

文章编号: 1001-1455(2005)04-0361-07

# 子弹撞击作用下固支浅圆拱的弹塑性动力响应\*

刘 锋, 席 丰

(山东建筑工程学院, 山东 济南 250014)

**摘要:** 基于大变形动力学微分方程并利用有限差分离散分析, 研究了子弹撞击作用下固支浅圆拱的弹塑性动力响应。通过对响应不同时刻内力分布特征的分析, 阐明了圆拱的响应模式和变形机制。研究表明, 弹塑性响应过程可分为六个阶段。在响应早期, 拱的变形以塑性弯曲挠动由撞击点向拱根部传播为主; 在响应后期, 则主要以轴力主导下的轴向拉伸变形为主。在高速撞击下, 塑性弯曲挠动的不均匀性可以引起浅拱的反向弯曲变形。固支浅圆拱的动力响应对撞击速度的某个变化范围非常敏感, 在此范围内, 撞击速度的较小增加可以导致响应的很快增长, 但动力响应随撞击速度连续变化, 未发生突然的跳跃失稳。本文中计算结果同实验数据吻合较好。

**关键词:** 固体力学; 弹塑性动力响应; 有限差分; 浅圆拱; 数值模拟

**中图分类号:** O347.3

**国标学科代码:** 130·15

**文献标志码:** A

## 1 引 言

冲击载荷作用下, 关于浅拱的动力响应问题, 国内外学者已经做了大量的工作, 但大部分都是讨论相关的稳定性问题<sup>[1~3]</sup>。

然而, M. C. Cheung 等<sup>[4]</sup>有关浅拱在均布冲击载荷作用下动力响应的实验研究和理论分析却指出, 当载荷随时间变化时, 尽管结构的响应在某一载荷范围内变化很大, 却并不属于失稳过程。考虑到均布冲击载荷同子弹撞击是两种性质不同的载荷工况, 借助空气动力枪和高速摄影机, 李庆明等<sup>[5~6]</sup>对承受子弹撞击的浅圆拱进行了实验研究, 初步发现了拱结构动力响应的主要特征, 并对实验现象作了定性解释。在文献<sup>[5]</sup>中, 作者通过比较不同撞击速度下结构的最终位移后指出, 子弹撞击固支浅圆拱的过程中, 整个动力响应并不存在失稳现象。尽管如此, 弹塑性分析依然是必要的, 因为目前的实验研究尚不能观察到响应过程的全部细节, 因此不能进行更深入的机理分析。

本文中从大变形理论出发, 应用有限差分离散控制方程, 探讨浅圆拱在子弹撞击作用下的动力行为, 特别是考察固支浅圆拱的弹塑性响应模式和变形机制以及在不同撞击速度下响应特征的变化规律。文中基本假定:

- (1) 浅圆拱变形过程中截面为平截面, 忽略剪力对截面屈服的影响;
- (2) 材料为考虑强化效应的弹塑性材料, 忽略材料的应变率效应;
- (3) 子弹为刚性块, 在撞击过程中未发生变形。

## 2 基本控制方程及其有限差分离散形式

### 2.1 运动方程和几何方程

考虑如图 1 所示的固支浅圆拱, 半径为  $R$ , 张角为  $2\alpha$ , 拱高为  $f$ , 横截面宽、高分别为  $b, h$ , 材料密度为  $\rho$ , 材料屈服强度、弹性模量、塑性模量分别为  $\sigma_s, E, E_p$ , 刚性块质量和撞击速度分别为  $G, v_G$ 。在图示坐标系下, 取变形后微段, 从大变形理论出发, 列运动学方程<sup>[7]</sup>

\* 收稿日期: 2004-09-20; 修回日期: 2005-03-10

作者简介: 刘 锋(1977—), 男, 硕士研究生。

$$\begin{cases} \frac{\partial(N\cos\theta)}{\partial s} - \frac{\partial(Q\sin\theta)}{\partial s} + F_x - m\ddot{u} = 0 \\ \frac{\partial(N\sin\theta)}{\partial s} - \frac{\partial(Q\cos\theta)}{\partial s} + F_y - m\ddot{w} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $s$  为微段长,  $\theta$  为微段同  $x$  轴的夹角,  $m$  为微段质量,  $u, w$  分别为微段在  $x$  和  $y$  方向上的位移,  $F_x, F_y$  分别为沿  $x, y$  轴方向的外部载荷,  $M, N, Q$  分别为截面上的弯矩、轴力和剪力,  $\ddot{(\ )} = \frac{\partial^2(\ )}{\partial t^2}$ 。弯矩  $M$ 、轴力  $N$  分别定义为

$$M = \int_A \sigma z \, dA, \quad N = \int_A \sigma \, dA \quad (2)$$

式中:  $A$  为横截面面积,  $z$  为截面上一点到中轴的高度,  $\sigma$  为相应点处的应力。

若不计体力, 假定  $P_y$  为刚性块与浅拱之间的接触力, 则式(1)中载荷  $F_x, F_y$  可表示为

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = P_y \delta(x-0) \delta(y-f) \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\delta(x-0), \delta(y-f)$  为单位脉冲函数。由牛顿定律

$$P_y = -G\ddot{w}_G \quad (4)$$

式中:  $w_G$  为刚性块在  $y$  方向上的位移。

由平截面假定, 横截面上任意一点的应变

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa \xi = \frac{ds - ds_0}{ds_0} + \frac{(1 + u'')w' - u'w''}{[(1 + u')^2 + w'^2]^{3/2}} \cdot \xi \quad (5)$$

式中:  $\varepsilon_0$  为拉压应变,  $\kappa$  为曲率,  $\xi$  为点到截面中轴的距离,  $ds_0, ds$  分别为变形前和变形后微段的长度,

$$(\ )' = \frac{\partial(\ )}{\partial s}, (\ )'' = \frac{\partial^2(\ )}{\partial s^2}。$$

为了对控制方程进行空间离散, 将浅拱沿轴向等分为  $k$  微段(共  $k+1$  个结点), 沿截面高度方向等分为  $n$  层(如图 1 所示)

$$s_i = i\Delta s \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad z_j = j\Delta z \quad j = -n/2, \dots, n/2 \quad (6)$$

式中:  $\Delta s, \Delta z$  分别为取定的沿拱轴和截面高度方向的空间步长。

利用向前差分公式, 离散形式的运动学控制方程为

$$\begin{cases} N_{i+1} \cos\theta_{i+1} - N_i \cos\theta_i - Q_{i+1} \sin\theta_{i+1} + Q_i \sin\theta_i - m_i \ddot{u}_i = 0 \\ N_{i+1} \sin\theta_{i+1} - N_i \sin\theta_i + Q_{i+1} \cos\theta_{i+1} - Q_i \cos\theta_i - G\ddot{w}_G \delta(i-k/2) - m_i \ddot{w}_i = 0 \\ \frac{M_i - M_{i-1}}{ds_i} - Q_i = 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (7)$$

对几何方程进行差分离散

$$\varepsilon_i^j = \sqrt{\left(1 + \frac{u_{i+1} - u_i}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{w_{i+1} - w_i}{ds_0}\right)^2} - 1 + \frac{(ds_0 + u_{i+1} - u_i)(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) - (w_{i+1} - w_i)(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}{[(w_{i+1} - w_i)^2 + (ds_0 + u_{i+1} - u_i)^2]^{3/2}} z_j \quad (8)$$

式中:  $i = 0, 1, \dots, k; j = -n/2, \dots, n/2$ 。

弯矩  $M$  和轴力  $N$  的离散求解形式为

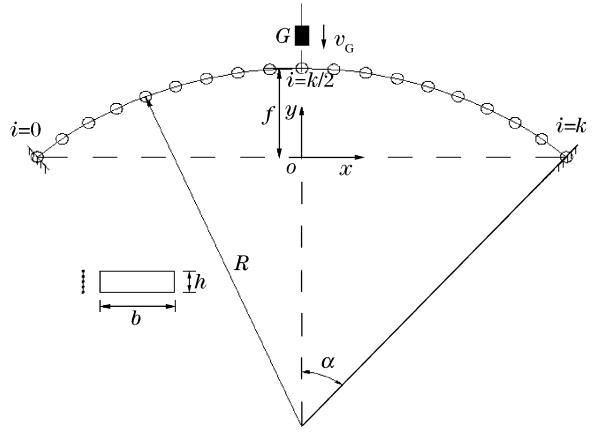


图 1 承受子弹撞击作用的固支浅圆拱及其离散模型  
Fig. 1 A clamped shallow arch subjected to projectile impact and its discrete model

$$N_i = \frac{A}{n} \sum_{j=-n/2}^{n/2} \sigma_j^i, \quad M_i = \frac{A}{n} \sum_{j=-n/2}^{n/2} \sigma_j^i z_j \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (9)$$

对于刚性块撞击前静止的浅圆拱, 给定如下初始条件

$$t = 0, \quad u_i = 0, \quad \dot{u}_i = 0, \quad w_i = 0, \quad \dot{w}_i = 0, \quad v_G = v_0 \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (10)$$

## 2.2 应力应变关系及加、卸载规则

对于线性-弹性强化材料模型, 其增量应力应变关系的数学表达式为

$$\Delta\sigma = \begin{cases} E\Delta\epsilon & \sigma_i^n \leq \sigma \leq \sigma_i^m \\ E_p\Delta\epsilon & \sigma > \sigma_i^m, \Delta\epsilon > 0 \quad \text{or} \quad \sigma < \sigma_i^n, \Delta\epsilon < 0 \end{cases} \quad (11)$$

式中:  $\sigma_i^m$ 、 $\sigma_i^n$  分别为正向和反向屈服应力; 当  $i = 1$  时,  $\sigma_1^m = \sigma_s$ ,  $\sigma_1^n = -\sigma_s$ 。

## 2.3 位移的求解

由式(7)求得结点加速度后, 利用中心差分法, 可求得下一时刻的位移

$$\begin{cases} w_i^{q+1} = \ddot{w}_i^q (\Delta t)^2 + 2w_i^q - w_i^{q-1} \\ u_i^{q+1} = \ddot{u}_i^q (\Delta t)^2 + 2u_i^q - u_i^{q-1} \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $\Delta t$  为取定的时间步长,  $q$  表示不同时刻。

利用求得的位移  $u_i^{q+1}$ 、 $w_i^{q+1}$ , 可计算  $t^{q+1}$  时刻的  $\Delta\epsilon_i^{q+1}$ , 进而计算  $\Delta\sigma_i^{q+1}$  和  $\sigma_i^{q+1}$ ; 求得弯矩和轴力后, 再由运动方程得到  $\ddot{u}_i^{q+1}$ 、 $\ddot{w}_i^{q+1}$ 。如此往复, 逐步进行, 即可确定浅拱的弹塑性动力响应历史。

## 3 数值计算结果和讨论

### 3.1 计算参数的选取

计算中取文献[5]中的实验数据, 但在讨论浅拱动力响应模式时, 为了与刚塑性分析进行比较, 忽略材料的强化效应。拱半径  $R = 0.315$  m、张角  $\alpha = 29^\circ$ ; 横截面高度  $h = 2.86$  mm、宽度  $b = 15$  mm; 材料密度  $\rho = 2.7$  t/m<sup>3</sup>、屈服应力  $\sigma_s = 105$  MPa; 材料的弹性模量  $E = 53.3$  GPa、塑性模量  $E_p = 495$  MPa; 理想塑性极限弯矩  $M_p = \sigma_s b h^2 / 4 = 3.221$  N·m、极限轴力  $N_p = \sigma_s b h = 4.5045$  kN; 刚性块质量  $G = 25.3$  g、撞击速度  $v_0 = 0.0 \sim 80.0$  m/s。

### 3.2 浅拱的动力响应模式

计算中, 取拱轴向微段数为 40, 截面高度方向层数为 6, 时间步长  $\Delta t = 0.5$   $\mu$ s。图 2~图 7 是撞击速度  $v_0 = 66.5$  m/s 时, 不同时刻沿拱轴方向上的弯矩和轴力分布图。考虑结构对称性, 只分析半跨浅拱的动力响应特征。根据内力的变化规律, 可将整个响应过程分为六个阶段:

第一阶段(见图 2)( $t = 0 \sim 0.170$  ms), 弹塑性弯曲波传播阶段。撞击瞬间, 在撞击点及其两侧同时产生三个接近塑性极限弯矩的弯矩峰值。撞击点处弯矩峰值接近负的极限弯矩, 对应于驻定铰; 而两侧峰值接近正的极限弯矩, 并向固定端传播, 对应于移行铰。该阶段呈现弯曲波传播特征。

第二阶段(见图 3)( $t = 0.170 \sim 0.400$  ms), 弹塑性弯曲波相互作用阶段。弹塑性弯曲波的波前到达拱固定端并发生反射, 然后同迎面而来的塑性波相互作用, 迭加增强后, 使固定端处弯矩接近极限弯矩, 即形成驻定塑性铰。此时, 撞击点处的驻定铰和跨中移行铰依然存在。

第三阶段(见图 4)( $t = 0.400 \sim 0.850$  ms), 双铰阶段。弹塑性弯曲波反射结束, 固定端处弯矩峰值减小, 此处的驻定铰消失, 但其他移行铰和驻定铰依然存在。

第四阶段(见图 5)( $t = 0.850 \sim 1.400$  ms), 双驻定铰阶段。固定端处弯矩值重新接近正的塑性极限弯矩, 重新形成驻定塑性铰。跨中移行塑性铰消失, 受撞击点驻定塑性铰仍然存在。

第五阶段(见图 6)( $t = 1.400 \sim 2.600$  ms), 轴向拉伸阶段。受撞击点弯矩绝对值小于极限弯矩, 跨中驻定铰消失, 而固定端处驻定铰依然存在。图 7 给出了此时间段内轴力的分布, 自  $t = 1.20$  ms 起, 轴力逐渐增大,  $t = 2.30$  ms 时接近极限轴力, 浅拱近似为一塑性弦;  $t = 2.50$  ms 后, 各截面轴力迅速减小,  $t = 2.90$  ms 时接近零值, 表明无轴向拉伸变形。因此, 此阶段轴向拉伸变形为拱的主要变形模式。

第六阶段(见图6)( $t \geq 2.600$  ms),弹性振动阶段。从 $t = 2.600$  ms开始,固定端处的驻定铰也已消失,浅拱进入完全的弹性自由振动阶段。至此,子弹撞击作用下固支浅圆拱的动力响应全部结束。

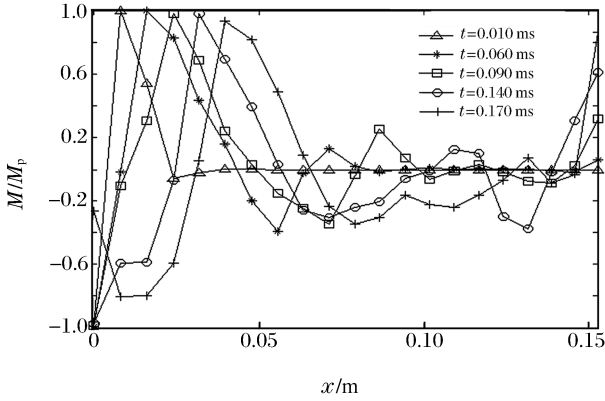


图2 第一相弯矩图

Fig. 2 Bending moment diagrams in phase 1

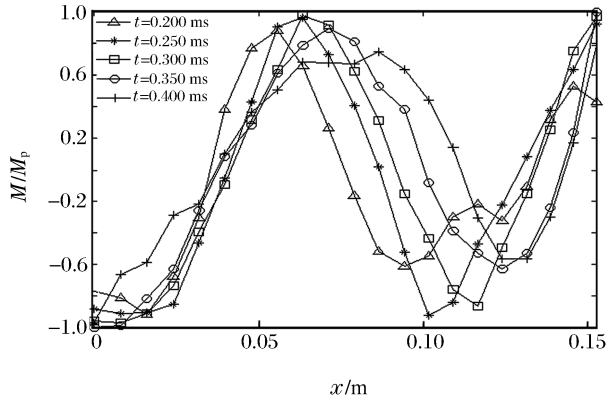


图3 第二相弯矩图

Fig. 3 Bending moment diagrams in phase 2

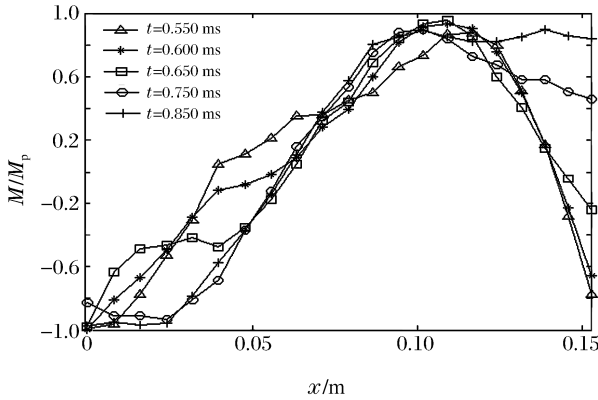


图4 第三相弯矩图

Fig. 4 Bending moment diagrams in phase 3

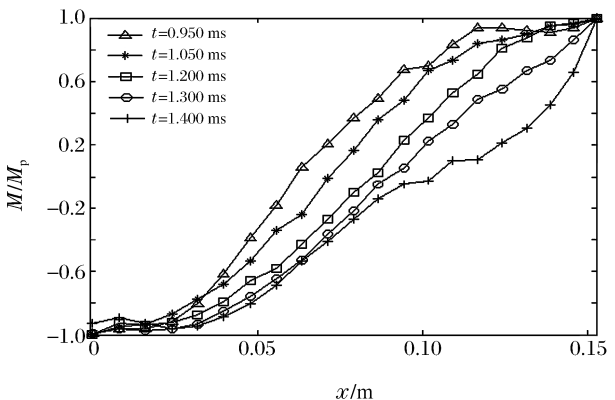


图5 第四相弯矩图

Fig. 5 Bending moment diagrams in phase 4

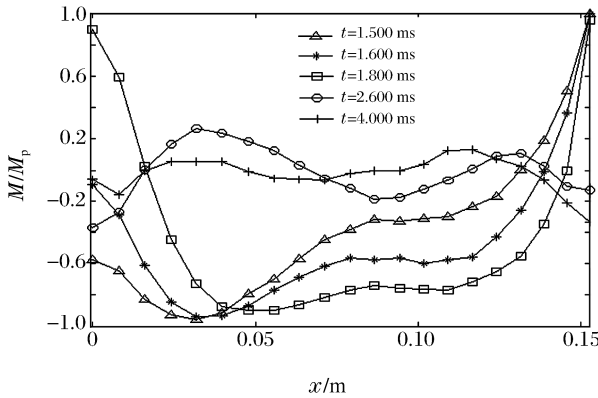


图6 第五、六相弯矩图

Fig. 6 Bending moment diagrams in phases 5 and 6

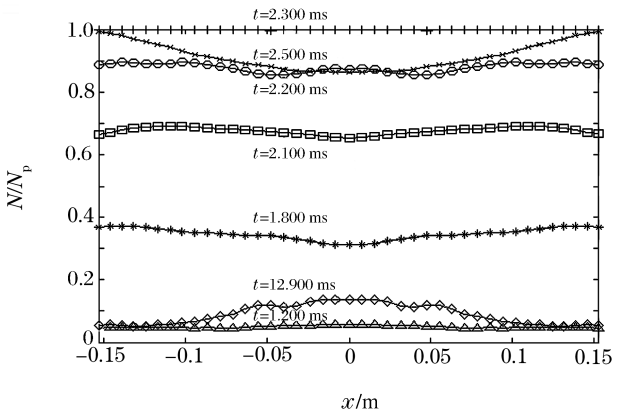


图7 不同时刻轴力分布图

Fig. 7 Axial forces diagrams at different instants

### 3.3 其他撞击速度下的讨论

现考察不同撞击速度下浅拱动力响应的特征。

图8给出了不同撞击速度下拱轴上各点应变历史。图8(a)表明:撞击速度较小时,拱轴上各点应变值较小,浅拱在响应全过程中,一直处于轴向受压状态;撞击速度较大时,见图8(b),拱轴上各点的应

变值较大,浅拱在响应早期处于受压状态,而在响应后期,应变符号产生变化,浅拱处于轴向拉伸状态。轴向拉伸达到最大值的时间约为 2.50 ms,与文献[5]中采用高速摄影机所测得的实验结果一致。由图 8(b)还可发现,尽管结构在响应的早期承受轴向压缩,但变形主要以塑性弯曲挠动的形式由撞击点向固定端传播,而在响应后期,弯曲变形退居次要地位,轴向拉伸变形成为主要模式,这也验证了本文中有关响应模式分析所得到的结论。

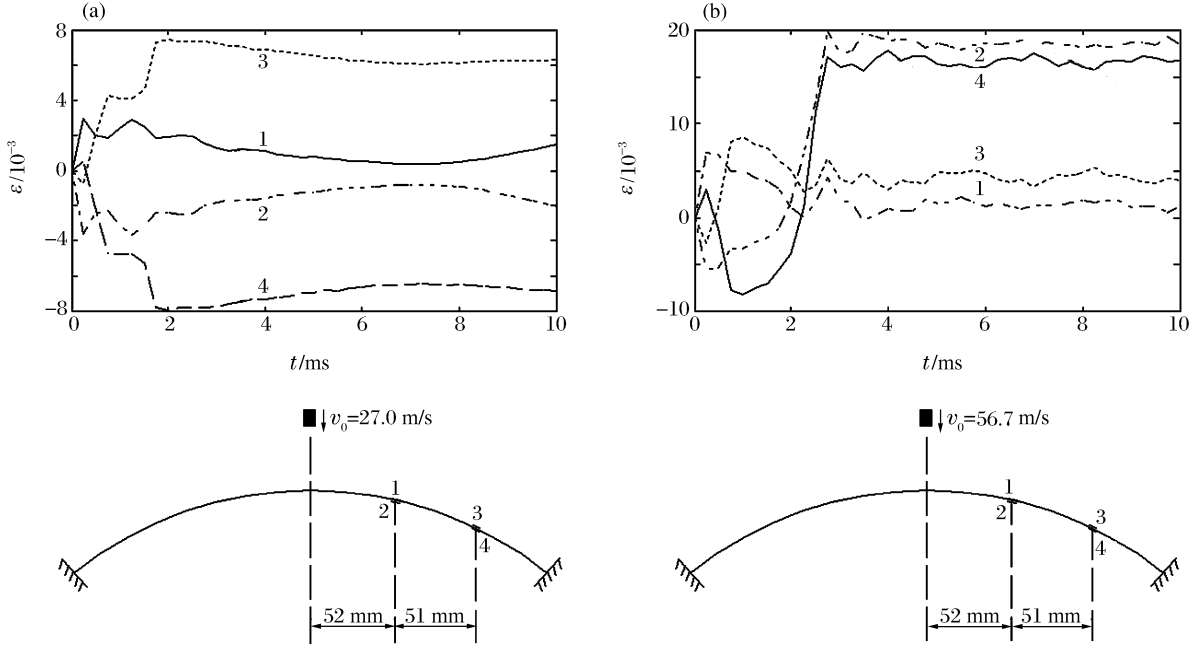


图 8 对于不同的撞击速度,图示各点的应变历史曲线

Fig. 8 Strain histories at different points on the arch at different impact velocities

由以上分析可知:撞击速度较小时,结构变形较小,尽管结构在响应过程中受压,但轴力较小,因此可忽略轴力对屈服的影响,从而简化对此结构所进行的刚塑性分析;撞击速度较大时,结构将产生大变形,轴力主导下的轴向拉伸变形是结构后期响应的主要变形模式,必须综合考虑弯矩、轴力对整个动力响应过程的不同影响,才能得到关于此问题正确的分析结果。

图 9 是  $v_0 = 54.3 \text{ m/s}$  时,时间间隔为 0.227 ms 的变形曲线,与文献[5]的高速摄影结果符合较好。自开始撞击,到经历轴向拉伸,共持续 2.50 ms,与实验观察吻合很好。图 9 中还可看到,自 2.50 ms 起,拱上各点位移没有产生大的变化,相应于响应模式分析中的弹性振动阶段。

图 10 为  $v_0 = 27.0$ 、 $v_0 = 66.5 \text{ m/s}$  时曲率变化  $\Delta\kappa$  的分布图,取撞击前拱上各点的曲率  $\kappa$  为正值,使  $\kappa$  值增加的  $\Delta\kappa$  记为正变化,反之为负变化。可以看到,在整个响应过程中,拱轴上各点曲率变化不均匀;撞击点附近,曲率发生负变化;固定端处,曲率发生正变化;撞击速度较小时,除撞击点附近,拱轴大部分截面曲率变化为正值;撞击速度较大时,拱轴上局部截面曲率变化为负值。曲率变化的不均匀性表明,在撞击过程中,拱上各点所经历的弯曲挠动存在差异。另外,在高速撞击下,局部区域的负曲率变化意味着结构产生了反向弯曲变形。

为了考察不同撞击速度下拱结构最终位移的变化情况,取撞击速度  $v_0 = 0.0 \sim 80.0 \text{ m/s}$  进行计算。图 11、图 12 分别给出了最终位移与撞击速度的关系曲线和不同撞击速度下浅拱的最终变形曲线。

图 11 表明,  $v_0 < 4.0 \text{ m/s}$  时,浅拱只产生弹性变形;  $v_0 = 4.0 \sim 13.7 \text{ m/s}$  时,浅拱可以发生塑性变形但最终位移很小;  $v_0 = 13.7 \sim 38.4 \text{ m/s}$  时,拱结构的最终位移对撞击速度的变化非常敏感,撞击速度的微小增加可导致最终位移的很快增长;  $v_0 > 38.4 \text{ m/s}$  时,最终位移随撞击速度的增加而增长缓慢。从图 11 中可知,在撞击速度的整个变化范围内,撞击速度同结构最终位移的关系始终是连续变化的,没有发生因为撞击速度的微小增大而导致最终位移发生很大增加的跳跃失稳。计算结果表明,对于此类固



支浅圆拱确实不存在失稳现象。然而,响对于某一载荷范围的敏感性在实际工程中有重要的意义。

由图 12 可以看到:撞击速度较小时,拱结构只在受撞击点处产生反向弯曲变形;撞击速度较大( $v_0 > 38.4 \text{ m/s}$ )时,拱结构的大部分截面均产生反向弯曲变形,与前面分析曲率变化所得出的结论一致。

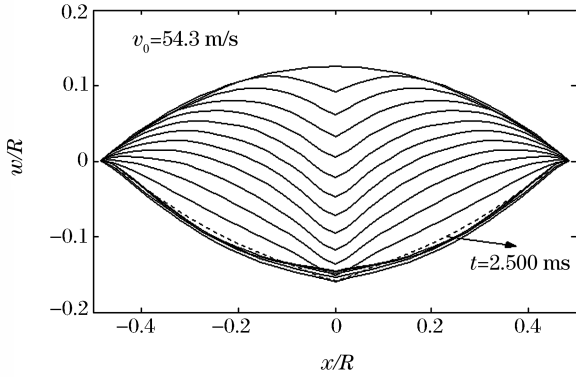


图 9 不同时刻的变形曲线

Fig. 9 Deformation diagrams at different times

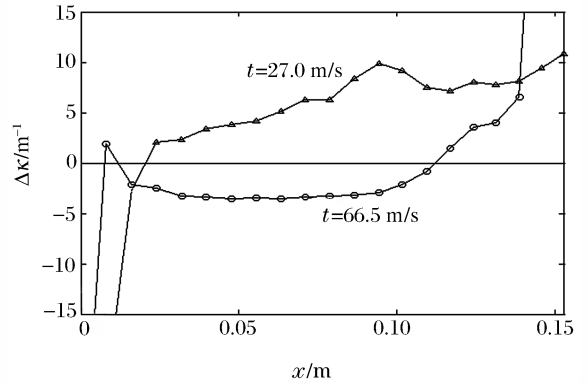


图 10 不同的撞击速度下的曲率变化分布图

Fig. 10 Variation of the curvature along the arch at different impact velocities

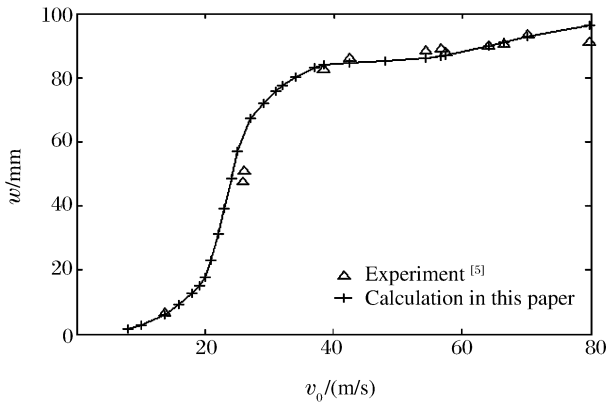


图 11 撞击速度与结构最终位移的关系

Fig. 11 Variatoin of final deflection with impact velocity

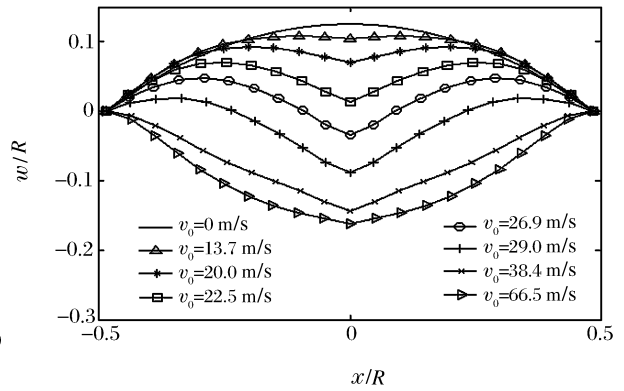


图 12 不同的撞击速度下,结构的最终变形

Fig. 12 Final deformation at different impact velocities

## 4 结论

固支浅圆拱在子弹撞击作用下的动力响应比较复杂,整个响应过程可分为以下几个阶段:

(1)受撞击点存在驻定铰的弹塑性弯曲波传播模式;(2)在跨中和固定端处分别存在驻定塑性铰,并且在跨内存在移行塑性铰的三铰模式;(3)受撞击处存在驻定塑性铰和拱跨内存在移行塑性铰的双铰模式;(4)只在受撞击点和固定端存在塑性铰的双驻定铰模式;(5)轴力主导整个浅拱变形的轴向拉伸模式;(6)不存在任何塑性铰的弹性振动模式。

不同撞击速度作用下,浅拱的动力响应也有区别:

(1)撞击速度较小时,尽管结构在响应过程中受压,但幅度较小,可以忽略轴力对其动力响应的贡献;撞击速度较大时,结构在响应的早期受压,而在响应的后期受拉,轴向拉伸变形是其后期变形的主要模式,轴力对结构变形的影响不可忽略。

(2)撞击速度较大时,由于拱上各点弯曲挠动的不均匀性以及轴向拉伸作用,将使拱上局部区域曲率为负变化,结构产生反向弯曲变形。

(3)结构动力响应对撞击速度的某个变化范围特别敏感,撞击速度的微小增加可导致结构响应的很快增长,然而,在整个撞击速度的变化范围内,浅拱最终位移的变化是连续的,没有发生突然跳跃失稳。

感谢英国曼彻斯特大学李庆明博士对本文提供的帮助和修改意见。

## 参考文献:

- [1] Humphreys J S. On dynamic snap buckling of shallow arches[J]. *AIAA Journal*, 1966,4(5):878—886.
- [2] Simistes G J. Instability of dynamically-load structures[J]. *Applied Mechanics Review*, 1987,40(10):1403—1408.
- [3] 席丰,杨嘉陵. 考虑初始几何缺陷时复合材料层合浅拱的动态跳跃[J]. *固体力学学报*,1996,17(2):172—178.  
XI Feng, YANG Jia-ling. The dynamic snap-through of laminated composite shallow arches with initial geometrical imperfections[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996,17(2):172—178.
- [4] Cheung M C, Babcock C D. Stability of a clamped shallow arch subjected to impulsive loading[J]. *AIAA Journal*, 1970,8(8):1434—1439.
- [5] 李庆明,赵隆茂. 固支浅圆拱受子弹撞击的实验研究[J]. *爆炸与冲击*,1991,11(3):238—243.  
LI Qing-ming, ZHAO Long-mao. Experimental investigation of clamped shallow arches subjected to projectile impact[J]. *Explosion and Shock Waves*, 1991,11(3):238—243.
- [6] Li Q M, Zhao L M. Experimental investigation of circular arches subjected to projectile impact[A]. *Proceedings of International Conference of Applied Mechanics[C]*. Beijing: Peking University Press, 1989.
- [7] Hashmi S J, AL-Hassani S T S, Johnson W. Large deflection elastic-plastic response of certain structures to impulsive loads; Numerical solution and experimental results[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1972, 14(12):843—860.

## Elastic-plastic dynamic response of a fully clamped shallow arch subjected to projectile impact

LIU Feng, XI Feng\*

(Shandong Institute of Architecture and Engineering, Jinan 250014, Shandong, China)

**Abstract:** Based on large deformation dynamic equation and finite difference method, the elastic-plastic dynamic responses of a fully clamped shallow arch subjected to projectile impact were studied numerically. Through analyzing the instantaneous distribution of the internal forces during early time response, the elastic-plastic deformation mechanism and mode were illustrated. The deformation mode consists of six phases. In the early phase of impact, the propagation of plastic bending deformation from the impact point to the root of arch dominated the deformation mode. While in the later phase, the deformation of axial tension governed by the axial force was dominant. Under the high-velocity projectile impact, the uneven plastic bending deformation can cause the arch to produce reversed flexural deformation. It can also be seen that the dynamic response of arch was very sensitive to a certain range of impact speed. In this range, tiny increase of initial projectile velocity can cause rapid increase of displacement. However, variation of dynamic response with impact speed was continuous without abrupt lose of stability. Numerical results were in good agreement with the experimental results from literature [5].

**Key words:** solid mechanics; elastic-plastic dynamic response; finite difference; shallow arch; numerical simulation

---

\* Corresponding author: XI Feng  
E-mail address: sdxifeng@sina.com  
Telephone: 0531-86985803