

文章编号: 1001-1455(2006)01-0065-06

多流体界面不稳定性的守恒和非守恒高精度数值模拟方法*

张学莹¹, 赵 宁¹, 朱 君²

(1. 南京航空航天大学航空宇航学院, 江苏 南京 210016;

2. 南京航空航天大学理学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 对多流体界面问题守恒和非守恒格式(M)WENO 重构方法进行探讨, 采用虚拟流动方法并用 Level-Set 函数捕捉界面的运动变化。数值模拟结果表明本文的数值方法具有较高的分辨率, 并能有效地抑制界面附近的非物理振荡。

关键词: 流体力学; 守恒和非守恒(M)WENO 格式; Level-Set 方法; 多介质流体界面; GFM 方法

中图分类号: O354; O241

国标学科代码: 130 · 25

文献标志码: A

1 引 言

多介质流体界面问题的数值模拟涉及到很多重要的工程技术领域和学科。它在流体力学、材料科学、核科学、天体力学和核物理等研究领域有重要的作用, 如气泡的变形与塌陷、超高速发射、水下爆炸、R-M 不稳定性、晶体的形成与发展、火焰的闪烁和金属的浇铸等问题。

目前有许多重要的运动界面追踪技术, 如 VOF 方法、Front-Tracking 方法、Level-Set 方法。其中 Level-Set 方法用 LS 函数捕捉界面, 简捷且易于处理界面拓扑结构的变化。一般情况下界面沿着法向速度是变化的, 经过有限的时间步后, Level-Set 等值线的梯度可能变得剧烈或者很平缓, 在计算过程中保持 LS 函数为距离函数是必要的, S. Chen 等^[1]和 D. Adalsteinsson 等^[2]对 Level-set 及重新初始化方法进行了研究。由于数值耗散常常会使初始时极薄的扰动界面在推进几个时间步后就跨越几个网格, 传统的激波捕捉方法必然引进界面两侧的物理量, 会在界面附近引起伪振荡。R. Fedkiw 等^[3~4]提出的 Ghost Fluid Method 解决了一类界面为弱间断的多介质界面问题, 并把该方法推广用于强间断问题的数值模拟。C. W. Shu^[5]、G. S. Jiang 等^[6]和 D. Balsara 等^[7]对高分辨率 WENO 激波捕捉格式进行了研究, 宗文刚等^[8]提出一种双重加权基本无振荡(DWENO)格式, 引进高于 k 阶网格模板上插值多项式的信息, 理论上应该比 WENO 格式有更强捕捉激波的能力。

本文中主要探讨双曲守恒律方程组守恒和非守恒格式(M)WENO 重构技术并将其应用于多介质流体界面的数值模拟。传统的数值格式在整个流场几乎采用相同的计算格式, 必然引进界面两侧的状态量, 会引起界面附近的非物理振荡, 本文中采用虚拟流动方法^[3~4]减小伪振荡并用 Level-Set 函数捕捉界面的位置, 最后对多流体界面问题进行数值模拟。

2 控制方程

以一维问题为例进行说明, 多维问题采用维数分裂(dimension by dimension)的思想, 在每个坐标方向上类似一维的情况进行处理。双曲守恒律方程组可以写成

$$U_t + F_x(U) = 0 \quad (1)$$

* 收稿日期: 2004-12-27; 修回日期: 2005-04-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(10576015); 国防科技重点实验室基金项目(51479010205HK0207)

作者简介: 张学莹(1973—), 男, 博士。

式中: \mathbf{U} 和 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 是由 m 个分量组成的向量

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (f_1(\mathbf{U}), f_2(\mathbf{U}), \dots, f_m(\mathbf{U}))^T$$

为了捕捉界面的运动变化过程, 引入了一个 Level-Set 函数 Φ , 写成如下的形式

$$\Phi_t + \mathbf{W} \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (2)$$

式中: \mathbf{W} 表示界面的运动速度, 选择距离函数作为 Level-Set 函数的初始值。要使 Level-Set 函数保持距离函数的性质, 即满足 $|\nabla \Phi| = 1$, 需要在每个时间推进步对 Level-Set 函数进行重新初始化。在计算过程中, 方程组(1)和 LS 方程(2)分别单独求解。对方程(2)进行如下离散

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i} [u^+(\Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n) + u^-(\Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n)] \quad (3)$$

式中: $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$, 第 n 时间层网格单元边界值 $\Phi_{i+1/2}^n$ 、 $\Phi_{i-1/2}^n$ 由 WENO5 插值得到。

3 几种重构方法

3.1 守恒格式的(M)WENO 重构

守恒形式半离散格式为

$$\frac{d\mathbf{U}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2}) \quad (4)$$

对数值通量 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}$ 进行如下分解

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \sum_{s=1}^m (\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{s,+} + \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{s,-}) \tilde{\mathbf{R}}_{i+1/2}^s \quad (5)$$

式中: $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^s$ 、 $\tilde{\mathbf{R}}_{i+1/2}^s$ 为列向量, $\tilde{\mathbf{L}}_{i+1/2}^s$ 为行向量, $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{s,+}$ 为第 s 个分量。对于一阶迎风格式

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{s,+} = \tilde{\mathbf{L}}_{i+1/2}^s \cdot \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_{i+1/2}^s + |\tilde{\lambda}_{i+1/2}^s|) \mathbf{U}_i, \quad \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{s,-} = \tilde{\mathbf{L}}_{i+1/2}^s \cdot \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_{i+1/2}^s - |\tilde{\lambda}_{i+1/2}^s|) \mathbf{U}_{i+1} \quad (6)$$

WENO 插值构造是利用模板上所有网格点的信息, 对包含网格点 i 的每个子网格模板上构造的插值多项式进行一次凸组合。第 l 个子网格模板记为

$$S_{i,l}(i) = \{I_{i+l-k+1}, I_{i+l-k+2}, \dots, I_{i+l}\} \quad l = 0, 1, \dots, k-1$$

共有 k 个子网格模板, 在每个子网格模板上构造相应的 k 阶插值多项式为 $p_i^{(l)}(x)$, 这样在整体网格模板

上的插值多项式 $Q(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l p_i^{(l)}(x)$ 可以达到 $(2k-1)$ 阶精度, ω_l 为第 l 个插值多项式 $p_i^{(l)}(x)$ 对应的

权系数。文献[5]给出了 $k=1 \sim 7$ 时网格模板上构造插值多项式的系数。(6)式中的第 s 个分量由 k 个子网格模板上插值多项式加权构造。在第 l 个子网格模板上, 对数值通量分量在网格点上的值进行 WENO 插值重构, 有

$$\{\tilde{\mathbf{F}}_{i+l-k+1, i+1/2}^{s,+}, \tilde{\mathbf{F}}_{i+l-k+2, i+1/2}^{s,+}, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{i+l, i+1/2}^{s,+}\} \quad l = 0, 1, \dots, k-1$$

其中

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+l, i+1/2}^{s,+} = \tilde{\mathbf{L}}_{i+l}^s \cdot \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_{i+l}^s + |\tilde{\lambda}_{i+l}^s|) \mathbf{U}_{i+l} \quad (7)$$

类似地, 可以得到 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+l, i+1/2}^{s,-}$ 。这样把这 k 个插值多项式按照相应的权系数进行加权组合得

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{s,+} = \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l p_{i,l}^{s,+} (\tilde{\mathbf{F}}_{i+l-k+1, i+1/2}^{s,+}, \tilde{\mathbf{F}}_{i+l-k+2, i+1/2}^{s,+}, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{i+l, i+1/2}^{s,+}) \quad (8)$$

类似地, 可以得到 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{s,-}$ 。这样重构得到(5)式中的网格单元边界 $x_{i+1/2}$ 上数值通量值 $\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^s$, 从而形成

格式(4)。权系数 ω_l 的计算为 $\omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l}$, $\alpha_l = \frac{c_l}{(\epsilon + IS_l)^2}$, $l = 0, 1, \dots, k-1$ 。 IS_l 为插值多项式的光滑因子, ϵ 一般取为 $10^{-5} \sim 10^{-7}$ 。光滑因子是表示插值多项式光滑程度的度量, 即表明插值多项式函数振荡程度如何。光滑因子的计算方法参见文献[6], $k=4 \sim 7$ 时的光滑因子的数值见文献[7]。

下面给出另一种相似的 WENO 重构方法, 对于一阶迎风重构, 在(5)式中

$$\tilde{F}_{i+1/2}^{s,+} = \tilde{L}_{i+1/2}^s \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i + \tilde{\lambda}_{i+1/2}^s \mathbf{U}_i) \quad (9)$$

$$\tilde{F}_{i+1/2}^{s,-} = \tilde{L}_{i+1/2}^s \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+1} - \tilde{\lambda}_{i+1/2}^s \mathbf{U}_{i+1}) \quad (10)$$

式中: $\tilde{\lambda}_{i+1/2}^s = \xi \max(|\lambda_{i+1/2}^s|, |\lambda_i^s|, |\lambda_{i+1}^s|)$, ξ 是可以调节的常数, 可取 $\xi = 1.1 \sim 1.5$ 。 $\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_{i+1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}$ 都为列向量。在一阶迎风重构的基础上进行 WENO 重构

$$\tilde{F}_{i+l,i+1/2}^{s,+} = \tilde{L}_{i+1/2}^s \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+l} + \tilde{\lambda}_{i+1/2}^s \mathbf{U}_{i+l}) \quad (11)$$

式中: $\tilde{\lambda}_{i+1/2}^s = \xi \max(|\tilde{\lambda}_{i+1/2}^s|, |\lambda_{i+l-k+1}^s|, \dots, |\lambda_{i+l}^s|)$, $l=0, 1, \dots, k-1$, ξ 的取法同上。按照上面的插值方法在网格模板 $S_{i,l}(i)$ ($l=0, 1, \dots, k-1$) 上进行 WENO 插值并进行加权组合求得 $\tilde{F}_{i+1/2}$ 形成格式(4)。

多重加权基本无振荡(MWENO)格式的构造通过引进各个 k 阶网格模板和高于 k 阶的网格模板, 并在相应的网格模板上构造高阶插值多项式, 按照适当的权系数对插值多项式进行一次凸组合, 从而得到网格单元边界上的插值多项式。由于 MWENO 格式利用了更高阶网格模板上插值多项式的信息, 理论上应该比 WENO 格式有更强的捕捉间断的能力。MWENO 重构方法与文献[8]中双重加权基本无振荡(DWENO)重构思想类似。

3.2 迎风型 WENO 重构

把方程组(1)改写成拟线性的形式

$$\mathbf{U}_t + \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{U}}) \tilde{\mathbf{U}}_x = \mathbf{0} \quad (12)$$

K. M. Shyue^[9]将波传算法^[10]用来模拟多介质流体界面问题, 这种方法是在一阶迎风格式的基础上加上流量校正项, 使格式达到二阶精度。同样基于一阶迎风格式, 本文中不是增加流量校正项, 而是对守恒变量在网格单元边界上进行多重加权基本无振荡(MWENO)重构, 从而获得高阶数值计算格式。对拟线性方程组进行迎风型离散

$$\frac{d\tilde{\mathbf{U}}_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i} \tilde{\mathbf{A}}^+ (\mathbf{U}_{i+1/2}^{n,-} - \mathbf{U}_{i-1/2}^{n,-}) - \frac{1}{\Delta x_i} \tilde{\mathbf{A}}^- (\mathbf{U}_{i+1/2}^{n,+} - \mathbf{U}_{i-1/2}^{n,+}) \quad (13)$$

式中: $\tilde{\mathbf{A}}^\pm = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{R}} \text{diag}(\tilde{\lambda}_{i+1/2}^{s,\pm}, \tilde{\lambda}_{i+1/2}^{s,\pm}, \dots, \tilde{\lambda}_{i+1/2}^{s,\pm}) \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{L}}^s$ ($s=1, 2, \dots, m$) 为左特征行向量, $\tilde{\mathbf{R}}^s$ ($s=1, 2, \dots, m$) 为右特征列向量。 $\tilde{\mathbf{A}}^+, \tilde{\mathbf{A}}^-$ 分别用网格单元 i 边界点 $i+1/2$ 和 $i-1/2$ 的右状态和左状态进行 Roe 平均。注意到在相同位置 $x_{i+1/2}$ 而上标 \pm 不同的边界点的值的区别在于: $\mathbf{U}_{i+1/2}^{n,-}$ 是关于网格单元 I_i 构造的(M)WENO 插值多项式在右边界点的值, $\mathbf{U}_{i+1/2}^{n,+}$ 是关于网格单元 I_{i+1} 构造的(M)WENO 插值多项式在左边界点的值, 其中 \mathbf{U} 为需要被重构的变量。

4 GFM 方法^[3~4]

在多介质流的数值模拟中, 传统的激波捕捉方法在整个流场几乎采用一致的数值格式, 对于跨界面的网格点, 必然会引进界面两侧的状态量, 因而会引起非物理振荡, 给数值模拟带来较大的误差。GFM 方法引进了虚拟流体的概念。对于界面为弱间断的情况, 界面处的法向速度 v_n 和压强 p 应满足条件: $[v_n]=0, p=0$ 。这说明在界面附近的网格点上, 虚拟流体的法向速度等于真实流体的法向速度, 虚拟流体的压强等于真实流体的压强, 此时界面以当地真实流体的速度移动。用等压装配方法在法线方向上求解定常外插的偏微分方程对熵进行外推, 求解的外插方程为

$$\mathbf{I}_t \pm \mathbf{n} \cdot \nabla I = \mathbf{0} \quad (14)$$

式中: I 为需要外推的变量, \mathbf{n} 为界面的法方向。在方程(13)中取“+”时, 用 $\Phi < -\epsilon$ 区域内 I 值组装 $\Phi > -\epsilon$ 区域内 I 的虚拟值, 保持 $\Phi < -\epsilon$ 区域内的流体真实值不变。取“-”时, 用 $\Phi > \epsilon$ 区域内 I 值组装 $\Phi < \epsilon$ 区域内 I 的虚拟值, 而保持 $\Phi > \epsilon$ 区域内的流体真实值不变。一般地, 取 $\epsilon = 1.5 \max(\Delta x, \Delta y)$ 。对方程(14)求解几个简单的时间步就可以在界面附近的带状区域内获得所需要的物理量值。

5 数值算例

下面进行数值模拟以验证数值方法的有效性。例1~2中, ρ 、 u 、 p 的单位分别为 kg/m^3 、 m/s 、 MPa 。例3~5中,各量已作无量纲处理。

例1 一维界面不稳定性问题。初始界面位于 $x=0.5\text{ m}$ 处,在 $x=0.0625\text{ m}$ 的波后和波前状态分别为:当 $x<0.0625\text{ m}$ 时, $(\rho,u,p,\gamma)=(4.3333,3.2817\sqrt{10^5},1.5,1.4)$,当 $0.0625\text{ m}\leq x<0.5\text{ m}$ 时, $(\rho,u,p,\gamma)=(1.0,0,0.1,1.4)$,当 $x\geq 0.5\text{ m}$ 时,静止的气体状态为 $(\rho,u,p,\gamma)=(3.1538,0,0.1,1.249)$,计算网格数为400,密度和Level-Set函数分布如图1。

例2 一维激波管问题。当 $x<0.5\text{ m}$ 时, $(\rho,u,p,\gamma)=(3.0,0,0.2,1.4)$,当 $x\geq 0.5\text{ m}$ 时, $(\rho,u,p,\gamma)=(1.58317,0,0.980665,1.4)$,计算网格数为400,密度分布如图2。

例3 Lax问题。初始状态为:当 $x<0.5$ 时, $(\rho,u,p,\gamma)=(0.445,0.698,3.528,1.4)$,当 $x\geq 0.5$ 时, $(\rho,u,p,\gamma)=(0.5,0,0.571,1.4)$,计算网格数为400,用不同方法计算的密度和LS分布如图3。

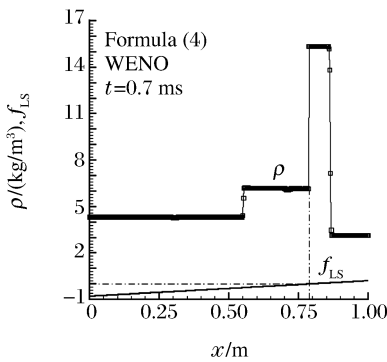


图1 一维界面不稳定性问题

Fig.1 Interface instability problem in one dimension

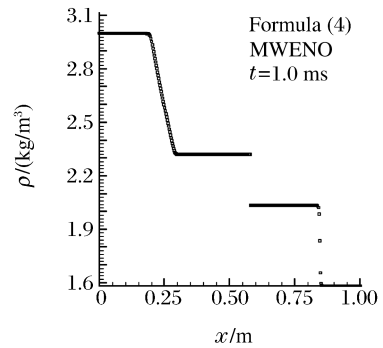


图2 一维激波管问题

Fig.2 Shock tube problem in one dimension

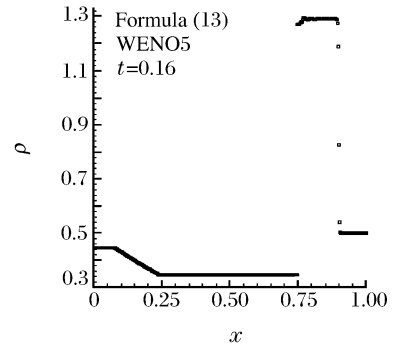
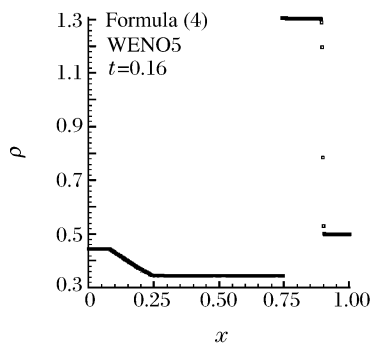
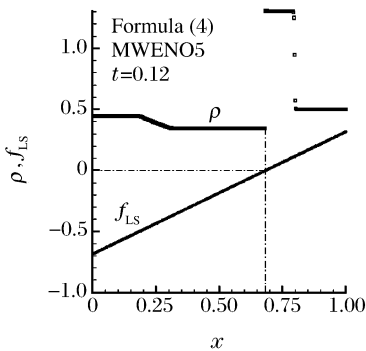


图3 Lax问题

Fig.3 Lax problem

以下两个算例用方程(4)和MWENO5数值格式进行计算。

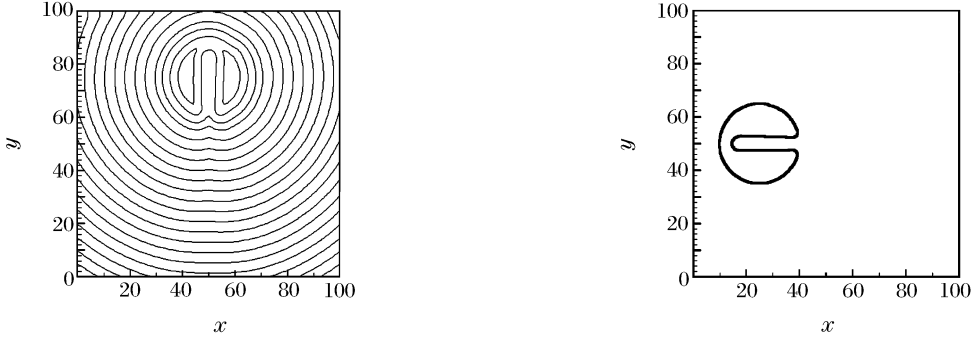
例4 旋转流场(Zalesak问题)。计算区域为 $[0,100]\times[0,100]$,Zalesak圆盘的半径为15,中心为 $(50,75)$,宽度为5,长度为25,凹槽开口向下,旋转速度场为 $u=(\pi/314)(50-y)$, $v=(\pi/314)(x-50)$ 。

这个例子在凹陷的顶端保持高分辨率是很困难的,这是验证本文数值方法很有效的数值算例。网格数 100×100 ,用带重新初始化计算的在不同时刻Level-Set等值线和界面的位置分别如图4。

例5 马赫数为1.22的激波与Helium气泡相遇,波前和波后以及氦气泡内的初始状态值分布分别为: $(\rho,u,v,p,\gamma)=(1,0,0,1,1.4)$ 、 $(\rho,u,v,p,\gamma)=(1.3764,-0.394,0,1.5698,1.4)$ 、 $(\rho,u,v,p,\gamma)=(0.138,0,0,1,1.67)$ 。模拟结果见图5。

由上述的模拟结果发现,图1~3在界面处基本上没有振荡产生,Level-Set函数零值与界面位置相

对应。图 4 中 Zalesak 圆盘在旋转的过程中，凹陷部分保持得比较精确和锐利，几乎没有抹平现象出现。图 5 模拟的是静止的圆形氦气泡在激波的作用下失稳，气泡开始凹陷并向左运动的过程。在运动变形过程中界面比较平滑，无数值振荡出现，并且 LS 等值线变化均匀，保持了距离函数的性质。



(a) 带重新初始化的 Level-Set 等值线

(b) 界面位置

(a) Distribution of Level-Set contours with reinitialization

(b) Interface position

图 4 Zalesak 问题

Fig. 4 Zalesak problem

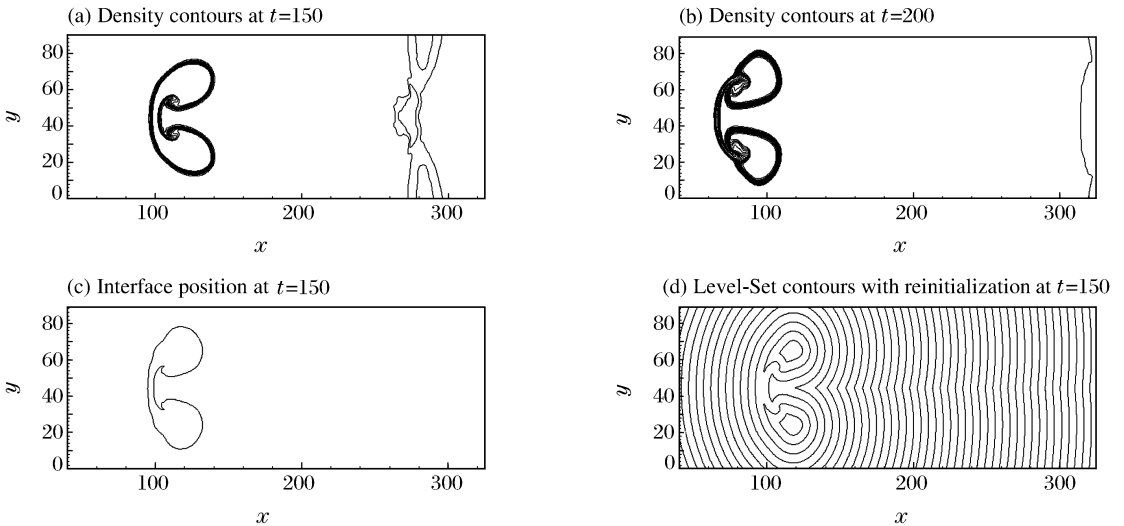


图 5 激波与气泡相互作用

Fig. 5 Collapse of a helium bubble with air shock

6 小 结

本文的数值方法对激波和接触间断具有很高的分辨率，主要工作在于：第一，探讨了双曲守恒律方程组守恒格式的守恒型数值通量(M)WENO 重构方法。第二，与波传算法^[9]在一阶迎风格式的基础上增加流量校正项达到二阶精度不同，通过在网格单元边界上进行多重加权基本无振荡(MWENO)重构求解拟线性方程组。最后，把这两种算法应用于多介质流体界面的计算，采用虚拟流动方法^[3-4]并用 Level-Set 函数捕捉界面的运动变化，数值模拟结果表明本文的数值方法具有较高的分辨率，并能有效地抑制界面附近的伪振荡。

参考文献：

[1] Chen S, Merriman B, Osher S, et al. A simple level set method for solving Stefan problems[J]. J Comput Phys, 1997,135:8-29.

- [2] Adalsteinsson D, Sethian J A. The fast construction of extension velocities in level set methods[J]. J Comput Phys, 1999, 148: 2–22.
- [3] Fedkiw R, Aslam T, Merriman B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method)[J]. J Comput Phys, 1999, 152: 457–492.
- [4] Fedkiw R, Aslam T, Merriman B, et al. The ghost fluid method for deflagration and detonation discontinuities[J]. J Comput Phys, 1999, 154: 393–427.
- [5] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[A]. Cockburn B, Johnson C, Shu C W, et al. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations[C]. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [6] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO scheme[J]. J Comput Phys, 1996, 126: 202–228.
- [7] Balsara D, Shu C W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. J Comput Phys, 2000, 160: 405–452.
- [8] 宗文刚, 邓小刚, 张涵信. 双重加权实质无波动激波捕捉格式的改进和应用[J]. 空气动力学学报, 2003, 21(4): 399–407.
ZONG Wen-gang, DENG Xiao-gang, ZHANG Han-xin. Implementation of DWENO schemes and its application [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2003, 21(4): 399–407.
- [9] Shyue K M. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems[J]. J Comput Phys, 1998, 142: 208–242.
- [10] Leveque R J. Wave propagation algorithms for multidimensional hyperbolic systems[J]. J Comput Phys, 1997, 131: 327–353.

The conservative and non-conservative algorithms applied to numerical studies of the interface instability in multi-component fluids

ZHANG Xue-ying^{1*}, ZHAO Ning¹, ZHU Jun²

(1. School of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016 Jiangsu, China;

2. School of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016 Jiangsu, China)

Abstract: Under the conservative scheme, flux components are reconstructed with the component by component versions. Then the quasi-linear systems are solved by the multiple WENO reconstruction based on the 1st order up wind scheme. The level set equation is used to capture the interface movement. Finally the two algorithms are applied to simulate the multi-component fluid flow. Satisfied numerical results have been obtained.

Key words: fluid mechanics; conservative and non-conservative (M)WENO scheme; Level-Set method; multi-component fluid interface; GFM

* Corresponding author: ZHANG Xue-ying
E-mail address: zxyuaa1002@sina.com.cn
Telephone: 025-84892628