$$

公式(7)说明: $t+dt$ 时的真实应力状态 $\mathbf{s}(t+dt)$ 和按弹性变载尝试算得的应力状态 $\mathbf{s}^*(t+dt)$ 共线。由此可得, $t+dt$ 时的真实等效屈服应力 $\bar{\sigma}(t+dt)$ 为

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{3}{2} (1 - 6Gd\lambda)^2 \mathbf{s}^* : \mathbf{s}^* = (1 - 6Gd\lambda)^2 \sigma^{*2}, \\ 1 - 6Gd\lambda = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^*} \end{cases} \quad (8)$$

式中

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^* : \mathbf{s}^*} \quad (9)$$

是由按弹性本构关系算出的尝试应力状态 $\mathbf{s}^*(t+dt)$ 所对应的 $t+dt$ 时的尝试等效屈服应力。将(8)式代入(7)式即得半径回归法的偏应力计算公式

$$\mathbf{s} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^*} \mathbf{s}^* \quad (10)$$

由(8)式可见, 当 $\sigma^* > \bar{\sigma}$ 时, 必有 $d\lambda > 0$, 表明有塑性流动发生, 应按公式(10)将尝试应力 \mathbf{s}^* 拉到屈服面上的真实应力状态 \mathbf{s} ; 当 $\sigma^* \leq \bar{\sigma}$ 时, $d\lambda \leq 0$, 表明无塑性流动发生, 微过程确为弹性变载过程, 弹性尝试应力 \mathbf{s}^* 即是正确结果, 故半径回归法计算公式(10)应改写为

$$\mathbf{s} = \begin{cases} \mathbf{s}^* & \sigma^* \leq \bar{\sigma} \\ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^*} \mathbf{s}^* & \sigma^* > \bar{\sigma} \end{cases} \quad (11)$$

其计算流程可归结为: 在得出 $t+dt$ 时刻的速度场之后, 首先由(3)式近似算出新时刻的等效塑性应变

率 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 和等效(塑性)应变累积量 $\bar{\epsilon}$,由温升方程、损伤演化方程、状态方程算出新时刻的 T 、 D 和 p ,从而由公式(1)得出 $t+dt$ 时刻的等效屈服应力 $\bar{\sigma}$ 。再按弹性本构算出尝试偏应力 \mathbf{s}^* ,并由公式(9)算出尝试等效屈服应力 σ^* 。若 $\sigma^* \leq \bar{\sigma}$,则 $\mathbf{s} = \mathbf{s}^*$;若 $\sigma^* > \bar{\sigma}$,则 $\mathbf{s} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^*} \mathbf{s}^*$ 。

由以上讨论可以看出,半径回归法的本构计算是比较简洁的,但它有一定的局限性,这主要包括:首先它是一种近似的本构算法,而不是精确的本构计算公式,其适用条件是弹性变形较塑性变形很小而可以忽略,故对韧性材料的大变形冲击问题适用性较好;其次它只适用于所谓的广义 Mises 类的材料,即屈服准则由(1)式所表述的材料。下面给出一般的粘塑性本构计算公式。

3 普适的热粘塑性本构关系

以表观应力 σ 和温度 T 为外状态量,内变量 $\xi_\alpha (\alpha=1, 2, \dots, m)$ 和损伤 D 为内状态量,以应变率因子 $\zeta_\beta (\beta=1, 2, \dots, m)$ 为参数,应力空间中的时率相关屈服准则可表达为

$$\Phi(\sigma, \zeta_\beta, \xi_\alpha, D, T) = 0 \tag{12}$$

式中:内变量 ξ_α 反映微结构变化引起的材料变形的不可逆特性,它们的演化应该与材料的宏观不可逆塑性应变率 $\dot{\epsilon}^p$ 相关联,通常可假设它们是 $\dot{\epsilon}^p$ 的一阶齐次函数,即

$$\dot{\xi}_\alpha = g_\alpha(\sigma, \xi_\alpha, D, T, \dot{\epsilon}^p), \quad g_\alpha(\sigma, \xi_\alpha, D, T, a\dot{\epsilon}^p) = ag_\alpha(\sigma, \xi_\alpha, D, T, \dot{\epsilon}^p) \tag{13}$$

例如,塑性功 W^p 、塑性应变分量 ϵ_{ij}^p 、等效塑性应变累积量 $\bar{\epsilon}$ 按其定义

$$W^p = \int \sigma : \dot{\epsilon}^p dt, \quad \epsilon_{ij}^p = \int \dot{\epsilon}_{ij}^p dt, \quad \bar{\epsilon} = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} dt \tag{14}$$

都具有(13)式的性质,都可取为内变量。此外,为了简明起见,假设屈服准则具有率效应分离的形式,即

$$\Phi(\sigma, \zeta_\beta, \xi_\alpha, D, T) \equiv f(\sigma, \xi_\alpha, D, T) - \Gamma(\zeta_\beta) = 0 \tag{15a}$$

式中:应变率因子 ζ_β 也假设为塑性应变率张量 $\dot{\epsilon}^p$ 的一阶齐次函数

$$\dot{\zeta}_\beta = Y_\beta(\dot{\epsilon}^p), \quad Y_\beta(b\dot{\epsilon}^p) = bY_\beta(\dot{\epsilon}^p) \tag{16a}$$

例如,常用的等效塑性应变率 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 和塑性应变率张量的任何一个分量 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 也都具有(16a)式的性质

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \tag{17}$$

当应变率因子为常数时,正交法则是成立的,因此在忽略了应变率历史效应之后可认为对时率相关材料正交法则仍然是成立的。于是将正交法则

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{18}$$

代入(16a)式可得

$$\zeta_\beta = Y_\beta(\dot{\epsilon}^p) = \dot{\lambda} Y_\beta \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \tag{19}$$

由(15a)式和(19)式可得

$$f(\sigma, \xi_\alpha, D, T) - \Gamma \left[\dot{\lambda} Y_\beta \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \right] = 0 \tag{20}$$

由于 f 只是内外状态量 $(\sigma, \xi_\alpha, D, T)$ 的函数,故 $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ 也只是内外状态量 $(\sigma, \xi_\alpha, D, T)$ 的函数,因此(20)式事实上是一个确定塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 的隐式方程,对于给定的函数 f 、 Γ 和 Y_β 解此方程可得到 $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(\sigma, \xi_\alpha, D, T)$,它也只是状态量的函数。故(20)式事实上已说明粘塑性材料的塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 完全是由介质当时的内外状态量确定的。特别地,当 m 个应变率因子中只有某一个因子的影响最大而其他因子的影响可忽略不计时,记此因子为 ζ ,且不妨设(15a)式中的 $\Gamma(\zeta_\beta)$ 为 ζ ,则(15a)式和(16a)式分别成

为

$$\Phi(\sigma, \xi_\beta, \xi_\alpha, D, T) \equiv f(\sigma, \xi_\alpha, D, T) - \zeta = 0 \quad (15b)$$

$$\zeta = Y(\dot{\epsilon}^p), \quad Y(b \otimes \dot{\epsilon}^p) = bY(\dot{\epsilon}^p) \quad (16b)$$

则由(20)式可得

$$\dot{\lambda} = f(\sigma, \xi_\alpha, D, T) \Big/ \left[Y \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \equiv \dot{\lambda}(\sigma, \xi_\alpha, D, T) \quad (21)$$

(21)式即是塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 的显式表达式,它是完全由屈服准则中的函数 f 和应变率因子(16b)中的函数 Y 确定的,并且只是材料内外状态量 $(\sigma, \xi_\alpha, D, T)$ 的函数。求出 $\dot{\lambda}$ 之后,即可由正交法则及胡克定律求出塑性应变率 $\dot{\epsilon}^p$ 和应力率 $\dot{\sigma}$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \dot{\sigma} = \mathbf{E} : \dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{E} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = \mathbf{E} : \left[\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \quad (22)$$

式中: \mathbf{E} 为瞬态弹性模量。相应量的增量为

$$d\lambda = f(\sigma, \xi_\alpha, D, T) dt \Big/ \left[Y \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right], \quad d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad d\sigma = \mathbf{E} : (d\epsilon - d\epsilon^p) \quad (23)$$

这样就解决了由微过程 dt 中的 $d\epsilon$ 求解 $d\sigma$ 的问题,即本构计算的核心问题。

设材料的损伤演化方程和温升方程分别为(通常 \dot{D} 也是 $\dot{\epsilon}^p$ 的一次函数)

$$\dot{D} = F(\sigma, \xi_\alpha, D, T, \dot{\epsilon}^p), \quad \dot{T} = \frac{1}{\rho c} [-\text{div} \mathbf{h} + r + \alpha \otimes \sigma : \epsilon^p] \quad (24)$$

式中: c 、 \mathbf{h} 、 r 分别是比热、热流矢量和体热源供热率, α 为塑性功的热转换因子。 D 、 T 以及内变量 ξ_α 的增量将为

$$\begin{cases} dD = F(\sigma, \xi_\alpha, D, T, d\epsilon^p) \\ dT = \frac{1}{\rho c} [(-\text{div} \mathbf{h} + r)dt + \alpha \otimes \sigma : d\epsilon^p] \\ d\xi_\alpha = g_\alpha(\sigma, \xi_\alpha, D, T, d\epsilon^p) \end{cases} \quad (25)$$

本构计算流程归结如下: 设已知 t 时刻的内外状态量 $(\sigma, \xi_\alpha, D, T)$, 当算出 dt 间隔的增量应变 $d\epsilon$ 之后(这是由运动方程和连续方程完成的), 即可由(23)式算出 $d\lambda$ 、 $d\epsilon^p$ 和 $d\sigma$, 再由(25)式计算 dD 、 dT 、 $d\xi_\alpha$, 这样即得到了新时刻 $t+dt$ 的状态 $(\sigma, \xi_\alpha, D, T)$, 从而即可进入下一个循环。

4 几种常用的本构关系和计算公式

实践中很常见的情形是只有一个应变率因子 ζ 。当将之取为最常用的等效塑性应变率 $\dot{\bar{\epsilon}}$, 而且当(15a)式中的屈服函数 f 只是通过等效应力 $\bar{\sigma}$ 而依赖于 σ 时, 有

$$\begin{cases} f(\sigma, \xi_\alpha, D, T) = g(\bar{\sigma}, \xi_\alpha, D, T) \\ \zeta = Y(\dot{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p \end{cases} \quad (26)$$

则由(21)式给出

$$\dot{\lambda} = g \Big/ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} = g \Big/ \sqrt{\frac{2}{3}} g' \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} : g' \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \quad (27)$$

由于

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\bar{\sigma}} \end{cases} \quad (28)$$

故代入(27)式得到

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = g/g' \\ \dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2}g(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, D, T) \frac{s}{\bar{\sigma}} \end{cases} \quad (29)$$

式中: $g' = \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}}$ 。

特别地, 对 Bodner-Partom 模型, 屈服准则可表达为

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = Y^*(\bar{\epsilon}, D, T) \left[\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\epsilon}_0} \right]^{1/n} \\ \dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}}{Y^*(\bar{\epsilon}, D, T)} \right]^n \equiv g(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, D, T) \end{cases} \quad (30)$$

其物理意义是: 等效塑性应变率 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 是相对等效应力 $\frac{\bar{\sigma}}{Y^*}$ 的幂函数, Y^* 表示参考应变率 $\dot{\epsilon}_0$ 下的屈服应力。

而由(29)式给出

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{\bar{\sigma}}{n} \\ \dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} \right]^n \frac{s}{\bar{\sigma}} \end{cases} \quad (31)$$

值得注意的是, 对此种材料, 其塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 与 $\bar{\sigma}$ 成比例, 而与温度、内变量和损伤无关, 当然, 塑性应变增量是与温度、内变量和损伤有关的。

对 Johnson-Cook 模型, 屈服准则为

$$\bar{\sigma} = Y^*(\bar{\epsilon}, D, T) \left[1 + \beta \ln \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\epsilon}_0} \right], \quad \dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_0 \exp \left[\frac{1}{\beta} \left[\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} - 1 \right] \right] \equiv g(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, D, T) \quad (32)$$

其物理意义是: 等效塑性应变率 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 是相对超应力 $\left[\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} - 1 \right]$ 的指数函数。而由(29)式给出

$$\dot{\lambda} = \beta Y^*(\bar{\epsilon}, D, T), \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0 \exp \left[\frac{1}{\beta} \left[\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} - 1 \right] \right] \frac{s}{\bar{\sigma}} \quad (33)$$

值得注意的是, 对此种材料, 其塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 与应力状态无关, 而只是温度、内变量和损伤的函数, 且与其屈服应力 $Y^*(\bar{\epsilon}, D, T)$ 成比例, 当然, 塑性应变增量是与应力状态有关的。

对 Hill-Tsai 模型, 其屈服准则形式为

$$F_1 \equiv \frac{1}{R(\zeta)^2} \left[\frac{\sigma_{11}^2}{Y_{11}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_{22}^2} + \frac{\sigma_{33}^2}{Y_{33}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{Y_{12}^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{Y_{23}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{Y_{31}^2} + \bar{Y}_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + \bar{Y}_{22} \sigma_{33} \sigma_{11} + \bar{Y}_{33} \sigma_{11} \sigma_{22} \right] - 1 = 0 \quad (34)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{11} &= \frac{1}{Y_{11}^2} - \frac{1}{Y_{22}^2} - \frac{1}{Y_{33}^2}, & \bar{Y}_{22} &= \frac{1}{Y_{22}^2} - \frac{1}{Y_{33}^2} - \frac{1}{Y_{11}^2}, \\ \bar{Y}_{33} &= \frac{1}{Y_{33}^2} - \frac{1}{Y_{11}^2} - \frac{1}{Y_{22}^2}, & R(\zeta) &= 1 + \beta \ln \frac{\zeta}{\zeta_0} \end{aligned} \quad (35)$$

而

$$Y_{ij}^* = Y_{ij}(\epsilon^p, D, T) R(\zeta) \quad (36)$$

表示相应简单应力状态下的屈服应力。写为(15a)式的形式, 即

$$\Phi(\sigma, \zeta, \epsilon^p, D, T) = f(\sigma, \epsilon^p, D, T) - \zeta = \zeta_0 e^{\frac{1}{\beta}(\sqrt{F+1}-1)} - \zeta \equiv 0 \quad (37)$$

式中

$$F \equiv \frac{\sigma_{11}^2}{Y_{11}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_{22}^2} + \frac{\sigma_{33}^2}{Y_{33}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{Y_{12}^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{Y_{23}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{Y_{31}^2} + \bar{Y}_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + \bar{Y}_{22} \sigma_{33} \sigma_{11} + \bar{Y}_{33} \sigma_{11} \sigma_{22} - 1 \quad (38)$$

当取 $\dot{\zeta}$ 为等效塑性应变率时, 则由 (21) 式给出

$$\dot{\lambda} = 1 / \left[\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D} : \mathbf{D}} \eta \right] \quad (39)$$

式中

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{2\sigma_{11}}{Y_{11}^2} + \bar{Y}_{22}\sigma_{33} + \bar{Y}_{33}\sigma_{22}, & D_{22} = \frac{2\sigma_{22}}{Y_{22}^2} + \bar{Y}_{33}\sigma_{11} + \bar{Y}_{11}\sigma_{33}, \\ D_{33} = \frac{2\sigma_{33}}{Y_{33}^2} + \bar{Y}_{11}\sigma_{22} + \bar{Y}_{22}\sigma_{11}, & D_{12} = D_{21} = \frac{\sigma_{12}}{Y_{12}^2}, \\ D_{23} = D_{32} = \frac{\sigma_{32}}{Y_{32}^2}, & D_{31} = D_{13} = \frac{\sigma_{13}}{Y_{13}^2} \end{cases} \quad (40)$$

而

$$\eta = \frac{1}{2\beta \sqrt{F+1}} \quad (41)$$

5 应用算例

5.1 层裂问题^[16]

利用 Johnson-Cook 热粘塑性模型和对数流体型状态方程, 并利用本文中建立的本构计算方法分别对 D6AC 钢板对撞引起的一维层裂问题和铝合金在激光辐照下的二维层裂问题开展了数值模拟, 所用的损伤演化方程是一种基于细观统计和唯象分析所建立的损伤演化方程

$$\dot{D} = (1-D) \left[a \frac{D}{1-D} + \dot{N}_0 \nu_0 \right] \left[\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right]^\lambda - D \frac{\dot{v}}{v} \quad (42)$$

式中: a 和 $\dot{N}_0 \nu_0$ 分别为孔洞长大损伤因子和孔洞成核损伤因子, λ 为损伤的超应力指数因子, v 为比容。计算中的极限损伤为 D_c 。

图 1 给出了自由面速度时程曲线实验结果和计算结果的对比, 结果令人相当满意; 图 2 给出了层裂面附近材料变形和损伤破坏的图案, 结果也是比较合理的^[16]。

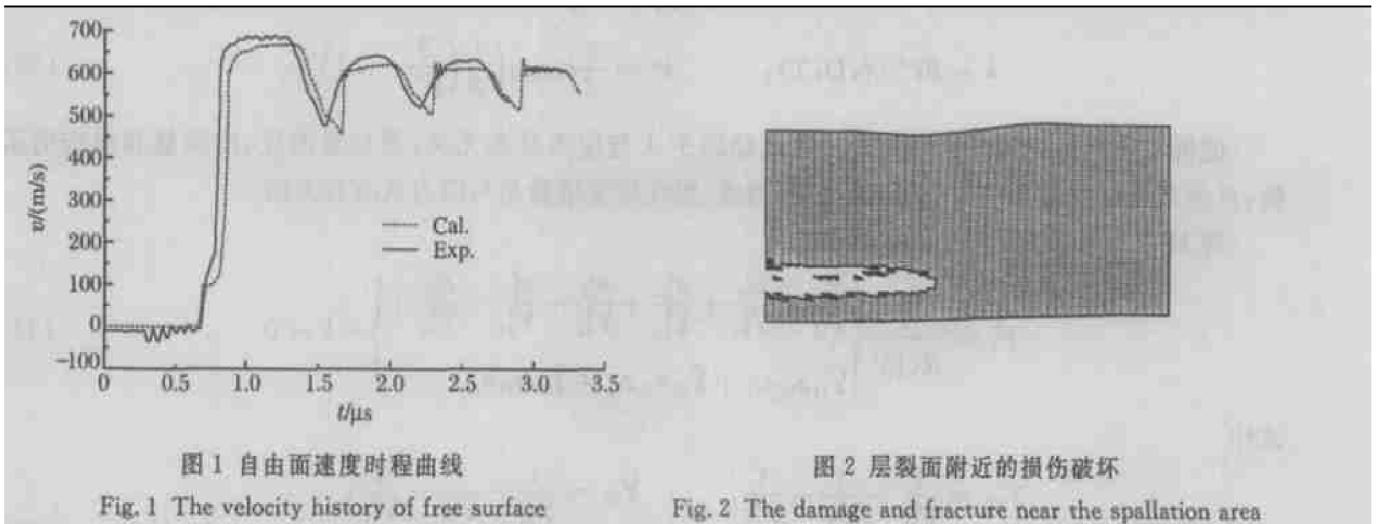


图 1 自由面速度时程曲线

Fig. 1 The velocity history of free surface

图 2 层裂面附近的损伤破坏

Fig. 2 The damage and fracture near the spallation area

5.2 混凝土抗侵彻问题^[17]

在忽略热效应的情况下, 利用 Murnagham 状态方程和 Johnson-Cook 本构模型, 并利用本文的本构计算方法对穿地弹对目标的侵彻过程进行了数值模拟, 采用了一种基于 I 型裂纹扩展的微裂纹型损伤演化方程

$$\dot{D} = (1 - \nu^2) \pi (\sigma^2 - \sigma_0^2) c_R D / (2 \lambda E) \quad (43)$$

式中: ν 、 c_R 、 λ 、 E 、 σ_0 分别为泊松比、材料表面波波速、单位面积表面能、杨氏模量和损伤门槛应力。

图 3 给出了几个典型时刻 ($t=0.0, 0.14, 0.28, 0.42\text{ms}$) 的侵彻图像, 初始弹速为 700m/s。由于计算中采用了损伤和等效塑性应变的双重开关作为单元破坏标志, 并引入了滑移面再定义技术, 所以侵彻图像与实验观察相当接近, 侵彻深度也与实验结果符合良好^[17]。

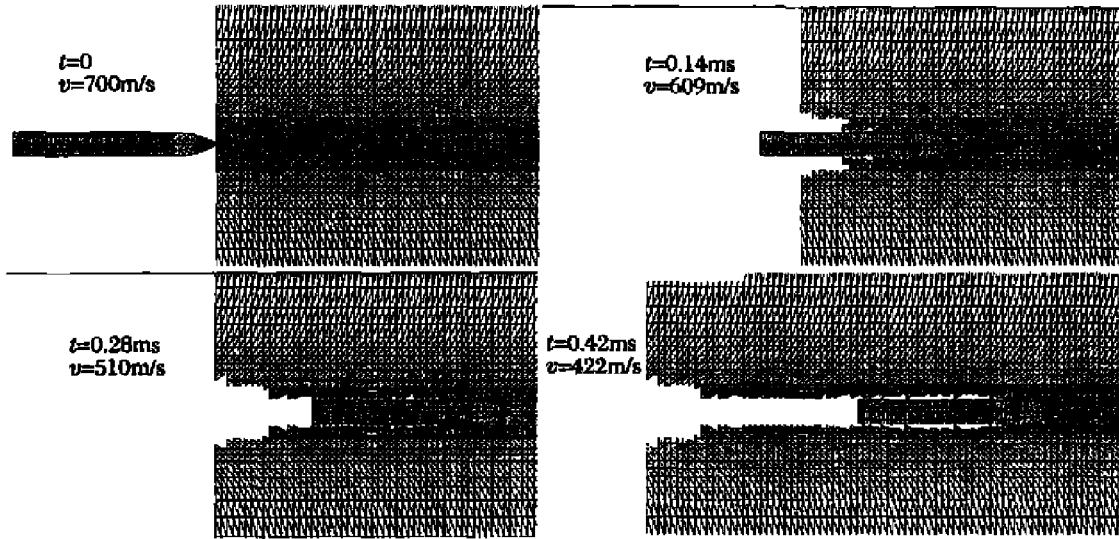


图 3 4 个典型时刻的侵入变形图

Fig.3 The penetration and deformation at 4 typical instants

5.3 SHPB 试件绝热剪切^[18]

图 4、图 5 和图 6 分别是对 SHPB 实验中圆台型钨合金试件角部绝热剪切损伤、等效塑性应变和温度的数值模拟结果,采用了一种绝热剪切型的损伤演化方程(第二类损伤)

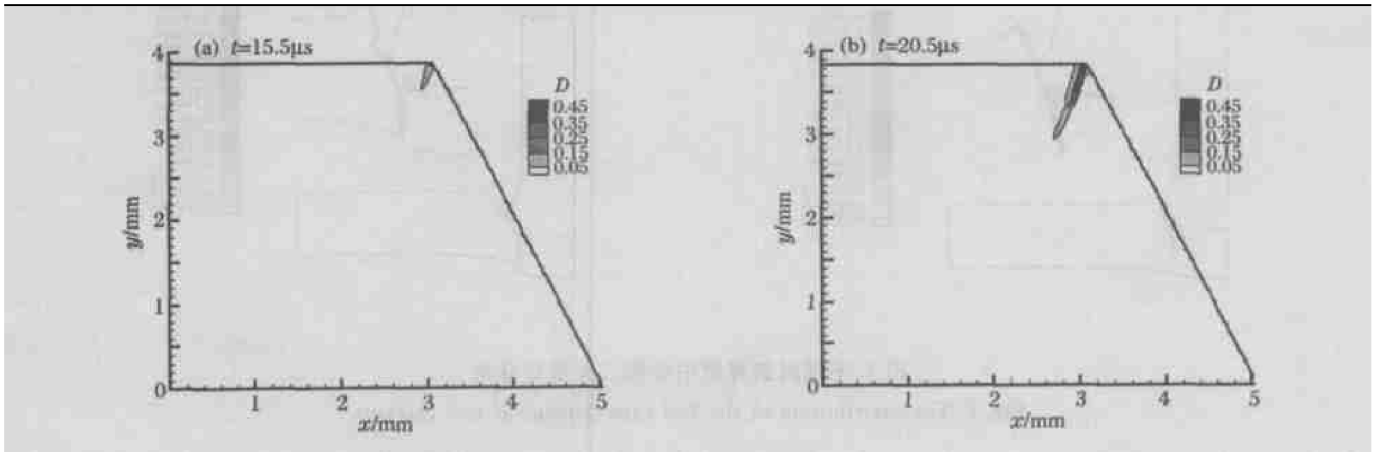


图 4 试件中损伤的分布

Fig.4 The damage distribution

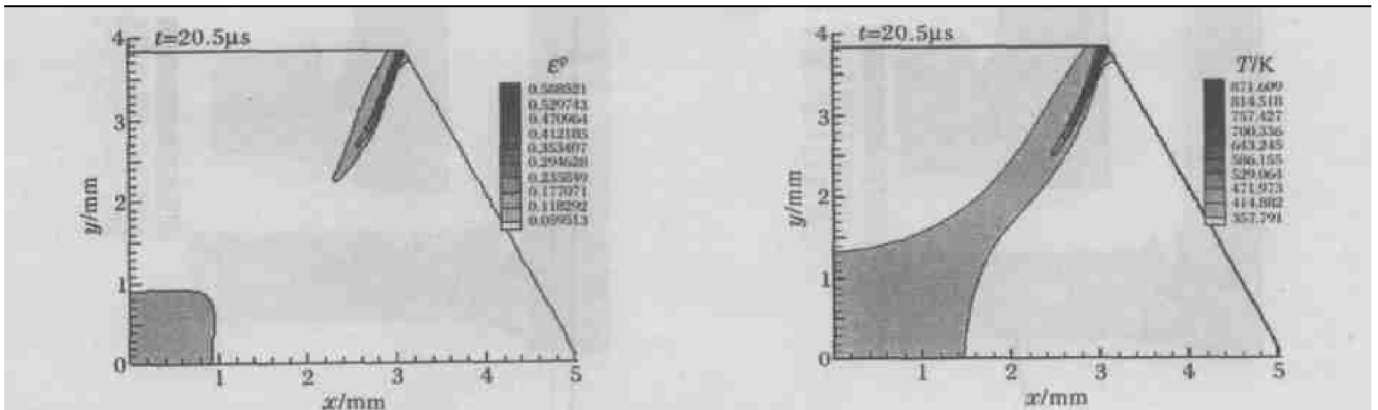


图 5 试件中有效塑性应变的分布

Fig.5 The effective plastic strain distribution

图 6 试件中温度的分布

Fig.6 The temperature distribution

$$\dot{D}_2 = \frac{\chi \dot{W}^p}{2\lambda} \left[\frac{3D_2}{4n} \right]^{1/3} - D_2 \frac{\dot{v}}{v} \tag{44}$$

式中： \dot{W}^p 、 n 、 χ 、 λ 分别为塑性功率、可激活微孔洞密度、塑性功的致损伤因子、单位面积表面能。

一般情况下，钨合金是绝热剪切不敏感的材料，但由于特殊形状试件引起的特殊变形机制和特殊应力状态，却可以导致变形局域化和绝热剪切带的出现，实验中观察到了这一现象，计算中也很好地揭示了这一现象。计算结果显示损伤区、等效塑性应变局域区、高温区、最大剪应力区（未画出）是基本一致的，它们都与绝热剪切带的发展一致^[18]。

5.4 平头弹冲塞^[18]

图 7 是钨弹高速侵彻装甲钢时，弹周绝热剪切带的发展以及冲塞过程的情况；图 8 中则给出了相应时刻弹靶中的温度场。计算中采用 Johnson-Cook 模型，而对损伤除采用绝热剪切型损伤演化方程(44)式以外，还引入了平均拉应力引起的所谓第一类损伤

$$\dot{D}_1 = \frac{3}{4} \frac{\sigma^2 - \sigma_0^2}{K\lambda} cD - D \frac{\dot{v}}{v} \tag{45}$$

式中： K 、 σ_0 、 λ 、 c 分别为体积模量、损伤门槛应力、单位面积表面能、体波波速。图 9 中给出了 D_1 的发展情况，它的发展似乎是自由面波的反射以及剪切带破坏出现后界面处波的反射所造成的“角裂”的早期信号^[18]。

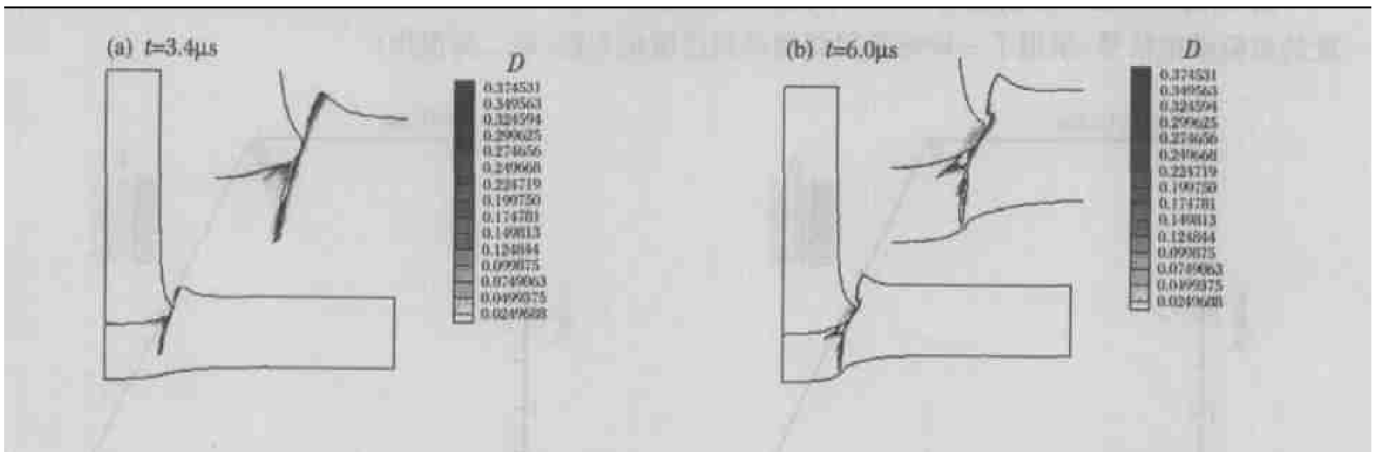


图 7 不同时刻弹靶中的第二类损伤分布

Fig.7 The distribution of the 2nd type damage at two instants

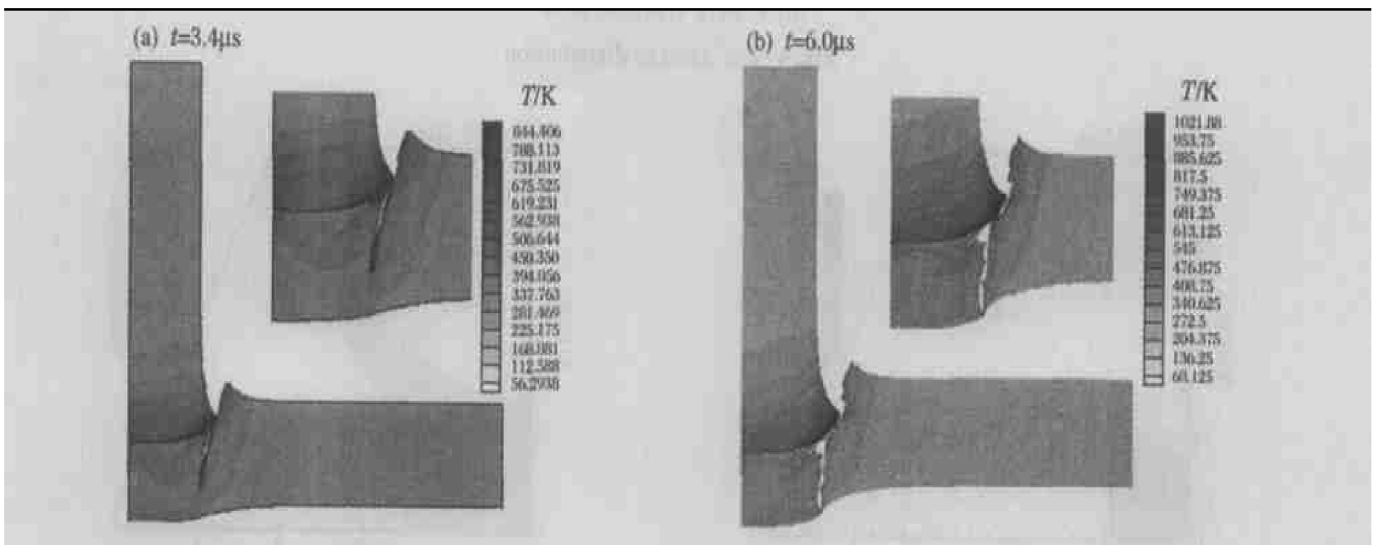


图 8 相应时刻弹靶中的温度场

Fig.8 The temperature field at two instants

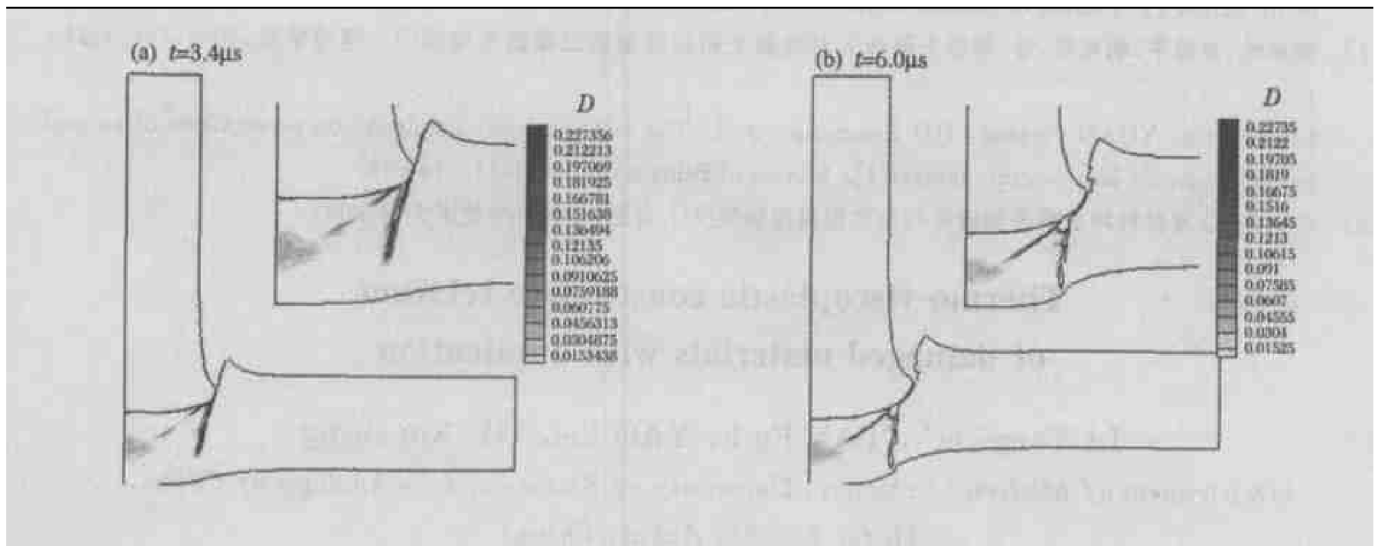


图9 不同时刻弹靶中的第一类损伤分布

Fig.9 The distribution of the 1st type damage at two instants

以上算例说明, 本文中所建立的含损伤的热粘塑性本构关系和计算流程是合理的和便于应用的。

参考文献:

- [1] Drucker D C. A more fundamental approach to plastic-stress-strain relations[A]. Proc 1st US Natl Congr Appl Mech [C]. New York: ASME, 1951:487-491.
- [2] ИЛЬЮ ШИН А А. 塑性[M]. 王振常, 译. 北京: 建筑工业出版社, 1958.
- [3] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论[M]. 修订版. 北京: 北京大学出版社, 1992.
- [4] 黄克智, 黄永刚. 固体本构关系[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [5] 殷有泉, 曲圣年. 弹塑性耦合和广义正交法则[J]. 力学学报, 1982(1):63-69.
YIN You-quan, QU Sheng-nian. Elastoplastic coupling and generalized normality rule[J]. Acta Mechanica Sinica, 1982(1):63-69.
- [6] 王自强. 理性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [7] 俞茂麟. 工程强度理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [8] 李永池, 唐之景, 胡秀章. 关于 Drucker 公设和塑性本构关系的进一步研究[J]. 中国科学技术大学学报, 1988, 18(3):339-345.
LI Yong-chi, TANG Zhi-jing, HU Xiu-zhang. Further study on the Drucker postulate and plastic constitutive relations [J]. Journal of China University of Science and Technology, 1988, 18(3):339-345.
- [9] Li Y C, Wang X J, Huang C Y. Further study on the constitutive relations in dynamic plasticity and the application to stress waves[A]. Research and Application in Dynamic Deformation and Fracture of Solids[M]. Hefei: Press of USTC, 1998:111-119.
- [10] 李永池, 王红五, 江松青, 等. 含损伤材料热塑性本构关系的普适表述[A]. 塑性力学和地球动力学进展(王仁院士八十寿辰庆贺文集)[C]. 北京: 万国学术出版社, 2000.
- [11] LI Yong-chi, GUO Yang, ZHU Lin-fa, et al. Thermoplastic constitutive relation suitable to dynamic problems in anisotropic and damaged materials[J]. The Chinese Journal of Mechanics, 2003, 19(1):69-72.
- [12] 杨桂通. 粘塑性本构关系[A]. 王仁, 黄克智, 朱兆祥. 塑性力学进展[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1988.
- [13] Perygna P. Fundamental problem in visco-plasticity[A]. Advances in Applied Mechanics[M]. 1966, 9.
- [14] Bodner S R, Partom Y. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain hardening materials[J]. Journal of Applied Mechanics, 1975, 42.
- [15] Cheng J Y, Nemat-Nasser Sia, Guo W. A unified constitutive model for strain-rate and temperature dependent behavior of molybdenum[J]. Mechanics of Materials, 2001, 33.
- [16] LI Yong-chi, TAN Fu-li, GUO Yang, et al. Determination of the damage evolution equation and spallation criterion of

metals[J]. Journal of Ningbo University (NSEE), 2003, 16(4): 443–447.

- [17] 李永池, 袁福平, 胡秀章, 等. 卵形头部弹丸对混凝土靶板侵彻的二维数值模拟[J]. 弹道学报, 2002, 14(1): 14–19.

LI Yong-chi, YUAN Fu-ping, HU Xiu-zhang, et al. The 2-D numerical simulation on penetrations of an oval-headed projectile into concrete targets[J]. Journal of Ballistics, 2002, 14(1): 14–19.

- [18] 朱林法. 金属材料冲击损伤和破坏行为数值模拟研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2003.

Thermo-viscoplastic constitutive relation of damaged materials with application

LI Yong-chi^{*}, TAN Fu-li, YAO Lei, HU Xiu-zhang

(*Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230027, Anhui, China*)

Abstract: This paper presents a general and systematic study on the thermo-viscoplastic constitutive relations of damaged materials. In the first part, the rigorous proof of the “radius-regression method” about constitutive calculation is given, and its suitability and limitation are discussed. In the second part, the universal form and computational routine of the incremental thermo-viscoplastic constitutive relation are established, based on the yield function in stress space and Drucker’s postulate and by means of the internal variables theory. In the third part, the concrete formula of some very important and useful constitutive forms are derived, and their characteristics and implications are discussed. In the fourth part, with some typical problems of stress wave propagation and impact dynamics as examples the applications and practical effects of our constitutive relation and computational method are shown, and their theoretic value and practical prospects are demonstrated.

Key words: mechanics of materials; constitutive relations; calculate; thermo-viscoplastic materials; damage

* Corresponding author: LI Yong-chi
E-mail address: ycli@ustc.edu.cn
Telephone: 0551-3606734