

文章编号: 1001-1455(2007)06-0493-08

# 非对称射流形成的几何理论(一) ——几何封闭条件\*

秦承森, 石艺娜, 冯其京, 杭义洪

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

**摘要:** 两股来流碰撞形成非对称射流问题的定常解具有不确定性, 理论上尚未很好求解。从分析特殊射流形成入手, 由定常出流所满足的最小动能原理出发, 分析来流初始交汇位形和相互作用过程, 建立了非对称射流形成的方程封闭条件, 提出了非对称射流形成的几何理论。以平面二维不等厚度来流碰撞为例, 给出了非对称射流出流方向、厚度随初始位形变化的理论预测曲线, 与数值模拟结果吻合较好。

**关键词:** 流体力学; 几何封闭条件; 解椭圆; 非对称射流; 初始位形; 数值模拟

**中图分类号:** O358

**国标学科代码:** 130·25

**文献标志码:** A

## 1 引言

两股射流斜碰撞形成两股新射流的问题称为非对称射流形成问题, 是高速碰撞研究中的基础课题, 具有广泛的应用前景。两股来流呈一定交角对称碰撞产生射流的定常理论, 已由 G. Birkhoff 等<sup>[1]</sup>于 1948 年建立, 并在聚能射流研究中广泛应用。但是, 两股射流非对称碰撞问题的定常理论仍在探索中。主要困难是定常解的不确定性, 即在定常条件下, 由守恒关系建立的方程组不封闭, 还需要增加一个约束条件, 才能使定常解唯一。几十年来, 非对称射流形成的理论研究均集中于寻求和提出合理的假设、封闭方程组、建立解析理论。例如: D. C. Park 和 J. P. Curtis<sup>[2]</sup>提出的 PC 模型, 就假设新形成的射流在同一直线上; J. P. Curtis 等<sup>[3]</sup>提出圆弧流线模型, J. P. Curtis<sup>[4-5]</sup>进一步改进了以前的结果, 仍然以新的假设去封闭方程。此外, S. A. Kinelovskii 等<sup>[6]</sup>, E. Hirsch 等<sup>[7]</sup>均根据射流形成的物理图像提出了不同的假设, 建立了相应的近似理论。这些理论虽然部分取得了成功, 但仍然缺乏一般性。

早在 1916 年, A. Palatini<sup>[8]</sup>就曾提出: “不可压缩无粘流中, 不等厚度流体碰撞问题是一个不确定问题。”1948 年, G. Birkhoff 等<sup>[1]</sup>也曾注意到这种不确定性, 并指出: “难以确定这种不确定性的物理含义, 还不清楚形成稳定的非对称射流的条件是什么(如果有的话)?”。L. M. Milne-Thompson<sup>[9]</sup>指出: “不同的碰撞初始条件相应于不同的稳态运动。”数学上, 对理想不可压缩流体力学方程组的研究, 已经证明了在无限域中解具有唯一性。尽管对有界域解的唯一性尚待证明, 但这仍然对建立非对称射流形成理论有重要启示。最新的数值研究表明, L. M. Milne-Thompson 的观点是正确的。

本文中从定常出流满足的最小动能原理出发, 分析来流初始交汇位形和相互作用过程, 确定定常出流准则, 提出平面来流非对称碰撞形成射流的分析理论; 在解椭圆上给出方程组的封闭条件和出流射流的理论公式; 并以平面二维不等厚度来流碰撞为例, 对非对称射流的出流状态与初始位形的关系进行理论预测和数值模拟。

## 2 守恒方程——解椭圆

在不可压缩流体中, 假设离射流交汇点足够远处压力为零, 则定常射流中, 由守恒方程可以给出沿

\* 收稿日期: 2006-05-23; 修回日期: 2006-08-29

基金项目: 国防科技重点实验室基金项目(51479010105ZW0903)

作者简介: 秦承森(1941—), 男, 研究员, 博士生导师。

流线射流的出流速度等于入流速度。射流满足两个守恒关系:质量守恒和动量守恒,能量方程自动满足。在二维平面情况下,设来流射流密度相同,厚度为  $A_1、A_2$ ,速度为  $u_1 = u_2 = u$ ,其方向矢量为  $e_1、e_2$ ,相应的出流射流厚度和方向分别为  $A_3、A_4$  和  $e_3、e_4$ 。则守恒方程可表示为

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = A_3 + A_4 = 2a \\ A_1 e_1 + A_2 e_2 = A_3 e_3 + A_4 e_4 = 2ce_p \end{cases} \quad (1)$$

式中: $a、c$  为常数, $e_p$  为矢量  $e_1、e_2$  的单位和矢量。

在矢量空间中,做来流三角形  $\triangle F_1 I F_2: A_1 e_1 + A_2 e_2 = 2ce_p$ , 其中,矢量  $\overrightarrow{F_1 I} = A_1 e_1, \overrightarrow{I F_2} = A_2 e_2, I$  点为来流矢量  $A_1 e_1$  和  $A_2 e_2$  的交点,以来流和矢量  $2ce_p$  作底边,做出流矢量三角形  $\triangle F_1 J F_2: A_3 e_3 + A_4 e_4 = 2ce_p$ , 记矢量  $\overrightarrow{F_1 J} = A_3 e_3, \overrightarrow{J F_2} = A_4 e_4, J$  点为出流射流矢量的交点。根据守恒方程(1),所有可能的出流射流解必须满足  $A_1 + A_2 = A_3 + A_4 = 2a$ , 因而,在矢量空间中,所有可能的出流解的矢量三角形顶点的集合形成一个椭圆(见图 1)。其中,椭圆焦点为来流和矢量  $2ce_p$  的两个端点  $F_1、F_2$ ,且  $\overrightarrow{F_1 F_2} = 2ce_p$ , 焦距为  $2c$ ,长轴为  $2a$ ,短轴为  $2b$ ,以  $G$  点表示椭圆中心。称此椭圆为解椭圆,其上的点称为解点。

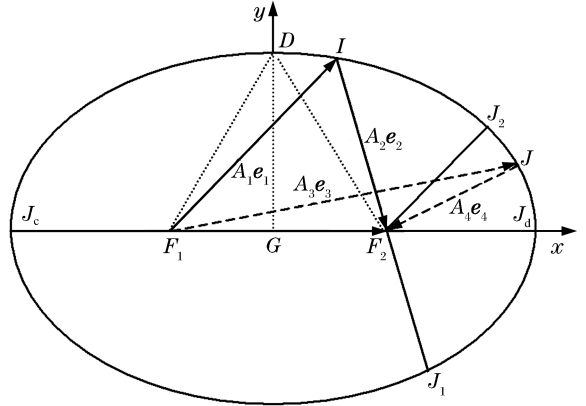


图 1 解椭圆  
Fig. 1 Solution ellipse

显然,对应于给定来流  $A_1 e_1、A_2 e_2$ ,解椭圆是唯一的。所有可能的出流  $A_3 e_3、A_4 e_4$  构成的矢量三角形的顶点(即:出流解点  $J$ )均应在椭圆上,故方程(1)给出的出流射流解有无穷多个。为了使解唯一,必须确定解椭圆中特定解点与来流射流之间的关系,即寻求封闭方程的条件。

### 3 几何封闭条件

首先从几个特殊情况中寻求封闭条件。

#### 3.1 对称射流

当两股来流的密度、厚度和速率相同,并且以其交角平分线为对称线碰撞时,产生沿角平分线的两股方向相反的射流。这个经典的对称射流理论结果,在解椭圆上显示为:来流射流为矢量  $\overrightarrow{F_1 D}$  和  $\overrightarrow{D F_2}$ ,产生的出流射流为矢量  $\overrightarrow{F_1 J_d}$  和  $\overrightarrow{J_d F_2}$ (见图 1);此时,来流  $A_1 e_1$  和  $A_2 e_2$  的交点  $I$  与  $D$  点重合;出流射流  $A_3 e_3$  和  $A_4 e_4$  的交点  $J$  与  $J_d$  点重合。

在解椭圆上,对应于解点  $J_d$  的出流射流厚度为

$$\begin{cases} |\overrightarrow{F_1 J_d}| = |\overrightarrow{F_1 D}| (1 + \cos \angle D F_1 J_d) \\ |\overrightarrow{J_d F_2}| = |\overrightarrow{F_2 D}| (1 - \cos \angle D F_2 F_1) \end{cases} \quad (2)$$

#### 3.2 方向相反的射流对称正碰撞

所谓对称正碰撞,是指两股方向相反、厚度不同的来流正碰撞时,其厚度中线在一条直线  $O_1 O'_1$  上,如图 2 所示。这种对称性条件,在图 1 中可表示为:做  $\overrightarrow{F_1 F_2}$  的中垂线和延长线分别交解椭圆于  $D$  点和  $J_d$  点,此时,来流  $A_1 e_1$  和  $A_2 e_2$  的交点  $I$  与  $J_d$  点重合, $A_1 = |\overrightarrow{F_1 J_d}|, A_2 = |\overrightarrow{J_d F_2}|$ ;出流  $A_3 e_3$  和  $A_4 e_4$  的交点  $J$  与  $D$  点重合,产生的出流解为  $\overrightarrow{F_1 D}$  和  $\overrightarrow{D F_2}$ , $A_3 = A_4 = |\overrightarrow{F_1 D}| = |\overrightarrow{D F_2}|$ 。令  $\theta = \angle D F_1 J_d$ , 则

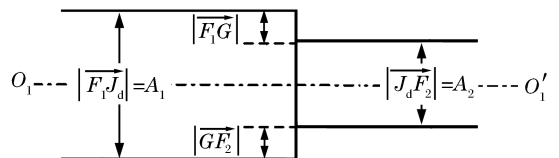


图 2 方向相反射流的对称正碰撞初态  
Fig. 2 Initial configuration of symmetric head-on collision of incoming streams

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{F_1G}|}{|\overrightarrow{F_1D}|} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tag{3}$$

这个解析关系也可以由第 3.1 节的对称射流理论, 反转来流与出流方向直接给出。

我们把来流  $\overrightarrow{F_1J_d}$  分解成 3 部分:  $\overrightarrow{F_1J_d} = \overrightarrow{F_1G} + \overrightarrow{GF_2} + \overrightarrow{F_2J_d}$  (见图 1~2), 称  $\overrightarrow{F_2J_d}$  与  $\overrightarrow{J_dF_2}$  为直接对称碰撞部分,  $\overrightarrow{F_1G} + \overrightarrow{GF_2} = \overrightarrow{F_1F_2}$  为非对称碰撞部分, 称  $G$  点为  $\overrightarrow{F_1F_2}$  的分点, 或  $\overrightarrow{F_1G}$  与  $\overrightarrow{GF_2}$  的联接点。于是, 出流解点  $D$  可按如下方式给出: 由联接点  $G$  做与直接对称碰撞部分的出流方向  $e_H$  平行的直线 (即:  $\overrightarrow{F_1F_2}$  的中垂线), 与解椭圆的交点, 即为  $D$  点。

下面从定常出流所满足的最小动能原理出发, 具体分析来流初始交汇位形及其相互作用过程, 建立非对称射流形成过程满足的方程组封闭条件。

### 3.3 最小动能原理

设来流密度  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , 厚度为  $A_1, A_2$ , 速度  $u_1 = u_2 = u$ , 方向为  $e_1, e_2$ , 选取半径足够大的控制面  $S$ 。方程(1)是以边界上的质量和动量流守恒来表示控制面  $S$  内的总质量和总动量守恒, 对控制面内的运动没有提出任何约束。我们按不可压缩流动的动能总是取最小可能值的原理, 为控制面内的流动附加一个约束条件。动能表达式可写为

$$E_k(u) = \frac{\rho}{2} \int_V u^2 dV \tag{4}$$

引入速度势  $\varphi: \mathbf{u} = \nabla \varphi$ , 有  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi = 0$ , 则

$$E_k(u) = \frac{\rho}{2} \int_V \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dV = \frac{\rho}{2} \int_S \varphi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \tag{5}$$

由于选取控制面  $S$  的半径  $R$  足够大, 在  $A_i (i=1, 2, 3, 4)$  上的量变化不大, 则(5)式可写为

$$E_k = -\frac{\rho u}{2} (\tilde{\varphi}_1 A_1 + \tilde{\varphi}_2 A_2 - \tilde{\varphi}_3 A_3 - \tilde{\varphi}_4 A_4) \tag{6}$$

式中:  $\tilde{\varphi}_i$  为在控制面上  $A_i$  处的值。由于  $\rho, u$  均为常数, 不妨设  $\rho = 1, u = 1$ , 则动能表达式为

$$E_k = \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}_3 A_3 + \tilde{\varphi}_4 A_4 - \tilde{\varphi}_1 A_1 - \tilde{\varphi}_2 A_2) \tag{7}$$

如图 3 所示, 选取来流  $A_1 e_1, A_2 e_2$  中线的交点作为坐标原点, 记为  $O$ ; 矢量  $A_1 e_1 + A_2 e_2 = 2ce_p$  方向取为  $x$  方向, 按右手规则取  $y$  方向, 则在控制面  $S$  附近的势函数可近似取为

$$\tilde{\varphi}_i = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i x + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i y = \pm x_i \cos \theta_i \pm y_i \sin \theta_i \tag{8}$$

式中:  $(x_i, y_i)$  为  $A_i$  的中线与控制面  $S$  的交点坐标,  $\theta_i$  为  $e_i$  与  $e_p$  的夹角 ( $i=1, 2, 3, 4$ )。当速度与控制面  $S$  的法线方向同向时, 取“+”号, 反之取“-”号。

设出流  $A_3 e_3, A_4 e_4$  的中线与  $x$  轴的交点为  $O_3, O_4$ , 与控制面  $S$  的交点为  $B_3, B_4$ , 则在控制面上, 有

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1 = -R \\ \tilde{\varphi}_2 = -R \\ \tilde{\varphi}_3 = (\overline{OO_3} + \overline{O_3 B_3} \cos \theta_3) \cos \theta_3 + \overline{O_3 B_3} \sin^2 \theta_3 = \overline{OO_3} \cos \theta_3 + \overline{O_3 B_3} \\ \tilde{\varphi}_4 = (\overline{OO_4} + \overline{O_4 B_4} \cos \theta_4) \cos \theta_4 + \overline{O_4 B_4} \sin^2 \theta_4 = \overline{OO_4} \cos \theta_4 + \overline{O_4 B_4} \end{cases} \tag{9}$$

根据动量矩守恒, 应有

$$A_3 \overline{OO_3} \sin \theta_3 = A_4 \overline{OO_4} \sin \theta_4 \tag{10}$$

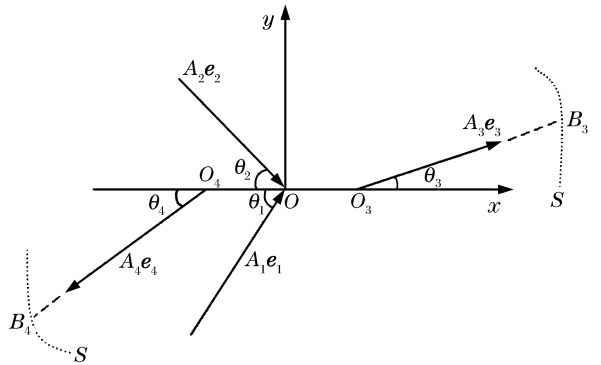


图 3  $A_i$  中线交汇图

Fig. 3 Intersecting sketch of  $A_i$  midlines

注意到  $\overline{OB_3} = \overline{OB_4} = R$ , 则

$$\overline{OO_3} \cos \theta_3 + \overline{O_3 B_3} \approx R - \frac{1}{2R} (\overline{OO_3} \sin \theta_3)^2, \quad \overline{OO_4} \cos \theta_4 + \overline{O_4 B_4} \approx R - \frac{1}{2R} (\overline{OO_4} \sin \theta_4)^2 \quad (11)$$

将(9~11)式代入(7)式,有

$$E_k = (A_1 + A_2)R - \frac{A_3^2 (\overline{OO_3} \sin \theta_3)^2}{4R} \left[ \frac{1}{A_3} + \frac{1}{A_4} \right] = (A_1 + A_2)R - \frac{A_1 + A_2}{4R} \overline{OO_3} \overline{OO_4} \sin \theta_3 \sin \theta_4 \quad (12)$$

下面对动能  $E_k$  的表达式(12)做一些讨论。

如果引入一个表示来流射流交汇初态的参数  $\xi$ , 则有  $\theta_3 = \theta_3(\xi), \theta_4 = \theta_4(\xi), \overline{OO_3} = \overline{OO_3}(\xi), \overline{OO_4} = \overline{OO_4}(\xi)$ 。对于固定的来流  $A_1, A_2$  及其夹角  $\theta_0 = \theta_1 + \theta_2$  而言, 动能  $E_k = E_k(\xi)$ , 令  $E'_k(\xi) = 0$  及  $E''_k > 0$ , 可得关于  $\xi$  的方程, 问题可解。令其根  $\xi = \xi_s$ , 则有  $\theta_3 = \theta_3(\xi_s), \theta_4 = \theta_4(\xi_s)$ , 即为出流射流在解椭圆上的解点。由于上述函数关系是未知的, 我们只能进行定性分析。

由椭圆性质可知  $\sin \theta_3 \sin \theta_4$  的值, 在  $J_d$  点为零, 沿解椭圆逐渐增大, 至  $D$  点达到最大值, 然后单调减小, 至  $J_c$  点为零(见图 1)。对于对称射流, 出流解点位于解椭圆  $J_d$  点,  $\overline{OO_3} \overline{OO_4} = 0$ ; 而对于反向来流的对称正碰撞, 出流是对称的, 解点为  $D$  点, 也有  $\overline{OO_3} \overline{OO_4} = 0$ ; 其他情况, 仅知  $\overline{OO_3} \overline{OO_4} \geq 0$ 。从上述结果, 我们至少可以断定: 在解椭圆上, 动能在  $J_d, D, J_c$  这 3 点取极大值。因此, 按动能极值原理, 非对称射流的解点  $J$  应该在  $J_d, D, J_c$  所在的椭圆区间内, 并且有偏离上述 3 点的趋势。

由实验结果可知, 来流以交角  $\theta_0$  碰撞, 只有当出流射流分别位于交角  $\theta_0$  形成的两个扇形区域 I 和 II 内, 才可能形成稳定的射流(见图 4)。这个约束条件在解椭圆上表示为: 解点  $J$  仅能位于  $J_1$  和  $J_2$  点之间的椭圆弧线上。因此, 结合动能极小值条件, 如果有非对称射流形成, 其解点  $J$  应该偏离  $J_d$  点, 按初始位形的约束向  $J_1$  或  $J_2$  点偏移, 在  $J_1$  或  $J_2$  点内侧附近的椭圆上寻求动能最小值的解。

### 3.4 射流形成过程的分解——封闭条件

两股来流按初始位形交汇, 相互作用产生射流, 最后形成定常的出流射流状态, 这是一个非定常流趋向定常流的过程, 其真实流动状态的变化, 目前只有采用数值模拟的方法来研究。为了使终态的定常出流与初始来流交汇位形建立联系, 我们把射流形成过程分解成一系列相互衔接的子过程。

假设来流初始位形和终态的出流射流如图 4 所示。其中  $e_H$  为来流夹角  $\theta_0$  平分线方向的单位矢量,  $A_0$  为来流  $A_1 e_1, A_2 e_2$  初始交汇位形中厚度相重合的部分。因此, 我们将来流分解成直接对称碰撞部分  $A_0$  和非对称碰撞部分, 即:  $A_1 e_1 = A_0 e_1 + (A_1 - A_0) e_1, A_2 e_2 = A_0 e_2 + (A_2 - A_0) e_2$ 。

如图 5 所示, 假设来流  $A_1 e_1$  与  $A_2 e_2$  的相互作用过程分解如下:

(1) 直接对称碰撞部分  $A_0 e_1$  与  $A_0 e_2$  的对称碰撞:

$$A_0 e_1 + A_0 e_2 \implies \overrightarrow{F_1 Q_1} + \overrightarrow{Q_1 P_1};$$

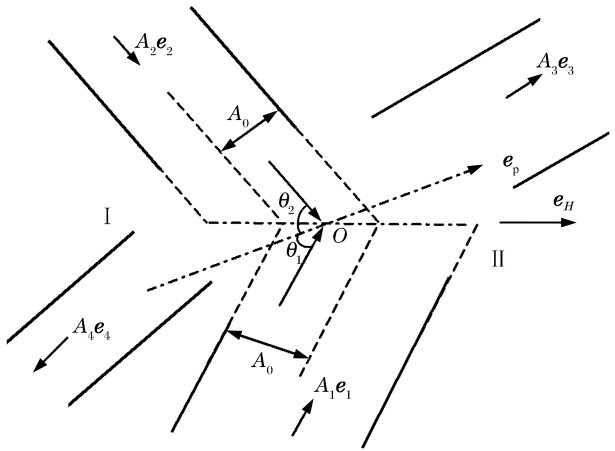


图 4 来流射流与出流射流

Fig. 4 Incoming streams and outgoing streams

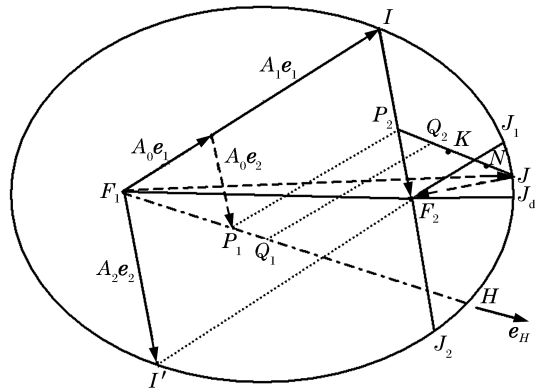


图 5 射流的形成过程

Fig. 5 Sketch of the jet formation process

(2) 对称碰撞出流  $\overrightarrow{F_1 Q_1}$  与来流  $A_1 e_1$  的非对称碰撞部分  $(A_1 - A_0) e_1$  作用。在矢量图中  $(A_1 - A_0) e_1 = \overrightarrow{Q_1 Q_2}$ 。它的出流解应该在以  $F_1, Q_2$  为焦点, 以  $(|\overrightarrow{F_1 Q_1}| + |\overrightarrow{Q_1 Q_2}|)/2$  为长轴的解椭圆上。做平行于  $\overrightarrow{F_1 Q_1}$  的直线  $\overrightarrow{P_2 Q_2}$ , 与  $\overrightarrow{IF_2}$  交于  $P_2$  点。按照 3.3 节讨论的约束条件, 来流  $|\overrightarrow{P_2 Q_2}|$  (或  $|\overrightarrow{Q_1 Q_2}|$ ) 与该椭圆的交点内侧附近是动能取极小值的点, 不妨设该交点即为出流射流的解点 (即: 形成的出流射流有一股是沿反向角分线  $-e_H$  方向), 记为  $K$  点, 则有:  $\overrightarrow{F_1 Q_1} + \overrightarrow{Q_1 Q_2} \Rightarrow \overrightarrow{F_1 K} + \overrightarrow{K Q_2}$ ;

(3) 出流  $\overrightarrow{K Q_2}$  与  $e_H$  反向, 与对称碰撞出流  $\overrightarrow{Q_1 P_1}$  迭加, 即为  $\overrightarrow{K P_2}$ , 它是沿  $-e_H$  方向上的射流, 应该与来流  $A_2 e_2$  的非对称碰撞部分  $(A_2 - A_0) e_2$  相遇而形成新射流, 在矢量图中,  $(A_2 - A_0) e_2 = \overrightarrow{P_2 F_2}$ 。新射流的解点位于以  $K, F_2$  为焦点, 以  $(|\overrightarrow{K P_2}| + |\overrightarrow{P_2 F_2}|)/2$  为长轴的解椭圆上。记该解点为  $N$ , 则有:  $\overrightarrow{K P_2} + \overrightarrow{P_2 F_2} \Rightarrow \overrightarrow{K N} + \overrightarrow{N F_2}$ 。同理,  $N$  点也在矢量  $\overrightarrow{P_2 Q_2}$  上;

(4) 新射流相互作用:  $\overrightarrow{F_1 K} + \overrightarrow{K N} \Rightarrow \overrightarrow{F_1 L} + \overrightarrow{L N}$ ,  $\overrightarrow{L N} + \overrightarrow{N F_2} \Rightarrow \overrightarrow{N T} + \overrightarrow{T F_2}$ , 产生新的解点  $L, T, \dots$ , 并沿直线  $\overrightarrow{P_2 Q_2}$  逐渐逼近于  $J$  点。其中,  $J$  点是  $\overrightarrow{P_2 Q_2}$  与初始来流  $A_1 e_1, A_2 e_2$  构成的解椭圆的交点。

依照以上所设想的来流相互作用过程, 我们由来流初始交汇位形, 使用动能极小值约束条件, 得到了解点  $J$ 。数值研究表明,  $J$  点确实是在与该来流初始交汇条件所对应的解附近。因此, 在非对称射流形成的几何理论中, 方程的封闭条件可以表述为: 寻求来流非对称碰撞部分的联接点  $P_2$ , 以及直接对称碰撞部分的出流方向  $e_H$ , 过联接点  $P_2$  做平行于  $e_H$  方向的直线与解椭圆的交点, 即为解点  $J$ 。我们称此假设为几何封闭条件。

### 4 算 例

#### 4.1 不等厚度射流正碰撞的理论公式

两个运动方向相反的不等厚度来流正碰撞形成非对称射流的问题, 还没有得到解析解, 我们用几何封闭条件求解该问题, 考虑  $A_2 < A_1$  的情况。

设来流初始位形如图 6 所示。直接对称碰撞部分  $|\overrightarrow{J_d F_2}| = A_0 \leq A_2$  (图 6 为  $\overrightarrow{J_d F_2} = A_2$  的情况), 其出流方向  $e_H$  垂直于来流方向; 非对称碰撞部分为  $\overrightarrow{F_1 M_0}$  与  $\overrightarrow{M_0 F_2}$ , 在解椭圆图 7 中, 联接点为  $M_0$ 。按几何封闭条件, 由  $M_0$  点做  $\overrightarrow{F_1 F_2}$  垂线交解椭圆于  $J_0, J'_0$  点, 解点  $J_0$  对应的来流初始位形见图 6。将图 6 中  $|\overrightarrow{F_1 M_0}|$  和  $|\overrightarrow{M_0 F_2}|$  互换, 所得出流解对应于解点  $J'_0$ 。设解椭圆参数为: 焦距  $2c = |\overrightarrow{F_1 F_2}| = A_1 - A_2$ , 长轴  $2a = A_1 + A_2$ 。选取椭圆中心  $G$  点为直角坐标原点,  $M_0$  点坐标为  $(x_{M_0}, 0)$ , 出流  $\overrightarrow{F_1 J_0}, \overrightarrow{J_0 F_2}$  与来流  $\overrightarrow{F_1 J_d}$  夹角  $\theta_3 = \angle J_0 F_1 J_d, \theta_4 = \angle J_0 F_2 F_1$ 。

选取来流初始位形参数

$$\xi = \begin{cases} |\overrightarrow{F_1 M_0}| & x_{M_0} \geq -c \\ -|\overrightarrow{F_1 M_0}| & x_{M_0} < -c \end{cases}$$

则出流射流的厚度和方向为

$$\begin{cases} A_3 = \frac{2A_1 A_2 + (A_1 - A_2) \xi}{A_1 + A_2} \\ A_4 = \frac{A_1^2 + A_2^2 - (A_1 - A_2) \xi}{A_1 + A_2} \end{cases} \quad (13)$$

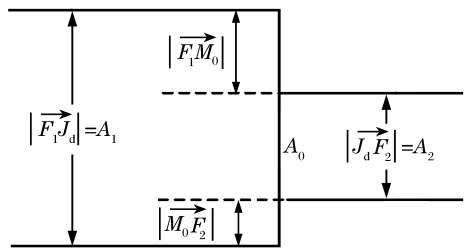


图 6 对应于解点  $J_0$  的来流初始位形  
Fig. 6 Initial configuration of the corresponding solution point  $J_0$

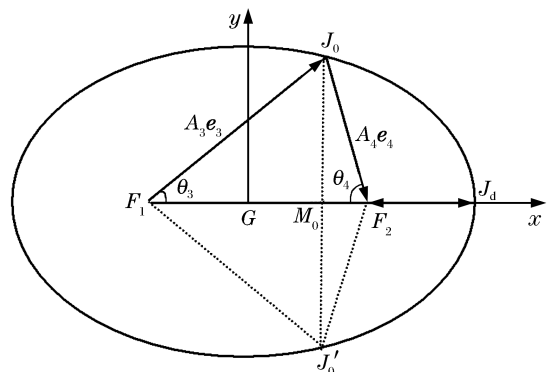


图 7 解椭圆及解点  $J_0$  和  $J'_0$   
Fig. 7 Solution ellipse, solution points  $J_0$  and  $J'_0$

$$\cos\theta_3 = \frac{(A_1 + A_2)\xi}{2A_1A_2 + (A_1 - A_2)\xi}, \quad \cos\theta_4 = \frac{(A_1 + A_2)(A_1 - A_2 - \xi)}{A_1^2 + A_2^2 - (A_1 - A_2)\xi} \quad (14)$$

这是由封闭条件给出的不等厚度平面来流非对称正碰撞的出流理论公式。

### 4.2 数值解

采用带有 YOUNGS 混合网格界面处理的二维欧拉程序,对不等厚度钢板高速碰撞形成射流问题进行数值模拟,与封闭条件给出的理论预测值进行比较。计算中不考虑弹塑性,选取来流参数  $\rho_1 = \rho_2 = 7.85 \text{ g/cm}^3, u_1 = u_2 = 2 \text{ km/s}$ 。采用量纲一形式,图 8 是不等厚度来流对称正碰撞时,出流方向随初始位形的变化,数值模拟结果与理论预测曲线完全符合。

以厚度比  $A_2 : A_1 = 1 : 2$  的两股来流非对称碰撞为例,给出了其出流射流方向随初始位形的变化规律。图 8 中曲线是由封闭条件给出的理论预测值,计算点为欧拉程序的数值模拟结果。

图 9 是来流正碰撞的情况。可以看出,数值结果与理论预测曲线吻合较好;当直接对称碰撞部分  $A_0$  较小( $\ll A_2$ )时有一定偏差,这可能是由于欧拉程序在混合网格界面处理过程中引起的数值误差。

图 10 是来流以交角  $\theta_0 = 110^\circ$  斜碰撞的情况。其中,  $\alpha_3, \alpha_4$  分别为出流射流  $A_3 e_3, A_4 e_4$  与碰撞来流  $A_1 e_1$  之间的夹角,且  $\alpha_3 = 180^\circ - (\theta_1 - \theta_3), \alpha_4 = \theta_1 - \theta_4$ 。数值结果与理论预测值符合也较好。

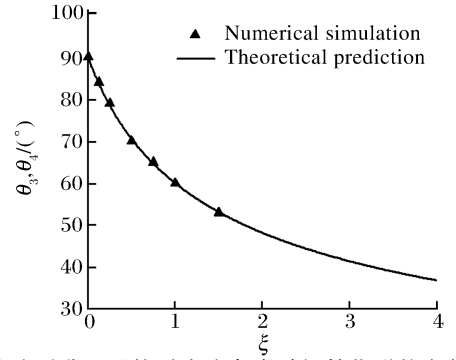


图 8 来流对称正碰撞时出流角度随初始位形的变化  
Fig. 8 Outgoing streams' angle vs initial configuration for symmetric head-on collision

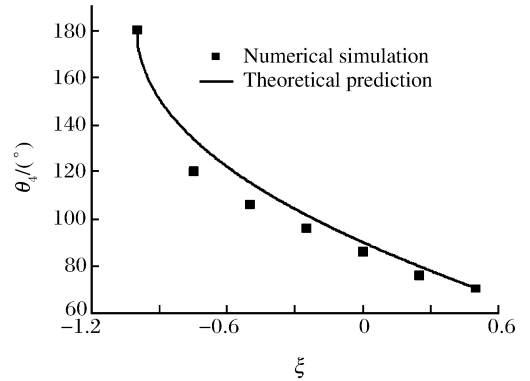
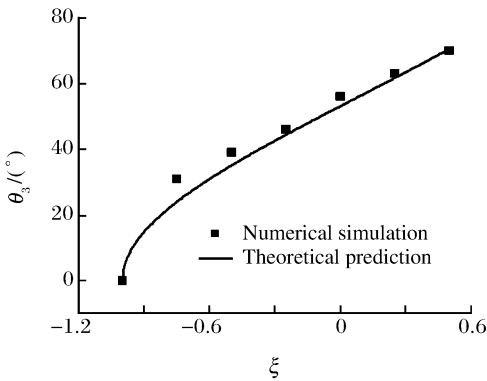


图 9 厚度比  $A_2 : A_1 = 1 : 2$  的两股反向来流非对称正碰撞时出流角度随初始位形的变化

Fig. 9 Outgoing streams' angle vs initial configuration for asymmetric head-on collision with thickness ratio 1 : 2

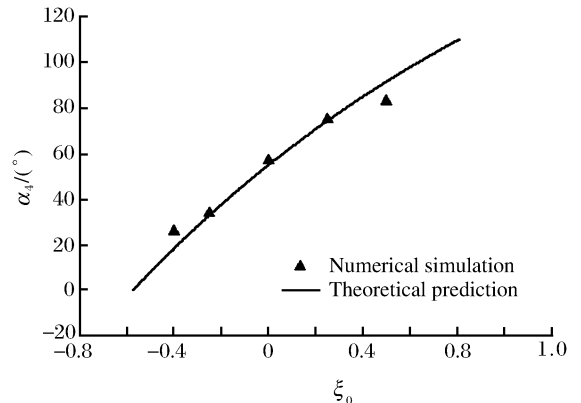
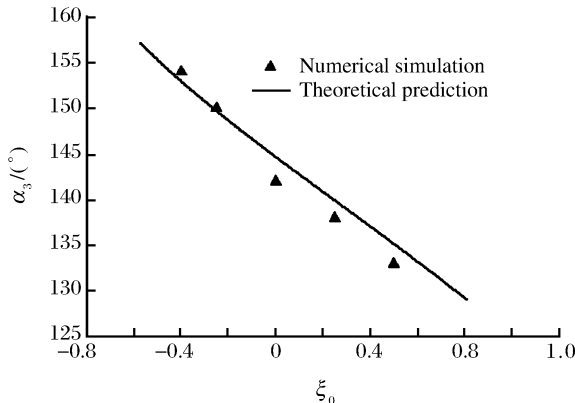
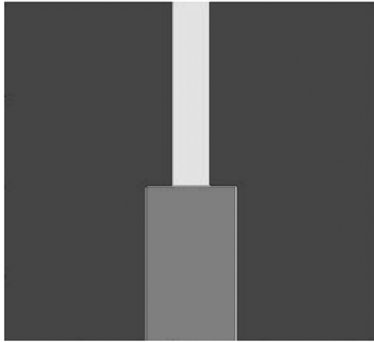


图 10 交角  $110^\circ$  厚度比  $A_2 : A_1 = 1 : 2$  的来流非对称斜碰撞时出流角度随初始位形的变化

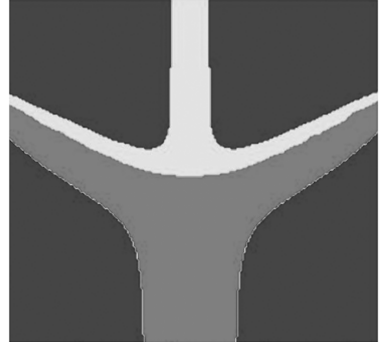
Fig. 10 Outgoing streams' angle vs initial configuration for oblique collision with angle  $110^\circ$  and thickness ratio 1 : 2

图 11 给出了厚度比  $A_2 : A_1 = 1 : 2$  的两股来流正碰撞形成的非对称射流在  $t = 160 \mu\text{s}$  的数值模拟图像。

(a)  $A_2:A_1:\xi=1:2:0.5$

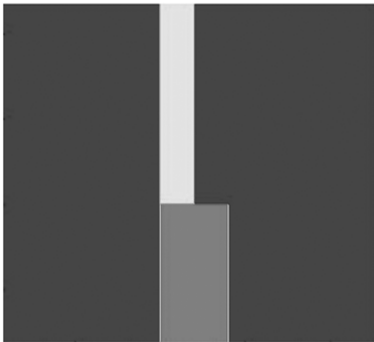


$t=0$



$t=160 \mu\text{s}$

(b)  $A_2:A_1:\xi=1:2:0$



$t=0$

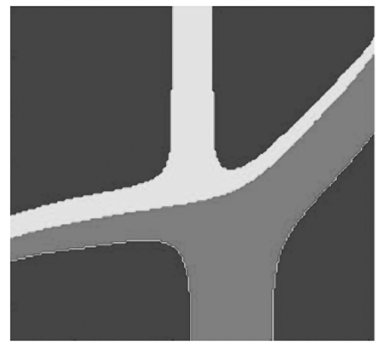


$t=160 \mu\text{s}$

(c)  $A_2:A_1:\xi=1:2:-0.5$



$t=0$



$t=160 \mu\text{s}$

图 11 不同初始位形的反向来流非对称正碰撞的数值模拟图像

Fig. 11 Simulation results for asymmetric collision of reverse streams

## 5 结束语

研究了两股密度、速度相同但厚度不同的平面来流碰撞过程中,来流初始交汇位形对于射流形成规律的影响。从定常出流满足的最小动能原理出发,在解椭圆上给出了方程组封闭条件和出流理论公式,提出了非对称射流形成的几何理论;对平面二维不等厚度来流非对称碰撞的出流方向、厚度进行了理论预测和数值模拟,两者吻合较好。研究表明:来流初始构形的非对称性对出流状态有重要影响,不同的来流初始位形对应于不同的稳态出流。目前,该几何封闭条件还没有得到严格的理论证明,因此,进一步的研究是必要的。

## 参考文献:

- [1] Birkhoff G, MacDougall D P, Pugh E M, et al. Explosives with linear cavities[J]. *Journal of Applied Physics*, 1948,19(6):563-582.
- [2] Pack D C, Curtis J P. On the effect of asymmetries on the jet from a linear shaped charge[J]. *Journal of Applied Physics*, 1990,67(11):6701-6704.
- [3] Curtis J P, Kelly R J. Circular streamline model of shaped-charge jet and slug formation with asymmetry[J]. *Journal of Applied Physics*, 1994,75(12):7700-7709.
- [4] Curtis J P. Asymmetric formation of shaped charge jets[C]//*Proceedings of the 17th International Symposium on Ballistics*. Midrand, South Africa, 1998:405-412.
- [5] Curtis J P. Variational principle for shaped charge jet formation[C]//*Crewther I R. Proceedings of the 19th International Symposium on Ballistics*. Interlaken, Switzerland, 2001:781-787.
- [6] Kinelovskii S A, Sokolov A V. Nonsymmetric collision of plane jets of an ideal incompressible fluid[J]. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fisiki*, 1986(1):54-57.
- [7] Hirsch E, Mordehai D. A test for measuring the energy density lost in two flow metallic collision[C]//*Proceedings of the 20th International Symposium on Ballistics*. Orlando, Florida, 2002:485-492.
- [8] Platini A. Sulla confluenza di due vene[R]. *Insttit Veneto di Sc L ed Arti*, LXXV, 1916:45.
- [9] Milne-Thompson L M. *Theoretical fluid dynamics*[M]. Russian: Mir, Moscow, 1964.

## The geometrical theory for the formation of asymmetric jet( I )

### —The geometrical close condition

QIN Cheng-sen, SHI Yi-na<sup>\*</sup>, FENG Qi-jing, HANG Yi-hong

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*)

**Abstract:** The problem of asymmetric jet formation during the two-flow collision is theoretically unsolved yet, owing to steady solution's indeterminacy. Starting with special jets, we analyze the asymmetry between initial configuration of two incoming streams and their interaction. Based on principle of minimum kinetic energy, the close condition of equations is built, which is satisfied with the problem of asymmetric collision. The geometrical theory of asymmetric jet formation is given. Taking the collision of planar incoming streams with unequal thickness for example, we predict outgoing stream's direction and size as a function of initial configuration of the incoming streams, which are in agreement with numerical results.

**Key words:** fluid mechanics; close condition; solution ellipse; asymmetric jet; initial configuration; numerical simulation

---

\* Corresponding author: SHI Yi-na  
E-mail address: shyn@mail.iapcm.ac.cn  
Telephone: 86-10-62014411-2141