

文章编号: 1001-1455(2005)03-0200-07

# 计入膜力塑性耗散效应的矩形板 塑性动力响应\*

陈发良<sup>1</sup>, 余同希<sup>2</sup>

(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;

2. 香港科技大学机械工程系, 香港)

**摘要:** 从能量的观点在小挠度理论中引入表征膜力塑性耗散效应的修正因子, 基于刚性板块的总体平衡给出矩形板大挠度塑性动力响应的完全运动方程组, 分析了理想刚塑性简支和固支矩形板在矩形脉冲和冲击载荷下包括移行塑性铰相的完全大挠度响应过程。解决了当矩形板的挠度达到厚度量级时弯矩、膜力的联合作用问题, 理论预报的结果在板的挠度为10倍板厚的量级与实验结果符合良好, 改进了只考虑弯矩作用的小挠度理论结果和模态近似估计。

**关键词:** 固体力学; 刚塑性响应; 膜力效应; 矩形板; 大挠度

**中图分类号:** O347.1

**国标学科代码:** 130·1515

**文献标志码:** A

## 1 引言

研究结构的大变形塑性动力响应在结构的抗爆能力估计和金属动力成形等问题中具有重要的实际意义。因而尽管大变形问题处理起来相当困难, 近20年来仍有大量这方面的工作<sup>[1~2]</sup>。

矩形板是工程上应用最广泛的板结构。不同于梁和圆板, 矩形板是二维非轴对称结构, 其主应力方向事先不知道, 因而关于矩形板的理论分析相当复杂和困难, 尤其在大挠度情形下, 既有材料非线性, 又有几何非线性。K. L. Komarov等<sup>[3]</sup>的刚塑性小挠度理论(板的经典小挠度理论只适用于挠度远小于厚度的情形)给出了最终挠度的上、下限估计, 其结果在最大挠度超过2倍板厚时开始与实验值有显著偏离。刚塑性和小挠度是一对相悖的假设, 因而限制了其结果的适用范围。在许多实际问题中, 板的挠度达到板厚的几倍甚至十几倍, 必须进行大挠度分析。但由于问题的复杂性, 以前的大挠度理论分析大都是近似估计, 如N. Jones<sup>[4]</sup>和W. E. Baker<sup>[5]</sup>等基于不随时间变化的变形位移剖面所作的模态近似分析。T. X. Yu等<sup>[6]</sup>曾考虑大挠度响应的移行塑性铰相, 并在角动量守恒方程中同时考虑弯矩和大挠度诱导的膜力产生的合力矩 $L_{mm}$ 作用, 给出了一个较完整的理论分析。

事实上, 对强约束结构, 如端部受约束的梁和常见的大部分板, 工程应用并不可能允许其横向变形到面内尺寸量级而对几何构形有很大影响, 大挠度一般在几倍至十几倍板厚的量级, 这时大挠度效应主要体现为膜力效应, 即大挠度诱导的膜力出现在屈服条件和运动平衡方程中。本文作者基此提出了膜力因子的概念<sup>[7~9]</sup>, 并成功地应用于梁、圆板的大挠度塑性分析中。本文中将该思想发展到二维非轴对称的矩形板情形, 而且不同于梁、圆板等一维问题从变形几何关系推导膜力因子的方法, 避开矩形板动力变形场二维数学表示的复杂性, 直接从弯矩膜力联合作用塑性铰线上塑性功耗散函数出发定义膜力因子, 较简便地给出矩形板包括移行塑性铰相的大挠度塑性动力响应完全理论分析。

## 2 任意脉冲作用的基本方程

考虑一长为 $b$ 、宽为 $a$ 、厚为 $H$ 的矩形板, 其周边为不可移简支(边界支承参数 $\alpha=1$ )或固支( $\alpha=2$ ),

\* 收稿日期: 2004-07-09; 修回日期: 2004-10-12

作者简介: 陈发良(1966—), 男, 博士, 副研究员。

单位面积质量为  $\mu$ ，受到强度为  $P(t)$  的均布载荷作用。假设板材料为理想刚塑性的， $Y$  为屈服应力，则单位长度塑性极限弯矩  $M_0 = YH^2/4$ 。

均布载荷作用下矩形板的极限平衡状态有两种可能的变形模式，如图 1 所示，相应的极限平衡方程

$$\begin{cases} p_0 \xi_p^2 = 6\alpha \\ p_0 (3 - 4\xi_p) = 24\gamma^2 \alpha \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} p_0 (3 - 4\delta_p) \xi_p^2 = 6\alpha \\ p_0 (3 - 4\xi_p) \delta_p^2 = 6\gamma^2 \alpha \end{cases} \quad (1b)$$

式(1a)可由式(1b)中令  $\delta_p = 1/2$  得到。其中，边长比  $\gamma = b/a \geq 1$ ； $p_0 = P_0 b^2/M_0$ ， $P_0$  是对应的塑性极限载荷； $\xi_p$  和  $\delta_p$  是板在塑性极限状态下刚性区尺寸的无量纲参量；式(1)的建立用到这样的事实：塑性铰线是主应力方向，并且在铰线上  $M_{nn} = M_0$  (这里  $n$  代表铰线垂直方向)。从塑性极限分析知道，静的极限平衡状态的变形机构是图 1 中的 A 型，即  $\delta_p = 1/2$ ，而且  $\xi_p = (\sqrt{1 + 3\gamma^2} - 1)/(2\gamma^2)$ 。

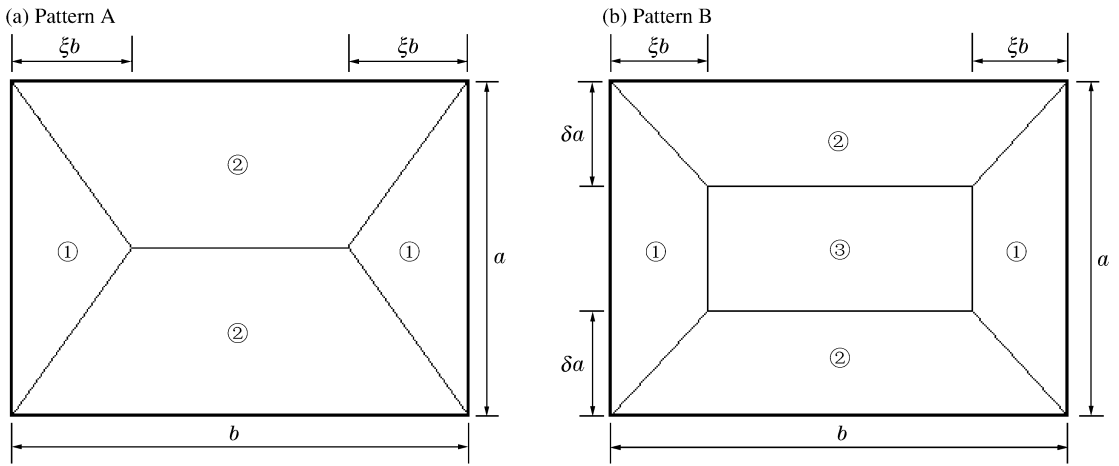


图 1 变形机构

Fig. 1 Deformation mechanisms

对于随时间不增的动载  $P(t)$  作用的情形，如果  $P(0) \equiv P^* > P_0$ ，板发生塑性动力变形，惯性力参与承载。变形模式如图 1(a)或图 1(b)所示，刚性块①、②绕各自支承边转动，而且一般地  $\xi, \delta$  随时间变化，即有移行铰线。参见文献[3]，对于模式 B 可推导只考虑弯矩作用的小挠度理论运动方程组

$$\ddot{\phi}_1 \xi^3 (2 - 3\delta) = p(\tau) (3 - 4\delta) \xi^2 - 6\alpha \quad (2a)$$

$$\ddot{\phi}_2 \delta^3 (2 - 3\xi) = p(\tau) (3 - 4\xi) \delta^2 - 6\gamma^2 \alpha \quad (2b)$$

$$\frac{d}{d\tau} (\dot{\phi}_1 \xi) = p(\tau) \quad (2c)$$

$$\dot{\phi}_1 \xi = \dot{\phi}_2 \delta \quad (2d)$$

式中： $\tau = t \sqrt{\frac{M_0}{\mu H b^2}}$ ， $\dot{(\ )} = \frac{d(\ )}{d\tau}$ ； $\phi_1 = \bar{\phi}_1 \frac{b}{H}$ ， $\phi_2 = \bar{\phi}_2 \frac{a}{H}$ ， $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$  分别是刚性块①、②绕边界转动的角度； $p = P \frac{b^2}{M_0}$ 。

方程(2a)、(2b)分别描述的是刚性块①、②的角动量守恒，方程(2c)描述中央塑性区③的动量守恒，方程(2d)是运动连续条件。

如前所述，小挠度理论运动方程组(2)只适用于板的挠度远小于板厚的情形。当板的挠度达到和超过板厚时，必须计入大挠度诱导的膜力效应，膜力将参与塑性耗散，增强结构刚性。可是大挠度理论的一般运动方程由于同时包含弯矩和膜力而变得十分复杂。因此，本文中从能量的观点出发在小挠度理

论中引入一表征膜力效应的修正因子来建立矩形板大挠度塑性动力响应运动方程组。计入大挠度诱导的膜力增强效应从能量耗散来看等价于假设板的塑性极限弯矩随挠度不断增大,因而在小挠度运动方程组(2)中作替换  $M_0 \rightarrow f_n M_0$ , 即得到大挠度运动方程组

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 \xi^3 (2 - 3\delta) = p(\tau) (3 - 4\delta) \xi^2 - 6\alpha f_n \\ \ddot{\phi}_2 \delta^3 (2 - 3\xi) = p(\tau) (3 - 4\xi) \delta^2 - 6\gamma^2 \alpha f_n \\ \frac{d}{d\tau} (\dot{\phi}_1 \xi) = p(\tau) \\ \dot{\phi}_1 \xi = \dot{\phi}_2 \delta \end{cases} \quad (3)$$

式中:因子  $f_n$  代表随挠度增大的膜力增强效应。

方程组(3)是关于未知函数  $\xi(\tau)$ 、 $\delta(\tau)$ 、 $\dot{\phi}_1(\tau)$  和  $\dot{\phi}_2(\tau)$  的常微分方程组,其中函数  $\xi(\tau)$ 、 $\delta(\tau)$  刻画变形机构中塑性铰线的移行规律。分析表明,存在临界过载参数

$$\zeta_{cr} = (3 - 4\xi_p + \xi_p^2) + \sqrt{2\xi_p^2(3 - 4\xi_p) + \xi_p^4}$$

如果  $p^* \leq \zeta_{cr} p_0$ , 在板的整个响应过程中只有模式 A 发生,不出现中央塑性平台区。当  $\gamma=1$  (即退化为方板)时,  $\zeta_{cr}=2$ ; 当  $\gamma \rightarrow \infty$  (狭长板)时,  $\zeta_{cr} \rightarrow 3$ 。

在方程组(3)中令  $\delta=1/2$ , 得到没有中央塑性平台区 ( $p^* \leq \zeta_{cr} p_0$ ) 或中央塑性平台区消失后的变形模式 A 的大挠度运动方程组

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 \xi^3 = 2p(\tau) \xi^2 - 12\alpha f_n \\ \ddot{\phi}_2 (2 - 3\xi) = 2p(\tau) (3 - 4\xi) - 48\gamma^2 \alpha f_n \\ 2\dot{\phi}_1 \xi = \dot{\phi}_2 \end{cases} \quad (4)$$

### 3 基于塑性耗散的膜力因子

为了求解大挠度运动方程组(3)和(4),必须事先求出膜力因子  $f_n$ 。弯矩和膜力联合作用下板内单位长度塑性铰线的塑性功耗散率,即塑性耗散函数

$$\dot{D}_i = (N\omega - M)\dot{\theta}_i \quad (5)$$

式中:  $\omega$  为铰线处板的挠度,  $N$  和  $M$  分别为铰线法截面上的膜力和弯矩,  $\dot{\theta}_i$  为铰线两侧刚性块的相对转动角速度。塑性耗散函数  $\dot{D}_i$  依赖于边界支承条件和屈服准则的选取。如果选用最大正应力屈服准则 ( $M$ 、 $N$  交互作用) 及其正交流动法则, 并且利用 Euler-Bernoulli 假设, 就可以得到边界固支的板内的塑性铰线<sup>[4]</sup>

$$\dot{D}_i = \begin{cases} M_0 \left(1 + \frac{3\omega^2}{H^2}\right) \dot{\theta}_i & \frac{\omega}{H} \leq 1 \\ 4M_0 \frac{\omega}{H} \dot{\theta}_i & \frac{\omega}{H} > 1 \end{cases} \quad (6)$$

因而弯矩膜力联合作用的总塑性功耗散率  $J_{mn} = \sum_i \int_{l_i} \dot{D}_i dl$ , 其中  $l_i$  表示第  $i$  条塑性铰线的长度,  $\sum_i$  表示对所有铰线求和。可见,  $J_{mn}$  与沿塑性铰线的挠度大小有关。

另一方面,当只考虑弯矩作用时,  $|M_{nn}|=M_0$ , 总的塑性功耗散率  $J_m = M_0 \sum_i \dot{\theta}_i l_i$ 。从能量耗散的观点,表征大挠度膜力效应的修正因子  $f_n$  可以定义为<sup>[7]</sup>

$$f_n \equiv \frac{J_{mn}}{J_m} \quad (7)$$

对于本文中考虑的矩形板及其变形模式,在计算  $f_n$  时取位移场的一阶分块线性近似,计算得到在

边界固支 ( $\alpha = 2$ ) 的情形

$$f_n = \begin{cases} \frac{(1 + \eta^2) \sqrt{2 + \left(\frac{\delta}{\xi\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\xi\gamma}{\delta}\right)^2} + \frac{1}{\xi\gamma} \left(1 - \delta + \frac{3}{2}\eta^2 - 3\eta^2\delta\right) + \frac{\gamma}{\delta} \left(1 - \xi + \frac{3}{2}\eta^2 - 3\eta^2\delta\right)}{\sqrt{2 + \left(\frac{\delta}{\xi\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\xi\gamma}{\delta}\right)^2} + \frac{1}{\xi\gamma}(1 - \delta) + \frac{\gamma}{\delta}(1 - \xi)} & \eta \leq 1 \\ \frac{2\eta \sqrt{2 + \left(\frac{\delta}{\xi\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\xi\gamma}{\delta}\right)^2} + 4\eta \left[ \frac{1}{\xi\gamma} \left(\frac{1}{2} - \delta\right) + \frac{\gamma}{\delta} \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \right] + \frac{1}{2\xi\gamma} + \frac{\gamma}{2\delta}}{\sqrt{2 + \left(\frac{\delta}{\xi\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\xi\gamma}{\delta}\right)^2} + \frac{1}{\xi\gamma}(1 - \delta) + \frac{\gamma}{\delta}(1 - \xi)} & \eta > 1 \end{cases}$$

对于简支 ( $\alpha = 1$ ) 矩形板, 有类似的表达式。上式表明,  $f_n$  是  $\xi, \delta$  和  $\eta$  的函数, 也与参数  $\gamma$  有关。其中  $\eta$  是板中央塑性区挠度  $w_0$  与板厚  $H$  之比, 即

$$\eta = \frac{w_0}{H} = \frac{1}{H} \int_0^t b \xi \frac{d\phi_1}{dt} dt = \int_0^{\tau} \xi \dot{\phi}_1 d\tau$$

### 4 矩形脉冲载荷作用的响应历程

当载荷为矩形脉冲, 即  $p(\tau) = \begin{cases} p^* & 0 \leq \tau \leq \tau_T \\ 0 & \tau > \tau_T \end{cases}$  ( $\tau_T$  为对应的脉冲载荷作用结束的无量纲时间) 的情形, 根据前面的分析可知: (1) 若  $p^* < p_0$ , 板不变形; (2) 若  $p_0 \leq p^* \leq \zeta_{cr} p_0$ , 板变形模式为 A 型; (3) 若  $p^* > \zeta_{cr} p_0$ , 板变形模式先为 B 型, 在一定阶段后退化为 A 型。

对第 (3) 种高载情形, 矩形板的响应过程可以分为四相, 详见表 1。第 I 相, 载荷作用相, 变形模式

表 1 矩形板受矩形脉冲 (高载) 作用的塑性动力响应

Table 1 Response of a rigid-plastic rectangular plate to a rectangular impulse (high loading)

相	变形模式	控制方程	$\xi$	$\delta$	$\eta$
$\tau = 0$	B	$p^* (1 - \delta_0) \xi_0^2 = 6\alpha$ $p^* (1 - \xi_0) \delta_0^2 = 6\gamma^2 \alpha$	$\xi_0$	$\delta_0$	0
I $0 < \tau \leq \tau_T$	B	$\dot{\xi} = \frac{6\alpha f_n - (1 - \delta) \xi^2 p^*}{\xi p^* \tau (2 - 3\delta)}$ $\dot{\delta} = \frac{6\gamma^2 \alpha f_n - (1 - \xi) \delta^2 p^*}{\delta p^* \tau (2 - 3\xi)}$	$\uparrow$ $\xi = \xi_0$ (小挠度理论)	$\uparrow$ $\delta = \delta_0$ (小挠度理论)	$\uparrow$ $\eta = \frac{1}{2} p^* \tau^2$ (匀加速)
II $\tau_T \leq \tau \leq \tau_2$	B	$\dot{\xi} = \frac{6\alpha f_n}{\xi p^* \tau_T (2 - 3\delta)}$ $\dot{\delta} = \frac{6\gamma^2 \alpha f_n}{\delta p^* \tau_T (2 - 3\xi)}$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$ $\eta = p^* \tau_T \left( \tau - \frac{1}{2} \tau_T \right)$ (匀速)
III $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$	A	$\ddot{\phi}_1 \xi^3 = -12\alpha f_n$ $\ddot{\phi}_2 (2 - 3\xi) = -48\gamma^2 \alpha f_n$ $2\dot{\phi}_1 \xi = \dot{\phi}_2$	$\uparrow$	$\delta = \frac{1}{2}$	$\eta = \eta_2 + \int_{\tau_2}^{\tau} \dot{\phi}_1 \xi d\tau$
IV $\tau_3 \leq \tau < \tau_f$	A	$\frac{d\phi_1}{d\tau} = -\frac{12\alpha f_n}{\xi^{\frac{3}{2}}}$ $\dot{\phi}_2 = 2\xi \dot{\phi}_1$	$\xi = \xi_3 = \text{const}$	$\delta = \frac{1}{2}$	$\eta = \eta_3 + \int_{\tau_3}^{\tau} \dot{\phi}_1 \xi_3 d\tau$
$\tau = \tau_f$	A	—	$\xi_f = \xi_3$	$\delta_f = \frac{1}{2}$	$\eta_f$

为 B 型,中央塑性平台区作匀加速运动;第 II 相,变形模式仍为 B 型,中央塑性平台区作匀速运动;第 III 相,变形模式退化为 A 型,但塑性铰线继续移行;第 IV 相,变形模式为 A 型,所有塑性铰线驻定。分析发现动态响应最终阶段的变形模式可以不等于静的极限变形机构,在图 1(a)的屋顶型模式中,动态响应最终阶段变形模式的中心棱线要比静态情形为短。

对第(2)种中载情形,变形模式始终为 A 型,响应过程只有三相。

### 5 冲击载荷情形的计算结果和讨论

冲击载荷可看作矩形脉冲载荷保持冲量为常数,脉宽 $\rightarrow 0$ 的高载极限情形。由于 $\tau_T = 0$ ,上节讨论中的第一相退化不出现,响应历程只有三相。假设矩形板在冲击载荷作用下在 $t = 0$ 时刻获得均布速度 $v_0$ ,引入无量纲参量 $\lambda = \mu v_0^2 b^2 / (M_0 H)$ , $\tau' = v_0 t / H$ ( $\tau'$ 为另一无量纲时间)。根据表 1 第 3 列可以得到每一相无量纲形式的控制方程,然后用 Runge-Kutta 法积分得到整个响应历程,包括响应时间 $\tau'_f$ 和最终挠度 $\eta_f = w_f / H$ ,它们依赖于几何参数 $\gamma$ 、边界支承条件 $\alpha$ 和量纲-冲击强度 $\lambda$ 。在小挠度假定下(即 $f_n \equiv 1$ ),有 $\tau'_f \propto \lambda$ , $\eta_f \propto \lambda$ ;考虑大挠度效应后,这种线性关系不再成立。

图 2 是计算给出的 $\xi, \delta$ 的响应历程曲线,从图中可以清楚地看出响应的三相和变形模式的演变过程。第 I、第 II 相是移行塑性铰阶段,比第 III 相的模式响应阶段的时间长得多,在整个响应过程中占主要部分。这说明,在通常的冲击载荷情形下,移行塑性铰很重要,理论分析中只有计入了移行塑性铰效应才能对响应结果给出可靠的预报。

图 3 表示边长比 $\gamma(\gamma = b/a)$ 对矩形板最终挠度的影响。对于给定的冲击参数 $\lambda$ , $\gamma$ 越小(越接近方板),板的最终挠度越大。图 4 中比较不同边界支承条件的影响。从图 4 中看到, $\lambda$ 越小,边界转动约束对响应的影响越明显;而对于强冲击(较大的 $\lambda$ 值),边界是简支或固支即是否有弯矩约束对变形的影响很小,这说明此时弯曲内力作用在减小,膜内力作用却在增大。

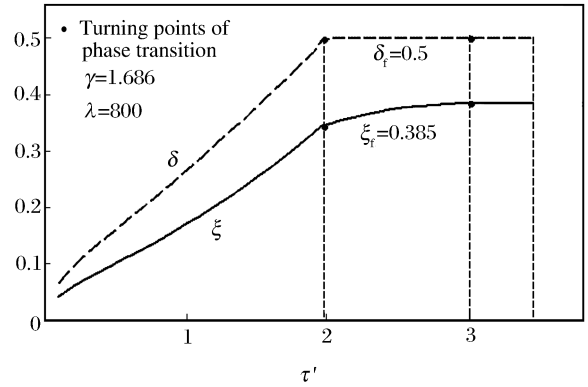


图 2 参数 $\xi, \delta$ 响应历程曲线  
Fig. 2 Evolution of parameters  $\xi, \delta$

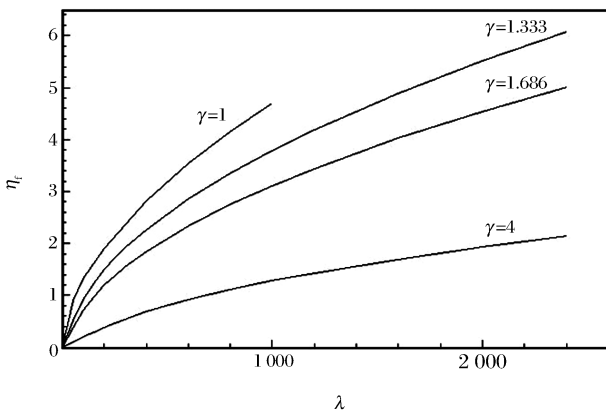


图 3 固支矩形板最终挠度与冲击强度的关系  
Fig. 3 Final deflection vs. impulsive intensity for fully-clamped rectangular plates

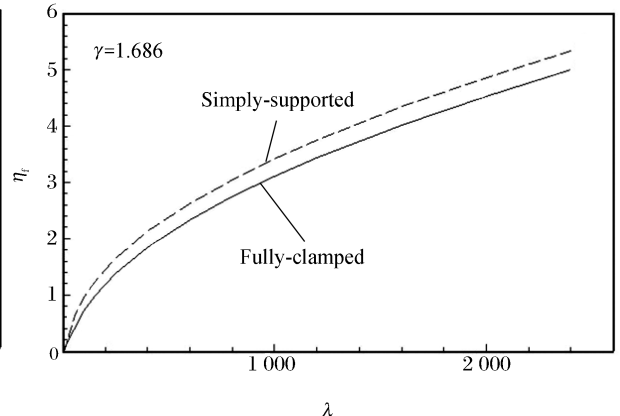


图 4 不同边界支承条件对最终挠度的影响  
Fig. 4 Influence of edge supporting conditions on final deflection

图 5 给出固支矩形板最终挠度的理论分析与 N. Jones 等<sup>[10]</sup>对低碳钢和 6061-T6 铝固支矩形板的实验结果比较。*a*, *b*, *c*, *c'* 分别是 N. Jones<sup>[10]</sup>和 K. L. Komarov 等<sup>[3]</sup>小挠度假设下给出的上、下界估计, *d* 是本文中只考虑弯矩作用 ( $f_n \equiv 1$ ) 的小挠度完全分析解。可以看到, *d* 比他们的上、下界估计结果要好, 但所有这些小挠度解在板的最大挠度达到 2 倍板厚时就开始与实验结果出现明显偏离。*e* 是 N. Jones<sup>[4]</sup>基于模态变形位移剖面的大挠度近似结果, *f* 是 T. X. Yu 等<sup>[6]</sup>在角动量守恒方程中考虑弯矩、膜力合力矩  $L_{mn}$  作用的分析结果, *f* 比模态近似 *e* 有明显改进, 而本文中给出的同时考虑移行塑性铰相和膜力塑性耗散效应的大挠度完全分析理论结果 (*g*) 与实验结果符合最好。

### 6 结 论

在板的塑性动力响应过程中, 当挠度达到和超过其厚度量级时, 仅考虑弯矩作用的小挠度理论不再适用, 必须计入大挠度诱导的膜力效应。大挠度诱导的膜力耗散能量、强化结构刚性从而显著减小板的挠度。从弯矩膜力联合作用的塑性功耗散函数出发定义一膜力因子来对小挠度运动方程进行修正, 成功地给出了二维矩形板复杂的大挠度塑性动力响应的完全理论分析, 给出的冲击响应挠度理论预报直到 10 倍板厚的量级与实验结果符合良好。

理论分析的特点在于:

- (1) 考虑准确的弯矩、膜力联合作用屈服条件;
- (2) 计入了响应的移行塑性铰相, 从而给出是完全分析而不是模态近似;
- (3) 基于能量耗散的观点引入膜力修正因子, 避开了求解同时包含  $M$ 、 $N$  的复杂大挠度运动方程组, 概念清晰, 方法简明。

### 参考文献:

[1] Nurick G N, Martin J B. Deformation of thin plates subjected to impulsive loading—A review, Part I and II[J]. International Journal of Impact Engineering, 1989,8(2):159—186.

[2] Yu T X, Chen F L. Failure of plastic structures under intense dynamic loading: Modes, criteria and thresholds[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2000,42:1537—1554.

[3] Komarov K L, Nemirovskii Y V. Dynamic behaviour of rigid-plastic rectangular plates[R]. UDC 624. 072. 22, 1985,21(7):69—76.

[4] Jones N. A theoretical study of the dynamic plastic behaviour of beams and plates with finite deflections[J]. International Journal of Solids & Structures, 1971,7:1007—1029.

[5] Baker W E. Approximate techniques for plastic deformation of structures under impulsive loading[J]. Shock Vibration Digest, 1975,7(7):107—117.

[6] Yu T X, Chen F L. The large deflection dynamic plastic response of rectangular plates[J]. International Journal of Impact Engineering, 1992,12(4):603—606.

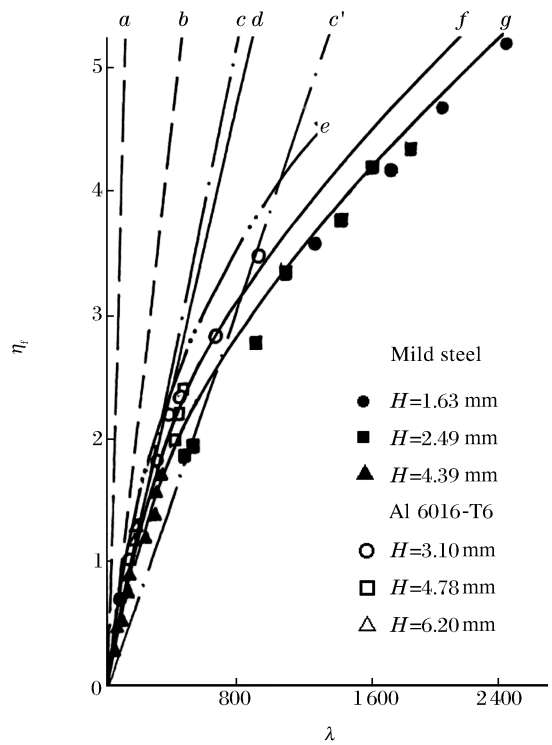


图 5 固支矩形板最终挠度的理论值与实验结果<sup>[10]</sup>比较  
Fig. 5 Comparison of theoretical and experimental<sup>[10]</sup> final deflection for fully clamped plates

- [7] Yu T X, Stronge W J. Large deflection of a rigid-plastic beam-on-foundation from impact[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1990,9:115–126.
- [8] Yu T X, Chen F L. Analysis of the large deflection dynamic response of simply-supported circular plates by the membrane factor method[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1990,6(4):333–342.
- [9] 陈发良,余同希. 正多边形板的塑性动力响应[J]. *爆炸与冲击*, 1991,11(2):106–116.  
CHEN Fa-liang, YU Tong-xi. Dynamic plastic response of regular polygonal plates[J]. *Explosion and Shock Waves*, 1991,11(2):106–116.
- [10] Jones N, Uran T, Tekin S A. The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1970,6:1499–1512.

## Dynamic plastic response of rectangular plates with plastic energy dissipation by membrane force

CHEN Fa-liang<sup>1\*</sup>, YU Tong-xi<sup>2</sup>

- (1. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China;*  
2. *Department of Mechanical Engineering, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong*)

**Abstract:** By reckoning the plastic dissipation by membrane force induced by finite deflection, a modifying factor is introduced into the bending-only theory to formulate the governing equations of dynamic plastic response of rectangular plates with deflections where bending moment and membrane force are both important. Based on a kinematically admissible, time-dependent velocity field, a complete theoretical investigation is undertaken to trace the finite deflection response of simply-supported or fully-clamped rigid-plastic rectangular plates to a rectangular pulse or impulsive loading. The present prediction on the final plate deflection agrees well with the corresponding experimental results for deflections up to about 10 times of the plate thickness. This theoretical treatment improves the estimates from the bending-only theory greatly and provides a complete response (including the transient phase) analysis of the rectangular plates, the predictions are much more reliable than the previous mode approximation.

**Key words:** solid mechanics; rigid-plastic response; effect of membrane force; rectangular plate; finite deflection

---

\* Corresponding author: CHEN Fa-liang  
E-mail address: flchen@iapcm.ac.cn  
Telephone: 010-62014411-3135