

文章编号: 1001-1455(2005)01-0001-04

爆轰驱动平板的抛射角方程*

秦承森, 刘义, 杭义洪, 王裴

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

摘要: 在运动坐标系中, 将材料视作不可压缩流体, 考虑流体微元间的相互挤压作用, 由动量方程出发, 推导出爆轰驱动二维平板过程中物质元的抛射角方程, 并讨论了方程的解与矢量三角形几何关系的等价性。

关键词: 爆炸力学; 抛射角方程; 不可压缩流体; 成型装药; 爆轰驱动

中图分类号: O381

国标学科代码: 130 · 3599

文献标志码: A

1 引言

在爆炸加工、爆炸焊接、成型装药爆轰驱动聚能罩及飞片的二维加速过程中, 物质元的速度大小和方向的变化十分重要。

许多学者研究过这一问题^[1~7], 并得到了一系列半经验及近似计算公式。G. T. Taylor^[1]于1941年提出的泰勒公式给出了抛板的极限速度和抛射角之间的关系并被广泛使用。P. C. Chou等^[3]对泰勒公式进行了改进, 运用指数加速模型导出了更精确的公式。

为了获得更精确的抛射角方程, 本文中考虑物质元之间的相互作用, 从不可压缩流体的动量方程出发, 推导出爆轰驱动二维平板过程中物质元的抛射角控制方程。

2 物理模型

平面二维情况下, 选静止坐标系 (x, y) , $y=0$ 为平板上表面, 平板厚度为 h 。 $y>0$ 区间为炸药, 平板的初始位置 $x=l_0$ 选为流体微元的拉格朗日坐标。平面爆轰波以CJ爆速 D_j 行进, 波阵面与平板交角为 ω , 则交点 O 沿平板前进的速度

$$U = D_j / \sin\omega \quad (1)$$

设爆轰波达 l_0 微元的时间为 T , 该微元 t 时刻在静止坐标系中的速度为 $\mathbf{V}(l_0, t)$, 它与平板表面垂线方向的夹角记为 $\theta(l_0, t)$, 称为该物质微元的抛射角。

选随 O 点运动且原点固定于 O 点的坐标系, 则在动坐标系中, 该微元的速度

$$\mathbf{q}(l_0, t) = \mathbf{V}(l_0, t) - \mathbf{U} \quad (2)$$

其矢量叠加图见图1的 $\triangle ABC$, 令 $\mathbf{q}(l_0, t)$ 与平板的夹角为 $\alpha(l_0, t)$, 将矢量关系式(2)的几何表示单独画出, 见图2。在不可压缩近似条件下, 当爆轰波扫过平板时, 平板速度 \mathbf{V} 从零开始, 抛射角也是从零开始。设爆轰波达到平板端点的时间取为时间零点 $t=0$, 取端点坐标 $x=0$, 即端点 $l_0=0$, 设爆轰波达到平板微元 l_0 的时刻为 T , 则 $T = l_0/U$ 。于是, l_0

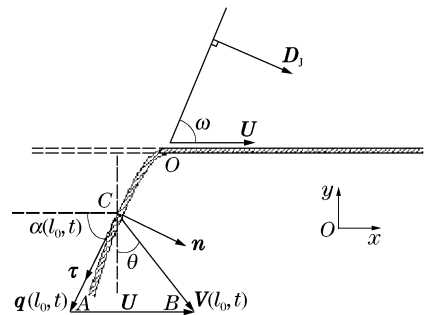


图1 爆轰驱动平板加速过程

Fig. 1 Acceleration process of the plate under detonation

* 收稿日期: 2004-04-27; 修回日期: 2004-08-26

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(10135010)

作者简介: 秦承森(1941—), 男, 研究员, 博士生导师。

微元起飞初态: $\theta(l_0, T) = 0, \alpha(l_0, T) = 0, V(l_0, T) = 0, q(l_0, T) = U, \mathbf{U} \equiv \overrightarrow{AB}$, 为常矢量, 位于图 2 中的 B 点。随着时间推移 $t - T > 0, l_0$ 微元速度矢量 $\mathbf{V} \equiv \overrightarrow{CB}$ 逐渐增大, α, θ 亦随之增长, $\triangle ABC$ 即为 t 时刻矢量 $\mathbf{V}, \mathbf{q}, \mathbf{U}$ 组成的三角形。

3 运动方程

在随 O 点运动的坐标系中, 选择流体微元运动轨迹的切向 $\boldsymbol{\tau}$ 和法向 \mathbf{n} 为坐标方向, 则微元 l_0 在时刻 t 的运动速度可写为 $\mathbf{q}(l_0, t) = q(l_0, t)\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ 为流体微元运动轨迹切向和法向单位向量。令 l 表示以 O 点为原点的沿 l_0 微元轨迹的坐标值, 一般 $l = l(l_0, t)$ 。在运动坐标系中, 微元动量方程可写为

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} \\ \frac{q^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \end{cases} \quad (3)$$

式中: $p = p(l, t), q = q(l, t), \frac{dq}{dt}$ 为物质导数, R 为流体微元运动轨迹的曲率半径。按定义有

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{q} \frac{d\alpha}{dt} \quad (4)$$

式中: ds 为微元 l_0 在 dt 时间内沿 l 移动的距离(亦可记为 $\delta l = ds$), 故 $q = ds/dt$ 。

假设平板的厚度 h 足够小, 且在运动过程中维持不变, 即 $h = h_0$ 。平板一侧为爆轰产物形成的压力 $p(l, t)$, 另一侧为真空, $p = 0$, 则有近似式

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{p(l_0, t)}{h_0} \quad (5)$$

注意到 l 坐标与 l_0 坐标的选取方向相反, 若初始长度为 dl_0 的微元, t 时刻长度为 $-dl$, 质量守恒为 $h_0 \rho_0 dl_0 = -h_0 \rho dl$, 在 $h \approx h_0$ 近似下, $\rho_0 dl_0 = -\rho dl$, 因此, 动量方程(3)可以写成拉氏形式

$$\begin{cases} \frac{\partial q(l_0, t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(l_0, t)}{\partial l_0} \\ \rho_0 h_0 q \frac{\partial \alpha}{\partial t} = p(l_0, t) \end{cases} \quad (6)$$

附加初值条件 $t = T, q(l_0, T) = U, \alpha(l_0, T) = 0, p(l_0, T) = p_1$, 其中 p_1 为 C-J 爆压。若给出 $p(l_0, t)$, 则由式(6)可以解出 $q(l_0, t), \alpha(l_0, t)$, 于是, $\theta(l_0, t), V(l_0, t)$ 亦可相继求出。

4 抛射角变化方程

当 l_0 微元从 $t = T$ 时刻开始运动后, 由于 $\mathbf{V}(l_0, t)$ 的变化, α, θ 亦随之改变。在上节, 在运动坐标系中, 给出微元的运动变化方程。本节给出 α, θ 的变化方程。

在矢量和 $\mathbf{q}(l_0, t) = \mathbf{V}(l_0, t) - \mathbf{U}$ 中, \mathbf{U} 为常矢量, 故有

$$\frac{\partial \mathbf{q}(l_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}(l_0, t)}{\partial t} \quad (7)$$

亦可写成欧拉形式

$$\frac{d\mathbf{q}(l, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{V}(l, t)}{dt} \quad (8)$$

由 $\mathbf{q}(l, t) = q(l, t)\boldsymbol{\tau}$, 有

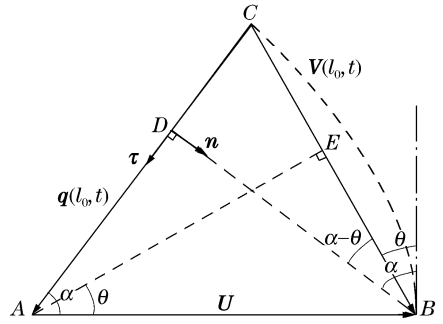


图 2 $\mathbf{q}(l_0, t) = \mathbf{V}(l_0, t) - \mathbf{U}$ 矢量三角形

Fig. 2 $\mathbf{q}(l_0, t) = \mathbf{V}(l_0, t) - \mathbf{U}$ vector triangle

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{dq}{dt}\boldsymbol{\tau} + q \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dq}{dt}\boldsymbol{\tau} + q \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{n} \tag{9}$$

式中： $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$ 。在矢量三角形(如图 2)中， $\vec{CA} = \mathbf{q}$ ， $\vec{CB} = \mathbf{V}$ ，将 \mathbf{V} 沿 $\boldsymbol{\tau}$ 、 \mathbf{n} 方向分解，有 $\mathbf{V} = V\sin(\alpha - \theta)\boldsymbol{\tau} + V\cos(\alpha - \theta)\mathbf{n}$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = & [\dot{V}\sin(\alpha - \theta) + V\cos(\alpha - \theta)(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) - V\cos(\alpha - \theta)\dot{\alpha}] \boldsymbol{\tau} + \\ & [\dot{V}\cos(\alpha - \theta) - V\sin(\alpha - \theta)(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) + V\sin(\alpha - \theta)\dot{\alpha}] \mathbf{n} \end{aligned} \tag{10}$$

式中： $\dot{V} \equiv \frac{dV}{dt}$ ， $\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{dt}$ ， $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} \equiv \frac{\partial\theta(l_0, t)}{\partial t}$ 。由式(8)、式(9)和式(10)给出

$$\begin{cases} \dot{q} = \dot{V}\sin(\alpha - \theta) - V\cos(\alpha - \theta)\dot{\theta} \\ q\dot{\alpha} = \dot{V}\cos(\alpha - \theta) + V\sin(\alpha - \theta)\dot{\theta} \end{cases} \tag{11}$$

式中： $\dot{q} \equiv \frac{dq(l, t)}{dt} \equiv \frac{\partial q(l_0, t)}{\partial t}$ 。式(6)亦可写为 $\dot{q} = h_0 \frac{\partial(q\dot{\alpha})}{\partial t}$ ，稍加变化给出关于 α 、 θ 、 q 的微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\dot{q}}{V} = \frac{\dot{V}}{V}\sin(\alpha - \theta) - \dot{\theta}\cos(\alpha - \theta) \\ \frac{\dot{V}}{q} = \frac{\dot{q}}{q}\sin(\alpha - \theta) + \dot{\alpha}\cos(\alpha - \theta) \\ \dot{q} = h_0 \frac{\partial(q\dot{\alpha})}{\partial t_0} \end{cases} \tag{12}$$

初始条件： $q(T) = U, V(T) = 0, \alpha(T) = \theta(T) = 0$ 。将前两式相加，并令 $X = \sin(\alpha - \theta)$ ，则方程组(12)化为

$$\dot{X} + \left(\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{q}}{q}\right)X = \frac{\dot{q}}{V} + \frac{\dot{V}}{q} \tag{13}$$

初始条件： $t = T, X(T) = 0$ 。使用方程(12)或方程(13)，可以研究抛射角 θ 及 α 的变化。若 $V(l_0, t)$ 已知，则由方程(12)可以求出 $\theta(l_0, t)$ 、 $q(l_0, t)$ 和 (l_0, t) ，简单地称方程(12)为抛射角方程。

5 抛射角方程解与几何关系的等价

假设 $V(l_0, t)$ 、 $q(l_0, t)$ 为已知，则由微分方程(13)可以解出 α 、 θ 、 q 、 V 之间的关系。

由于方程(13)是由 $\mathbf{q} = \mathbf{V} - \mathbf{U}$ 加上动量守恒导出的，因此，方程(13)的解既满足流体力学方程，又满足 $\triangle ABC$ 的所有几何关系，下面证明这一点。当 V 、 q 为已知时，方程(13)为一阶微分方程，其解为

$$X = \exp\left\{-\int\left(\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{q}}{q}\right)dt\right\} \left\{\int\left(\frac{\dot{V}}{q} + \frac{\dot{q}}{V}\right)\exp\left[\int\left(\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{q}}{q}\right)dt\right]dt + c\right\}$$

使用初始条件 $V(l_0, T) = 0, q(l_0, T) = U$ ，可得

$$\sin(\alpha - \theta) = \frac{q^2 + V^2 - U^2}{2qV} \tag{14}$$

注意到 $\sin(\alpha - \theta) = \cos\angle C$ ，则方程(14)为 $U^2 = q^2 + V^2 - 2qV\cos\angle C$ ，它就是余弦定理。因此，方程(13)的解与 $\triangle ABC$ 的几何关系是等价的，即正弦定理、正切定理均为方程(13)的解的形式。

6 讨论与结论

简短地讨论一下方程(6)和方程(12)的应用。

(1)如果假设作用于微元 l_0 的压力 $p(l_0, t)$ 与 l_0 无关，即 q 为常数且等于初值 U ，则求 α 的变化仅需解方程(6)中的第二式。若假设 $p = p(\alpha)$ ，则方程化为 $\rho_0 h_0 U \dot{\alpha} = p(\alpha)$ ，解此方程可得 α 的解，沿此途径，H. Richter^[2]给出了 α 的解。

(2)若令 $\dot{q}=0, q=U$, 并假设 V 为已知, 则方程(12)的解为 $\sin\theta = \frac{V}{2U}, \alpha = 2\theta, q = U$, 此为泰勒公式^[1], 可见泰勒公式是在 $\dot{q}=0$ 近似条件下方程(12)的解。

(3)在 $\dot{q}=0$, 及 $\alpha - \theta$ 是小量的假设下, 方程(12)可以化为 P. C. Chou^[3]求抛射角所使用的方程

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\dot{V}}{V} \tan(\alpha - \theta) \\ \dot{\alpha} = -\frac{\partial \dot{V}}{\partial l_0} \end{cases} \quad (15)$$

在更一般的条件下, 考虑微元间相互作用, 方程(6)和方程(12)可以给出使用条件更广的抛射角公式。

因此, 有如下结论: (1)在考虑平板微元间相互作用的条件下, 通过理论推导在运动坐标系下获得了微元运动方程及抛射角方程, 从而可以用来研究相互作用情况下抛射角的变化; (2)抛射角方程的解与矢量三角形的几何关系是等价的。

参考文献:

- [1] Taylor G I. Analysis of the explosion of a long cylindrical bomb detonated at one end[A]. Scientific papers of G. I. Taylor, Vol III[C]. Cambridge: Cambridge University Press, 1963:277-286.
- [2] Richter H. On the theory of shaped charges: Motion of thin liners of plastic material on the surface of a plane explosive(in German)[R]. Note Technique ISL n° 6a/48, 1948.
- [3] Chou P C, Carleone J, Hirsch E, et al. Improved formulas for velocity, acceleration, and projection angle of explosively driven liners[J]. Propellants, Explosives, Pyrotechnics, 1983,8:175-183.
- [4] 邵丙璜, 张登霞, 李国豪, 等. 滑移爆轰作用下的金属复板运动[J]. 爆炸与冲击, 1985,5(3):1-12.
SHAO Bing-huang, ZHANG Deng-xia, LI Guo-hao, et al. Motion of the flyer plate under glancing detonation[J]. Explosion and Shock Waves, 1985,5(3):1-12.
- [5] 吕洪生, 蒋伯诚. 二维平板抛掷中的泰勒公式的理论证明[J]. 爆炸与冲击, 1986,6(1):24-29.
LÜ Hong-sheng, JIANG Bo-cheng. Theoretical proof of the Taylor's formula in the two-dimensional plate projection problem[J]. Explosion and Shock Waves, 1986,6(1):24-29.
- [6] 言志信, 吴德伦, 王后裕, 等. 高压驱动的抛掷角研究[J]. 爆炸与冲击, 2002,22(3):277-280.
YAN Zhi-xin, WU De-lun, WANG Hou-yu, et al. Study of projection angles of high pressure driving[J]. Explosion and Shock Waves, 2002,22(3):277-280.
- [7] 王继海. 二维非正常流和激波[M]. 北京: 科学出版社, 1994:496-501.

The projection angle equation of flyer plate under detonation driving

QIN Cheng-sen*, LIU Yi, HANG Yi-hong, WANG Pei

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

Abstract: Starting from the momentum equation, a projection angle equation of the planar flyer plate under detonation driving is derived in the moving reference frame by regarding the material as incompressible fluid and considering the force between the neighbouring segments. The equivalence between the solution of the equation and the geometry relation of the vector triangle is also discussed.

Key words: mechanics of explosion; projection angle equation; incompressible fluid; shaped charge; detonation driving

* Corresponding author: QIN Cheng-sen

E-mail address: chengsen@mail.iapcm.ac.cn

Telephone: 010-62014411-2654