

文章编号: 1001-1455(2007)01-0057-06

# 二维直角平面内固定圆形夹杂对 稳态入射反平面剪切波的散射\*

史文谱<sup>1</sup>, 刘殿魁<sup>2</sup>, 褚京莲<sup>3</sup>, 巩华荣<sup>4</sup>, 郭淑红<sup>4</sup>

(1. 烟台大学机电汽车工程学院, 山东 烟台 264005;

2. 哈尔滨工程大学建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;

3. 烟台大学光电信息科学技术学院, 山东 烟台 264005;

4. 烟台工程职业技术学院, 山东 烟台 264002)

**摘要:** 利用复变函数法、多极坐标及傅立叶级数展开技术求解了二维直角平面内固定圆形夹杂对稳态入射反平面剪切 (shearing horizontal, SH) 波的散射问题。首先构造出介质内不存在夹杂时的入射波场和反射波场, 然后建立介质内存在夹杂时由夹杂边界产生的能够自动满足直角边应力自由条件的散射波解, 从而利用叠加原理写出介质内的总波场。利用夹杂边界处位移条件和傅立叶级数展开方法列出求解散射波中未知系数的无穷代数方程组, 在满足计算精度的前提下通过有限项截断, 得到相应有限代数方程组的解, 最后通过算例具体讨论了二维直角平面水平边界点的位移幅度比和相位随量纲一波数、入射波入射角及夹杂位置的不同而变化的情况, 结果表明了算法的有效实用性。

**关键词:** 固体力学; 固定圆形夹杂; 复变函数法; 稳态 SH 波散射; 二维直角平面; 多极坐标变换

**中图分类号:** O347.2

**国标学科代码:** 130·15

**文献标志码:** A

## 1 引言

弹性波散射理论在地震工程、海洋工程、无损探伤等领域都有广泛的应用, 为了满足理论和工程上的需要, 人们在这方面做了大量的研究, 取得了许多有价值的成果<sup>[1-12]</sup>。研究方法主要有两种, 一种是解析法, 另外一种数值法。其中解析法对于理解物理现象、透视现象的本质有数值法不可比拟的优点, 但由于数学处理上的困难, 解析法仍然有很大的局限性; 而数值法在求解复杂边值问题方面不仅方法统一, 而且适用范围广, 但是在高频数值求解方面却有一定的困难和局限。SH 波散射作为弹性波散射问题中比较简单的模型, 尽管理论上已比较成熟, 但仍然有许多边值问题待解或没有很好解决。从文献来看人们在全空间或半空间问题上研究居多, 而有关直角平面空间内含有固定圆形夹杂等异质体的 SH 波散射问题研究却不多见, 数值算例的情形更是少见。

本文中利用复变函数法、多极坐标移动技术和傅立叶级数展开方法针对直角平面区域内固定圆形夹杂对稳态入射平面 SH 波散射问题进行研究。

## 2 计算模型及理论分析

如图 1 所示, 均质、各向同性的二维直角平面线弹性介质区域内一固定圆形夹杂在坐标系  $xOy$  内的位置坐标为  $(-d, -h)$ 。介质材料的剪切模量和体密度分别为  $\mu, \rho$ 。由于稳态入射平面 SH 波的作用, 介质内产生的位移  $W(x, y, t)$  垂直于  $xy$  平面, 并且满足方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2005-10-13; 修回日期: 2006-05-29

基金项目: 烟台大学博士启动基金(JX03B5)

作者简介: 史文谱(1963—), 男, 博士, 副教授。

式中:  $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$  是介质中  $SH$  波的传播速度。

而应力与位移的关系是

$$\tau_{xz} = \mu \partial W / \partial x, \quad \tau_{yz} = \mu \partial W / \partial y \quad (2)$$

引入复数变量  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ , 在复数平面上, 运动方程(1)可写为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4v_s^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3)$$

对于稳态  $SH$  波问题, 位移可假设为

$$W(z, \bar{z}, t) = \text{Re}[W(z, \bar{z}) \exp(-i\omega t)] \quad (4)$$

式中:  $W(z, \bar{z})$  是  $z, \bar{z}$  的复函数;  $\omega$  是波函数的圆频率, 它与外部扰动频率是一样的。将式(4)代入方程(3), 有

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\frac{ik}{2}\right)^2 W \quad (5)$$

式中:  $k = \omega/v_s$  是波数。

从图 1 容易看出, 问题的边界条件为

$$\Gamma_H: \tau_{yz}^{(i)} = 0, \quad \Gamma_V: \tau_{xz}^{(i)} = 0, \quad \Gamma_R: W^{(i)} = 0 \quad (6)$$

式中:  $\tau_{yz}^{(i)}, \tau_{xz}^{(i)}$  是夹杂外介质中的总剪应力;  $W^{(i)}$  是夹杂外介质中的总位移。

公式(2)的相应复数形式为

$$\tau_{xz} = \mu(\partial W / \partial z + \partial W / \partial \bar{z}), \quad \tau_{yz} = i\mu(\partial W / \partial z - \partial W / \partial \bar{z}) \quad (7)$$

求解方程(5), 并让该解预先满足二维直角平面两条直角边应力自由条件, 则由夹杂边界在直角平面介质内产生的散射波(在坐标系  $x_1 O_1 y_1$  内)

$$W^{(s)}(z_1, \bar{z}_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{j=1}^4 S_n^{(j)} \quad (8)$$

式中

$$S_n^{(1)} = H_n^{(1)}(k | z_1 |)(z_1 / | z_1 |)^n, \quad S_n^{(2)} = H_n^{(1)}(k | z_2 |)(z_2 / | z_2 |)^{-n},$$

$$S_n^{(3)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k | z_3 |)(z_3 / | z_3 |)^{-n}, \quad S_n^{(4)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k | z_4 |)(z_4 / | z_4 |)^n$$

$z_1 = r_1 \exp(i\theta_1), z_2 = z_1 - 2hi, z_3 = z_1 - 2d, z_4 = z_3 - 2hi, (r_1, \theta_1)$  是直角坐标系  $x_1 O_1 y_1$  内点的极坐标。

假设(稳态)入射平面  $SH$  波在坐标系  $xOy$  内表示为

$$W^{(i)}(r, \theta) = W_0 \exp\{i[kr \cos(\theta - \alpha) - \omega t]\} \quad (9)$$

式中:  $\alpha$  是入射波的入射方向角,  $W_0$  是入射波的位移幅度比。

在介质内不存在夹杂的情况下, 由于入射波  $W^{(i)}(r, \theta)$  的作用, 两条直角边界  $\Gamma_H$  和  $\Gamma_V$  将在介质内产生如下形式的反射波(它们满足两直角边应力自由边界条件)

$$W_1^{(r)}(r, \theta) = W_0 \exp\{i[kr \cos(\theta + \alpha) - \omega t]\} \quad (10)$$

$$W_2^{(r)}(r, \theta) = W_0 \exp\{i[-kr \cos(\theta + \alpha) - \omega t]\} \quad (11)$$

$$W_3^{(r)}(r, \theta) = W_0 \exp\{i[-kr \cos(\alpha - \theta) - \omega t]\} \quad (12)$$

为了利用夹杂边界处应力与位移的连续条件, 利用多极坐标变换, 并在局部坐标系  $x_1 O_1 y_1$  内引入复坐标  $z_1 = r_1 \exp(i\theta_1), \bar{z}_1 = r_1 \exp(-i\theta_1)$ , 则上述入射波和反射波的复数表达形式分别为

$$W^{(i)} = W_0 \exp\{(ik/2)[z_1 e^{-i\alpha} + \bar{z}_1 e^{i\alpha}]\} z_{0,i} \quad (13)$$

$$W_1^{(r)} = W_0 \exp\{(ik/2)[z_1 e^{i\alpha} + \bar{z}_1 e^{-i\alpha}]\} z_{1,r} \quad (14)$$

$$W_2^{(r)} = W_0 \exp\{(-ik/2)[z_1 e^{i\alpha} + \bar{z}_1 e^{-i\alpha}]\} z_{2,r} \quad (15)$$

$$W_3^{(r)} = W_0 \exp\{(-ik/2)[z_1 e^{-i\alpha} + \bar{z}_1 e^{i\alpha}]\} z_{3,r} \quad (16)$$

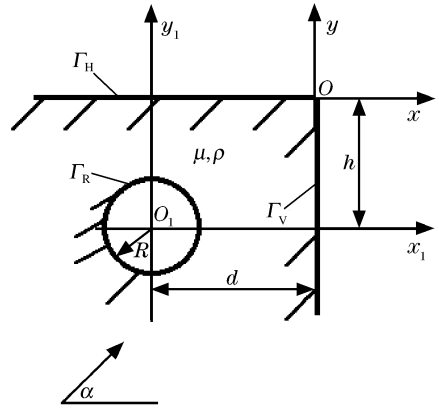


图 1 直角平面内固定圆形夹杂对入射平面  $SH$  波的散射

Fig. 1 The scattering of fixed circular inclusion in the right-angled plane to the incident plane  $SH$  wave

式中:

$$\begin{aligned} z_{0,i} &= \exp\{(-ik/2)[z_0 e^{-ia} + \bar{z}_0 e^{ia}]\}, & z_{1,r} &= \exp\{(-ik/2)[z_0 e^{ia} + \bar{z}_0 e^{-ia}]\}, \\ z_{2,r} &= \exp\{(ik/2)[z_0 e^{ia} + \bar{z}_0 e^{-ia}]\}, & z_{3,r} &= \exp\{(ik/2)[z_0 e^{-ia} + \bar{z}_0 e^{ia}]\}, & z_0 &= d + ih \end{aligned}$$

这样,在入射平面  $SH$  波  $W^{(i)}$  的作用下,由于夹杂的散射和两直角边的反射,二维直角平面介质内产生的总位移场可表为

$$W^{(t)} = W^{(s)} + W^{(i)} + \sum_{k=1}^3 W_k^{(r)} \quad (17)$$

由边界条件(6)中  $\Gamma_R$  边界上的位移边界条件可列出求解未知系数  $A_n$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的方程组

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta_n = \eta \quad (18)$$

式中:  $\zeta_n = \sum_{j=1}^4 S_n^{(j)}$ ,  $\eta = -[W^{(t)} + \sum_{k=1}^3 W_k^{(r)}]$ ,  $z_1 = R \exp(i\theta_1)$ ,  $\bar{z}_1 = R \exp(-i\theta_1)$ 。

为了求解方程(18),应在方程两边同时乘以因子  $\exp(-im\theta_1)$ ,并在区间  $[-\pi, \pi]$  内积分,得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n e^{-im\theta_1} d\theta_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \eta e^{-im\theta_1} d\theta_1 \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19)$$

在满足计算精度的情况下,对方程组(19)通过有限项截断得到具有有限个未知数的方程组并求解,即可得到未知系数  $A_n$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。

对于直角平面区域内固定圆形夹杂对稳态入射的  $SH$  波散射问题,可以讨论夹杂边界处的动应力集中系数  $\gamma_{rz}$  以及直角平面区域边界处点的位移幅度比  $A = |W^{(t)}/W_0|$  和相位角度  $B$  等参数随着入射波不同入射角度  $\alpha$ 、不同量纲一波数  $kR$ 、固定夹杂的不同位置 ( $d/R$ ) 的变化而变化的情况,其中  $\gamma_{rz}$  和  $B$  可分别表示为

$$\gamma_{rz} = |\tau_{rz}^{(t)}/\tau_0|_{r=R}, \quad B = \arctan[\text{Im}W^{(t)}/\text{Re}W^{(t)}] \quad (20)$$

式中:  $\tau_0 = \mu k W_0$  是入射波产生的剪切应力幅度;量纲一波数  $kR$  定义为  $kR = \omega R/v_s$ , 即由波数  $k$  和夹杂半径  $R$  的乘积来定义。 $W^{(t)}$  由(17)式计算,而  $\tau_{rz}^{(t)}$  可由公式  $\tau_{rz}^{(t)} = \mu(\partial W^{(t)}/\partial z + \partial W^{(t)}/\partial \bar{z})$ , 将(17)式代入其中得到。作为算例,本文中只计算和讨论直角平面区域内含有浅埋固定圆形夹杂时夹杂正上方水平边界上  $x_1/R \in [-3, 3]$  范围内的点的  $A = |W^{(t)}/W_0|$  和  $B$  的变化情况,其他参数变化情况可类似讨论。其中  $z_1 = x_1 + ih$ , 这里  $x_1$  是直角平面水平边界上的点在坐标系  $x_1 O_1 y_1$  内的横坐标。

### 3 算例及分析

本文算例假设二维直角平面介质中入射  $SH$  波的量纲一波数  $kR = 0.1, 1.0, 1.9$ ;入射平面波的入射角度  $\alpha$  分别取  $0, \pi/4, \pi/2$ ;固定圆形夹杂的量纲一位置坐标参数 ( $d/R, h/R$ ) 分别为  $(3.0, 1.1), (300, 1.1)$ ;在方程组(19)中总共选取 11 项,即可满足预先设定的计算精度  $10^{-6}$ ,计算结果如下:(1)图 2(a)、(c)和(b)、(d)分别是  $d/R=3, h/R=1.1$  和  $d/R=300, h/R=1.1$  情况下入射波水平入射时的计算结果;(2)图 2(e)、(g)和(f)、(h)分别是  $d/R=3, h/R=1.1$  和  $d/R=300, h/R=1.1$  情况下入射波  $45^\circ$  水平入射时的计算结果;(3)图 2(i)、(k)和(j)、(l)分别是  $d/R=3, h/R=1.1$  和  $d/R=300, h/R=1.1$  情况下入射波垂直入射时的计算结果。

其中图 2(a)、(b)、(e)、(f)、(i)、(j)是点的位移幅度比  $A = |W^{(t)}/W_0|$  的变化曲线;图 2(c)、(d)、(g)、(h)、(k)、(l)是点的位移相位角度  $B$  的变化曲线。从计算结果来看,能够得到如下结论:

(1)由于固定圆形夹杂的存在,直角平面水平边界上点的位移幅度都有明显的放大现象,且最大位移幅度随入射波频率的增加而增大。其中当入射波水平入射,并且夹杂靠近直角平面上边界和右边界时,低频、中频、高频时最大位移幅度比分别为  $1.0, 4.3, 6.0$ ;当夹杂远离右边界 ( $x_1/R=300$ ) 但仍靠近上边界 ( $h/R=1.1$ ) 时,低频、中频、高频时最大位移幅度比分别为  $1.0, 3.5, 6.0$ 。当入射波  $45^\circ$  倾斜入射时,上述两种情况下的低频、中频、高频时最大位移幅度比分别为  $1.8, 8.2, 5.8$  和  $1.3, 4.1, 5.0$ 。当入

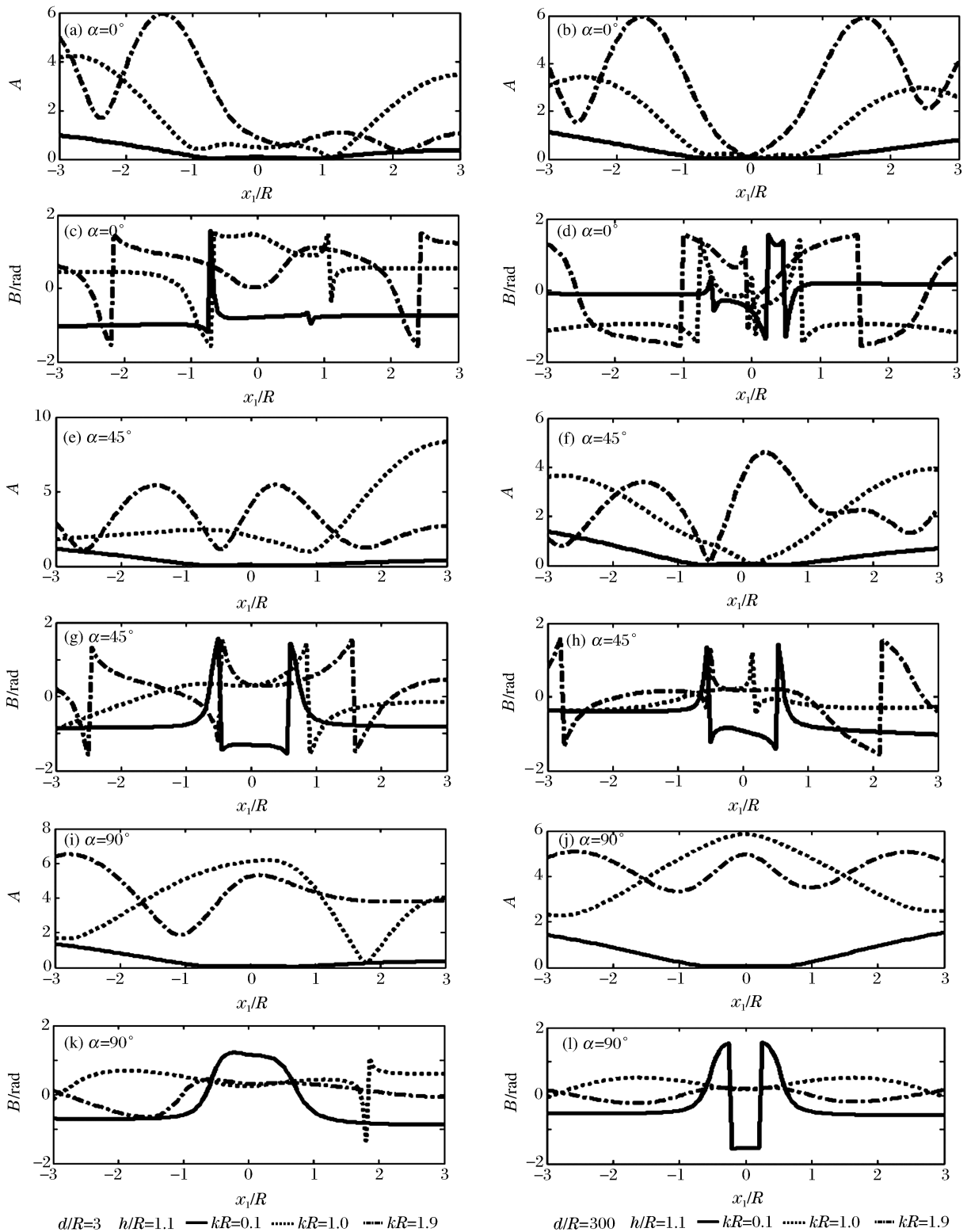


图2 固定夹层正上方直角平面水平边界上  $x_1/R \in [-3.0, 3.0]$  范围内点的位移幅度比  $A$  和相位角度  $B$  的变化

Fig. 2 Variations of the displacement ratios  $A$  and the phase angles  $B$  of the points on the horizontal boundary of the right-angled plane which are just right above the fixed circular inclusion and in the range of  $x_1/R \in [-3.0, 3.0]$

射波垂直入射时,低频、中频、高频时最大位移幅度比分别为 1.5, 6.2, 6.5 和 1.5, 6.0, 5.0。

(2)无论是水平入射、倾斜入射还是垂直入射,当入射波低频时,直角平面水平边界上靠近夹杂正上方点处一定范围内点的位移幅度近似为零,这主要是浅埋固定夹杂的静态物理约束造成的。

(3)当夹杂靠近两直角边界时,由于两直角边界散射波的共同影响使得水平边界点的位移幅度比和相位角度的变化没有一定的规律性;但是当夹杂远离右边界,并且入射波垂直入射时,水平边界上点的位移幅度比和相位角度的变化相对于夹杂正上方的水平边界上的点是对称分布的,说明此时直角平面右边界的散射波影响可以忽略,实际计算表明当  $d/R \geq 250$  时,这种影响即可忽略。

(4)按照同样方法类似计算表明,当夹杂靠近右边界,而远离上边界( $h/R \geq 250$ ),并且入射波水平入射时,直角平面右边界上点的位移幅度比和相位角的变化也具有对称性。至于其他情况和条件的计算结果与前面得到的结果基本上是相似的,计算方法也一样,只是讨论的点是右边界上的点而已。

## 4 结 论

本文中的算例只是计算了含有固定圆形夹杂的二维直角平面水平边界部分( $x_1/R \in [-3.0, 3.0]$ )点的位移幅度比及其相位角度的变化情况,如果实际需要,也可计算其他有关参数的变化,比如夹杂边界处动应力集中系数及直角平面水平和竖直边界上大范围内点的位移幅度比和相位的变化情况。利用本文中的方法,通过测量和记录边界位移的变化,可比较准确地估计出浅埋固定夹杂的位置。当然,要真正评估夹杂的位置,需做进一步的计算,显然本文方法可提供这方面的理论基础;另外本文方法对于相应问题的反演计算、远场分析也具有一定的理论指导意义,对于其他诸如圆孔、刚性动夹杂、弹性夹杂等类似问题的研究同样具有理论参考意义。

## 参考文献:

- [1] 林宏,史文谱,刘殿魁. SH波入射时浅埋结构的动力分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2001, 22(6): 90-94.  
LIN Hong, SHI Wen-pu, LIU Dian-kui. On the scattering of SH-wave by interface crack and circular cavity near the interface[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2001, 22(6): 90-94.
- [2] 刘殿魁,林宏. 浅埋的圆柱形孔洞对 SH波的散射与地震动[J]. 爆炸与冲击, 2003, 23(1): 6-12.  
LIU Dian-kui, LIN Hong. Scattering of SH-waves by a shallow buried cylindrical cavity and the ground motion[J]. Explosion and Shock Waves, 2003, 23(1): 6-12.
- [3] 梁建文,张郁山,顾晓鲁,等. 圆弧形层状凹陷地形对平面 SH波的散射[J]. 振动工程学报, 2003, 16(2): 159-165.  
LIANG Jian-wen, ZHANG Yu-shan, GU Xiao-lu, et al. Scattering of plane SH waves by a circular-arc layered canyon[J]. Journal of Vibration Engineering, 2003, 16(2): 158-165.
- [4] 刘殿魁,林宏. SH波对双相介质界面附近圆形孔洞的散射[J]. 固体力学学报, 2003, 24(2): 197-204.  
LIU Dian-kui, LIN Hong. Scattering of SH-waves by circular cavities near bimaterial interface[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2003, 24(2): 197-204.
- [5] 王国庆,刘殿魁. SH波对浅埋相邻多个圆孔作用的动力分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2003, 24(1): 108-113.  
WANG Guo-qing, LIU Dian-kui. Dynamic analysis for effect of SH-wave on shallow fill multiple circular cavities [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2003, 24(1): 108-113.
- [6] 宋天舒,刘殿魁,付国庆. 含刚性圆柱夹杂压电介质的动力反平面特性[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2003, 24(5): 574-577.  
SONG Tian-shu, LIU Dian-kui, FU Guo-qing. Dynamic anti-plane characteristic of piezoelectric medium with rigid cylindrical inclusion[J]. Journal of Haerbin Engineering University, 2003, 24(5): 574-577.
- [7] Emets V F, Kunets Y I, Matus V V. Scattering of SH waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion [J]. Archive of Applied Mechanics, 2004, 73(11-12): 769-780.
- [8] Lu J F, Hanyga A. Scattering of SH-wave by a crack terminating at the interface of a bimaterial[J]. Computational Mechanics, 2004, 34(1): 74-85.
- [9] 陈志刚,刘殿魁. SH波冲击下浅埋任意形孔洞的动力分析[J]. 地震工程与工程振动, 2004, 24(4): 32-36.

- CHEN Zhi-gang, LIU Dian-kui. Dynamic response on a shallowly buried cavity of arbitrary shape impacted by vertical SH-wave[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004,24(4):32-36.
- [10] 常建梅,冯文杰,丁军霞.无限区域内平面 SH 波的散射[J].*石家庄铁道学院学报*,2004,17(3):71-74.  
CHANG Jian-mei, FENG Wen-jie, DING Jun-xia. The scattering of SH-wave in infinite area[J]. *Journal of Shijiazhuang Rail Way Institute*, 2004,17(3):71-74.
- [11] 杜永军,赵启成,黄燕,等.裂纹对圆孔 SH 波散射与动应力集中系数的影响[J].*哈尔滨工业大学学报*,2005,37(8):1077-1079.  
DU Yong-jun, ZHAO Qi-cheng, HUANG Yan, et al. Dynamic stress concentration problem of SH-wave by cracks near a circular hole edge[J]. *Journal of Harbin University of Technology*, 2005,37(8):1077-1079.
- [12] 刘殿魁,王国庆.浅埋圆形孔洞附近的半圆形突起对 SH 波的散射[J].*力学学报*,2006,38(2):209-218.  
LIU Dian-kui, WANG Guo-qing. Anti-plane SH-deformation of a semi-cylindrical hill above a subsurface cavity [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006,38(2):209-218.

## Scattering of fixed circular inclusion in right-angled plane to steady incident planar shearing horizontal wave

SHI Wen-pu<sup>1\*</sup>, LIU Dian-kui<sup>2</sup>, CHU Jing-lian<sup>3</sup>, GONG Hua-rong<sup>4</sup>, GUO Shu-hong<sup>4</sup>

(1. *School of Electromechanical Automobile Engineering, Yantai University, Yantai 264005, Shandong, China;*

2. *College of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, Heilongjiang, China;*

3. *School of Information Technology and Photo-electrical, Yantai University, Yantai 264005, Shandong, China;*

4. *Yantai Engineering and Technology College, Yantai 264002, Shandong, China)*

**Abstract:** Complex function method and multi-polar coordinate and Fourier series expansion technology are used to study the scattering of fixed circular inclusion in right-angled plane to steady incident planar SH-wave. The incident wave and the reflection wave in the right-angled plane which has no circular inclusion are constructed; and the scattering solution excited by the boundary of the circular inclusion existing in the space, which satisfy the free stress conditions of the two right-angled boundaries are formulated, therefore, the total displacement field can be constructed using overlapping principle. An infinite algebraic equation of unknown coefficients appearing in the scattering wave solution field can be gained using multi-polar coordinate transformation and Fourier series expansion technology and the conditions of displacement at the boundary of the circular inclusion. It can be solved by using limit items in the infinite series which can give a high computation precision. An example is given to illustrate the variations of the displacement ratio and the phase of the displacement on the horizontal boundary of the right-angled plane with the variations of dimensionless wave number and the incident angle and the location of the circular inclusion. The results of the example show the effectiveness and efficiency of the method introduced here.

**Key words:** solid mechanics; fixed circular inclusion; complex method; scattering of steady SH-wave; right-angled plane; multi-polar coordinate transformation

---

\* Corresponding author: SHI Wen-pu  
E-mail address: swp666666@eyou.com  
Telephone: 86-535-6888064