

文章编号: 1001-1455(2005)02-0097-05

# 周培基抛射角公式的改进<sup>\*</sup>

秦承森, 刘 义, 杭义洪, 王 裴

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

**摘要:** 对于爆轰驱动平板问题, 当由理论近似给出或实验拟合给出某些物理量后, 可以借助抛射角方程导出适用的抛射角公式。利用爆轰驱动平板的抛射角方程, 在小抛射角条件下, 假设切向速度大小随时间的变化率为零, 很容易得到周培基(P. C. Chou)公式。考虑切向速度大小随时间的变化率时, 运用抛射角方程对周培基公式进行改进, 得到了更为精确的抛射角公式。与实验结果相比, 改进的周培基公式计算结果与实验结果更接近。

**关键词:** 爆炸力学; 改进的周培基公式; 抛射角公式; 抛射角方程; 爆轰驱动

**中图分类号:** O381      **国标学科代码:** 130 · 3510      **文献标志码:** A

## 1 引言

爆轰过程中产生的高压能够驱动聚能罩及飞片, 使其加速和变形, 这在爆炸加工、爆炸焊接、成型装药设计等许多领域都有广泛应用。在这个过程中, 物质元的速度大小和方向是重要的研究课题<sup>[1~7]</sup>。

英国科学家 G. I. Taylor<sup>[1]</sup> 较早地研究了这一问题, 并且提出了著名的半经验公式——泰勒公式, 给出了爆炸驱动抛板的极限速度和极限弯转角以及爆速之间的关系。该公式的正确性在实验中得到了验证, 并在以后的时间里一直被工程界和科学界广泛使用。

P. C. Chou 等<sup>[3]</sup> 考虑实际过程中的加速效应, 对非定常情况进行了研究, 得到了非定常条件下抛射角与抛射速度之间的关系——周培基公式。他进一步假设每个微元的加速过程符合指数规律, 发现该公式的结果与数值计算结果非常吻合, 在精度上优于泰勒公式。

文献[8]在考虑物质微元间的挤压作用条件下推导出了抛射角的控制方程, 本文中主要利用该文献中的结论, 对周培基公式进行进一步修正, 得到更精确的抛射角公式, 使之可应用于更高精度要求的工程。与实验曲线对比表明, 改进的周培基公式更接近实验曲线。

## 2 物理模型及抛射角方程

如图 1 所示, 在平面二维情况下, 建立静止坐标系  $xO'y$ ,  $y=0$  为平板上表面, 平板厚度为  $h$ 。  $y>0$  区间为炸药, 选流体微元的拉格朗日坐标  $l_0$  为平板的初始位置,  $l_0 = x_0$ 。设爆轰波到达  $l_0$  微元的时间为  $T$ , 该微元  $t$  时刻在静止坐标系中的速度为  $\mathbf{V}(l_0, t)$ , 它与平板表面垂线方向的夹角记为  $\theta(l_0, t)$ , 称为该物质微元的抛射角。

设爆轰波与平板的交点为  $O$ , 其速度为  $U$ , 为一常数。选随  $O$  点运动且原点固接于  $O$  点的坐标系, 则在动坐标系中, 该微元的速度为

$$\mathbf{q}(l_0, t) = \mathbf{V}(l_0, t) - \mathbf{U} \quad (1)$$

令  $\mathbf{q}(l_0, t)$  与平板的夹角为  $\alpha(l_0, t)$ , 则矢量关系(1)的几何表示如图 2 所示的三角形。

文献[8]在考虑平板微元间挤压作用的条件下得到了如下拉氏形式的动量方程

\* 收稿日期: 2004-06-27; 修回日期: 2004-11-03

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(10135010)

作者简介: 秦承森(1941—), 男, 研究员, 博士生导师。

$$\begin{cases} \frac{\partial q(l_0, t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(l_0, t)}{\partial l_0} \\ \rho_0 h_0 q \frac{\partial \alpha}{\partial t} = p(l_0, t) \end{cases} \quad (2)$$

初值条件为  $t=T$  时,  $q(l_0, T)=U, \alpha(l_0, T)=0, p(l_0, T)=p_j$ , 其中  $p_j$  为 C-J 爆压。

进一步, 文献[8]给出了反映  $\alpha, \theta, q, V$  之间关系的微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\dot{q}}{V} = \frac{\dot{V}}{V} \sin(\alpha - \theta) - \dot{\theta} \cos(\alpha - \theta) \\ \frac{\dot{V}}{q} = \frac{\dot{q}}{q} \sin(\alpha - \theta) + \dot{\alpha} \cos(\alpha - \theta) \\ \dot{q} = h_0 \frac{\partial(q\dot{\alpha})}{\partial l_0} \end{cases} \quad (3)$$

初始条件为  $t=T$  时,  $q(T)=U, V(T)=0, \alpha(T)=\theta(T)=0$ 。其中对任意量  $\Phi, \dot{\Phi} \equiv \partial \Phi(l_0, t) / \partial t$ 。

(3)式即为抛射角方程。若  $V(l_0, t)$  已知, 则由(3)式可以求出  $\theta(l_0, t), q(l_0, t), \alpha(l_0, t)$ 。

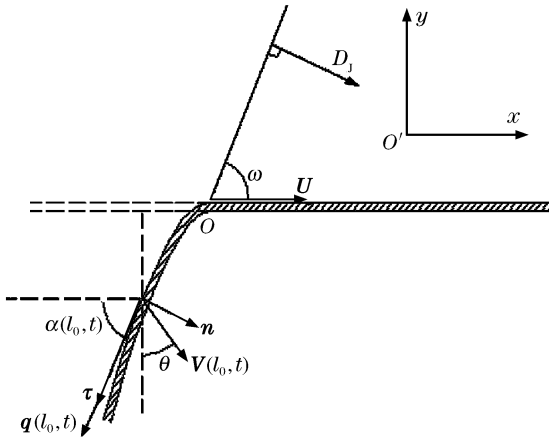


图 1 平板加速过程

Fig.1 Acceleration process of the plate

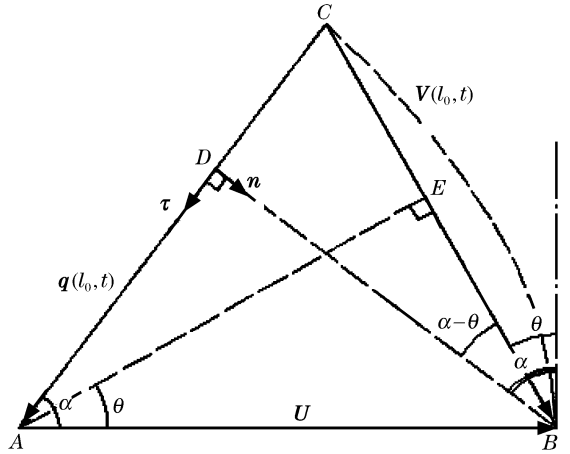


图 2 矢量三角形

Fig.2 Vector triangle

### 3 抛射角公式

原则上, 流体微元的抛射速度和抛射角的求解是一个二维非定常流体力学问题。精确求解是十分复杂的, 且只能给出数值解。但是, 当由理论近似给出或实验拟合给出某些物理量后, 可以借助前面的理论给出抛射角的估计。

若将(3)式中第一、二式相加, 并令  $X = \sin(\alpha - \theta)$ , 则方程(3)前两式化为

$$\dot{X} + \left( \frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{q}}{q} \right) X = \frac{\dot{q}}{V} + \frac{\dot{V}}{q} \quad (4)$$

初始条件为:  $t=T$  时,  $X(T)=0$ 。

泰勒假设质点在运动坐标系中的运动是定常的, 即假设  $\dot{q}=0, q=U=const$ , 则有方程

$$\dot{X} + \frac{\dot{V}}{V} X = \frac{\dot{V}}{U} \quad (5)$$

由于  $q=U$  时图 2 中矢量三角形为等腰三角形, 故  $\alpha=2\theta, \sin(\alpha - \theta) = \sin\theta$ , 方程(5)在  $t=T$  时,  $\alpha=\theta=0, V=0$  的初始条件下的解为

$$\sin\theta = \frac{V}{2U} \quad (6)$$

它就是泰勒公式。

下面给出(5)式的另一个与(6)式等价的解,可以称之为第二泰勒公式。

在运动坐标系选沿流线的空间坐标为  $l$ 、方向为速度  $\mathbf{q}$  的方向。质团运动速度  $q=U=\text{const}$  的定常运动中,给出  $dl=Udt$  的时空变换关系。在定常运动中,迹线和流线是等同的,故  $dl$  既是同一质团在  $dt$  时间内移动的距离,亦是以  $U$  运动的观察者在  $dt$  时间内沿流线跨越的不同拉氏质点坐标的长度。在抛板材料厚度、密度不变的假设下,有  $|dl|=|dl_0|$ ,考虑到  $l_0$  与  $l$  坐标选取方向不同,沿  $l$  方向的增量  $dl$  应等于沿  $-l_0$  方向的增量,故  $dl=-dl_0$ 。于是有变换  $-dl_0=Udt$ ,即

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} = -U \frac{\partial V}{\partial l_0} \quad (7)$$

将(7)式代入方程(5)中,得到

$$\dot{X} + \frac{\dot{V}}{V}X = -\frac{\partial V}{\partial l_0} \quad (8)$$

它的解为

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin\theta = -\frac{1}{V} \int_T^t V \frac{\partial V}{\partial l_0} dt \quad (9)$$

它实际上是泰勒公式(6)的另一种形式。只要将(7)式代入(9)式,它就演化为泰勒公式(6)。但是第二泰勒公式(9)显示了速度  $V(l_0, t)$  梯度的影响。

在角度  $\theta$  很小的条件下,  $\sin\theta \approx \theta$ , (6)、(9)两式分别化为

$$\theta = V/(2U) \quad (10)$$

$$\alpha - \theta = \theta = -\frac{1}{V} \int_T^t V \frac{\partial V}{\partial l_0} dt \quad (11)$$

注意到  $\dot{\alpha} = 2\dot{\theta}$ , 使用(7)式及(10)式,可得  $\dot{\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial l_0}$ , 在  $t=T$  时,  $\alpha=0$  的初始条件下,可积分为

$$\alpha = -\int_T^t \frac{\partial V}{\partial l_0} dt \quad (12)$$

将它代入(11)式,则(10)式亦可写为

$$\theta = \alpha + \frac{1}{V} \int_T^t V \frac{\partial V}{\partial l_0} dt = -\int_T^t \frac{\partial V}{\partial l_0} dt + \frac{1}{V} \int_T^t V \frac{\partial V}{\partial l_0} dt \quad (13)$$

它就是周培基公式。因此,可以说,周培基公式是第二泰勒公式在小角度近似下的另一种形式。

也可以由(3)式直接得到公式(13),在(3)式的第一式中,令  $\dot{q}=0$ ,  $\sin(\alpha - \theta) \approx \alpha - \theta$ ,  $\cos(\alpha - \theta) \approx 1$ , 则得关于  $\theta$  的微分方程

$$\dot{\theta} + \frac{\dot{V}}{V}\theta = \frac{\dot{V}}{V}\alpha \quad (14)$$

积分此方程,有  $\theta = \frac{1}{V} \int_T^t \dot{V}\alpha dt$ , 做分步积分,有

$$\theta = -\int_T^t \frac{\partial V}{\partial l_0} dt + \frac{1}{2V} \int_T^t \frac{\partial V^2}{\partial l_0} dt \quad (15)$$

此即(13)式所示的周培基公式。它是第二泰勒公式在小角度近似下的抛射角公式。

#### 4 改进的周培基公式

在推导公式(14)的过程中,若不假设  $\dot{q}=0$ , 但认为  $\dot{q}$  是小量,在小扰动线性化近似下,仍然采用近似式  $\dot{\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial l_0}$ ,  $q=U$ , 则由方程(3)中第三式有

$$\dot{q} = -h_0 U \frac{\partial V^2}{\partial l_0^2} \quad (16)$$

则方程(3)的第一式可化为

$$\dot{\theta} + \frac{\dot{V}}{V}\theta = \frac{\dot{V}}{V}\alpha + \frac{h_0 U}{V} \frac{\partial V^2}{\partial l_0^2} \quad (17)$$

积分此方程,有

$$\theta = - \int_T^t \frac{\partial V}{\partial l_0} dt + \frac{1}{2V} \int_T^t V \frac{\partial V^2}{\partial l_0} dt + \frac{h_0 U}{V} \int_T^t \frac{\partial V^2}{\partial l_0^2} dt \quad (18)$$

此即改进后的周培基公式。可以看到,该式在周培基公式的基础上仅增加了右边第三项。当薄板  $h_0$  很小时,改进公式与原周培基公式的差值也是一个小量。但当  $h_0$  较大时,这个改进将是明显的。

## 5 改进公式计算结果与实验结果的比较

使用上述改进公式对密度为  $7.8 \text{ g/cm}^3$  的45钢制成的直径40 mm、内外锥角均为  $140^\circ$ 、质量25 g、装药为8701炸药、药量65 g的等厚药型罩进行计算,爆轰波速取  $7.15 \text{ km/s}$ ,采用指数加速模型,计算结果与文献[9]中给出的实验结果和使用周培基公式及泰勒公式计算的结果进行比较,图3给出了不同  $l$  处抛射角随时间的变化曲线。从图中可以看出,使用改进公式计算的结果略高于实验值,与周培基公式和泰勒公式的计算结果相比,改进公式的结果在大多数情况下更接近实验值。

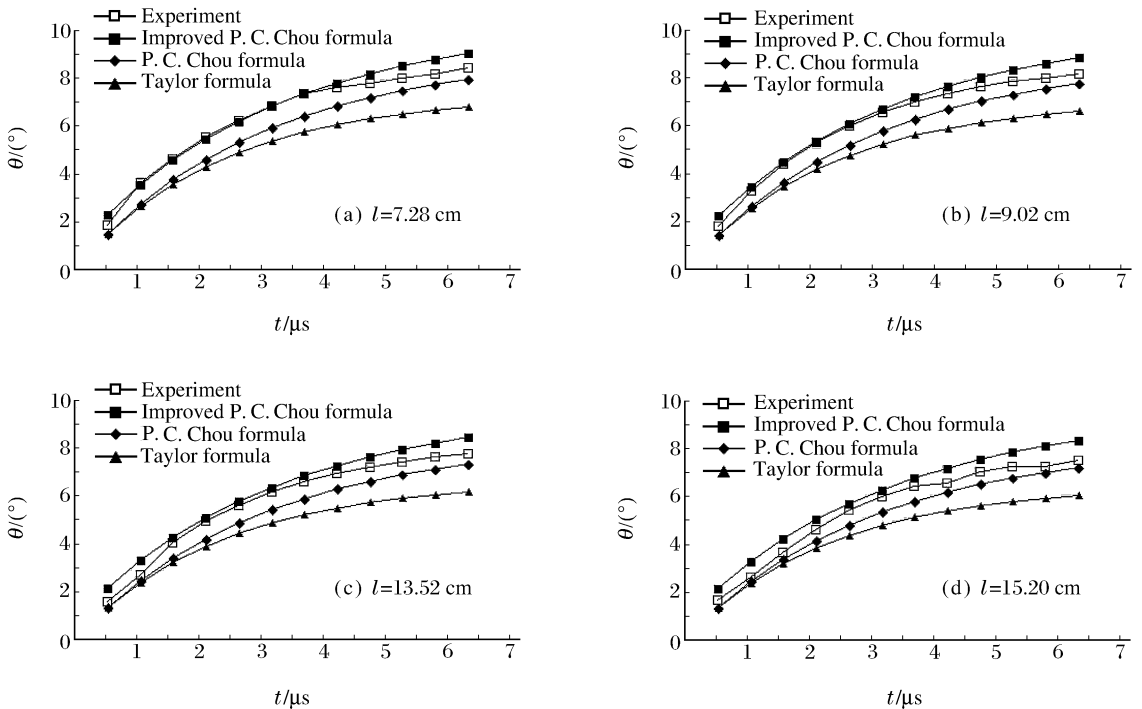


图3 公式计算结果与实验结果的比较

Fig. 3 Comparisons of the calculation results from different formulas and experimental data

## 6 结论

(1) 当理论近似或实验拟合给出某些物理量(如抛板曲线、速度大小等)后,可以借助抛射角方程导出适用的抛射角公式。在动坐标系中,质点运动定常假设下,它给出了泰勒曾经得到的结果——泰勒公式。同时,我们给出了一个新的公式,它与泰勒公式等价,可称为第二泰勒公式(9)。

(2) 利用爆轰驱动平板的抛射角方程,在小抛射角条件下,假设  $\dot{q}$ , 推导得到了周培基公式。从而从理论上给出了周培基公式的应用条件,及其与泰勒公式的关系。

(3) 在动坐标系中,考虑沿流向速度大小随时间的变化率是小量的条件下,运用抛射角方程对周培

基公式进行了改进,得到了一个改进的周培基公式。这个公式消除了动坐标系中质点运动定常假设的限制,适用于非定常情况。同时增加了平板厚度的影响。

### 参考文献:

- [1] Taylor G I. Analysis of the explosion of a long cylindrical bomb detonated at one end(1941)[A]. Scientific of G. I. Taylor[M]. Cambridge University Press, 1963:277-286.
- [2] Richter H. On the Theory of Shaped Charges: Motion of Thin Liners of Plastic Material on the Surface of a Plane Explosive(in German)[R]. Note Technique ISL n° 6a/48, 1948.
- [3] Chou P C, Carleone J, Hirsch E, et al. Improved formulas for velocity, acceleration, and projection angle of explosively driven liners[J]. Propellants, Explosives, Pyrotechnics, 1983,8:175-183.
- [4] 邵丙璜,张登霞,李国豪,等. 滑移爆轰作用下的金属复板运动[J]. 爆炸与冲击,1985,5(3):1-12.  
SHAO Bing-huang, ZHANG Deng-xia, LI Guo-hao, et al. Motion of the flyer plate under glancing detonation[J]. Explosion and Shock Waves, 1985,5(3):1-12.
- [5] 吕洪生,蒋伯诚. 二维平板抛掷中的泰勒公式的理论证明[J]. 爆炸与冲击,1986,6(1):24-29.  
LÜ Hong-sheng, JIANG Bo-cheng. Theoretical proof of the Taylor's formula in the two-dimensional plate projection problem[J]. Explosion and Shock Waves, 1986,6(1):24-29.
- [6] 言志信,吴德伦,王后裕,等. 高压驱动的抛掷角研究[J]. 爆炸与冲击,2002,22(3):277-280.  
YAN Zhi-xin, WU De-lun, WANG Hou-yu, et al. Study of projection angles of high pressure driving[J]. Explosion and Shock Waves, 2002,22(3):277-280.
- [7] 王继海. 二维非定常流和激波[M]. 北京:科学出版社,1994:496-501.
- [8] 秦承森,刘义,杭义洪,等. 爆轰驱动平板的抛射角方程[J]. 爆炸与冲击,2005,25(1):1-4.  
QIN Cheng-sen, LIU Yi, Hang Yi-hong, et al. The projection angle equation of the flyer plate under planar detonation driving[J]. Explosion and Shock Waves, 2005,25(1):1-4.
- [9] 言志信. 结构拆除及爆破震动效应研究[D]. 重庆:重庆大学,2002.

## The improved P. C. Chou formula

QIN Cheng-sen<sup>\*</sup>, LIU Yi, HANG Yi-hong, WANG Pei

*(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)*

**Abstract:** For the problem of detonation driving plate, if some quantities could be gained from theories or experiments, we can deduce the projection angle formula from the projection angle equation. Using the equation, regarding the projection angle as a small quantity, neglecting the differentiation of the absolute value of the tangential velocity with respect to the time, the P. C. Chou formula was easily obtained. When considering the differentiation of the absolute value of the tangential velocity with respect to the time, the improved P. C. Chou formula was obtained. Compared to the P. C. Chou formula and Taylor formula, the results from the improved formula are more close to the experiment.

**Key words:** mechanics of explosion; improved P. C. Chou formula; projection angle formula; projection angle equation; detonation driving

---

<sup>\*</sup> Corresponding author: QIN Cheng-sen  
E-mail address: chengsen@mail.iapcm.ac.cn  
Telephone: 010-62014411-2654