

文章编号: 1001-1455(2007)06-0515-07

可压缩多介质粘性流体的数值计算^{*}

柏劲松^{1,2}, 李 平^{1,2}, 王 涛², 谢 彬², 钟 敏², 陈森华²

(1. 中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理实验室, 四川 绵阳 621900;

2. 中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621900)

摘要: 将考虑热传导和粘性情况下的 Navier Stokes 方程描述的物理过程分解成 3 个子过程进行数值计算, 即把整个流量计算分解成无粘性流量、粘性流量和热流量 3 部分, 采用多介质流体高精度 parabolic piecewise method (PPM) 方法、二阶空间中心差方法和两步 Rung-Kutta 时间推进方法相结合进行数值计算。给出了激波管中 Riemann 问题和二维、三维 Richtmyer-Meshkov 界面不稳定性的 Navier Stokes 方程和 Euler 方程对比计算结果, 显示了粘性对界面不稳定性的影响。

关键词: 流体力学; Navier Stokes 方程; 多流体 PPM 方法; 粘性流体

中图分类号: O357

国标学科代码: 130 · 2531

文献标志码: A

1 引 言

在流体的粘性系数较小、流速不大的情况下, 流体流动可以近似看成是理想流体流动, 可用 Euler 运动微分方程来讨论。实际的流体是有粘性的, 若流体的粘性影响不可忽略时, 就不能用理想流体理论, 需要通过求解 Navier Stokes (NS) 方程进行讨论。在流体的运动中, 由于粘性, 可以形成流团之间的某种相互作用力, 这种相互作用力和固体间的摩擦力相似, 是阻碍流体间相对运动的, 因此粘性流体的法向应力和切向应力都必须同时考虑。界面不稳定性研究中, Los Alamos National Laboratory 的 Cuervo 和 Lawrence Livermore National Laboratory 的 Raptor 计算程序均具有计算粘性流体的能力, 针对激波加载气柱实验^[1], 由对考虑粘性的 Cuervo、Raptor 计算程序和不考虑粘性的 Rage 程序的计算结果的比较可见, 用考虑粘性的 Cuervo 和 Raptor 程序计算的图像与实验结果更接近。

研究可压缩多介质粘性流体数值计算方法, 目的是正确模拟包含激波、稀疏波以及接触间断等多介质真实流体相互作用下的流体运动情况。本文中采用算子分裂技术, 将考虑热传导和粘性情况下的 NS 方程描述的物理过程分解成 3 个子过程进行数值计算, 即将整个流量计算分解成无粘性流量、粘性流量和热流量 3 部分。对于无粘性流体部分, 包含对激波、稀疏波以及接触间断的计算和多介质界面处理技术; 对于粘性流体和热流的计算, 主要考虑牛顿流体粘性应力张量和能量流的影响。其中, 第一部分用可压缩多介质流体 Euler 方程描述, 多介质流体界面计算采用 volume of fluid (VOF) 方法进行处理^[2], 运用多介质流体高精度 parabolic piecewise method (PPM) 方法计算流场^[3]; 第二部分粘性通量可用二阶空间中心差分计算, 时间推进采用两步 Rung-Kutta 方法进行求解; 第三部分为热流的计算, 仅对能量方程产生影响, 本文中暂时未考虑这一步的影响。由本文中对激波管中 Riemann 问题进行的数值计算可以看出, 粘性对激波和稀疏波的影响比较明显; 在对 Richtmyer-Meshkov (RM) 界面不稳定性的计算中^[4], 给出了二维和三维界面不稳定性的 NS 方程和 Euler 方程对比计算结果。从本文的数值计算结果可见, 对于可压缩多介质流体, 在交界面作简单运动和粘性系数较小的情况下, 粘性对流场的影响比较小, 而对于界面不稳定性中多介质复杂流动及其相互作用情况下, 尽管粘性系数比较小, 但是对流场特别是因界面不稳定性引起的混合部分产生了比较明显的影响。

* 收稿日期: 2006-06-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(10672151); 冲击波物理与爆轰物理实验室基金项目(9140C6704010704)

作者简介: 柏劲松(1968—), 男, 博士, 副研究员。

2 基本方程和计算方法

考虑热传导和粘性情况下的 NS 基本方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho E + p)u_j]}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} \\ \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial t} + u_j \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial x_j} = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: i, j 分别代表 x, y, z 三个方向, 相同的 i, j 表示求和; $\rho, u_k (k=i, j), p$ 分别表示密度、速度和压力; E 表示单位质量的总能量; N 表示介质的种类; $Y^{(s)}$ 为第 s 种介质的体积分数, 在含有 N 种不同介质的混合网格中, 各体积分数满足 $\sum Y^{(s)} = 1$ 。方程(1)中 σ_{ij} 为牛顿流体粘性应力, 且

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

μ 为流体的粘性系数; q_j 为热传导在单位时间单位空间的能量流, $q_j = -\lambda \partial T / \partial x_j$, T 为流体温度, λ 为流体的有效导热系数。

采用算子分裂技术, 将方程(1)中描述的物理过程分解成 3 个子过程进行计算, 即将整个流量计算分解成无粘性流量、粘性流量和热量流 3 部分计算。对于无粘性流体部分, 包含对激波、稀疏波以及接触间断的计算和界面处理; 对于粘性流体和热流的计算, 主要考虑牛顿流体粘性应力张量和能量流的影响。这样方程(1)分解成方程(2)和方程(3)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i + p)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho E + p)u_j]}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial t} + u_j \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial x_j} = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} \\ \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial t} = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (3)$$

其中方程(2)为可压缩多介质流体 Euler 方程, 可以采用多介质流体高精度 PPM 方法进行求解。对于方程(3), 粘性通量可用二阶空间中心差分计算, 时间推进采用两步 Rung-Kutta 方法进行求解。

3 差分格式

对于方程(2), 采用多介质流体高精度 PPM 计算方法, 以 VOF 方法为基础进行求解, 采用维数分裂方法将多维问题简化为多个一维问题来处理, 一维问题的计算方法可以适用于多维问题的数值计算。以 x 方向为例, 一维情况下方程(2)的分量形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho E + p)u]}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial t} + u \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial x} = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4)$$

式中： u 表示 x 方向的速度。状态方程采用 Stiffen Gas 形式 $p = (\gamma - 1)\rho e + \gamma \pi$ ，对于气体， γ 为比热比 ($\gamma > 1$)， $\pi = 0$ ；对于液体和用冲击 Hugoniot 曲线描述的弹性密实介质， γ 为材料的拟合常数， π 为具有粘性张量纲的材料常数。

运用 Lagrange-Remapping 两步算法来求解方程组(4)，整个计算分 4 个步骤完成：(1)物理量的分段抛物插值；(2)近似 Riemann 问题求解；(3)Lagrange 方程组的推进求解；(4)最后将物理量变回到静止的 Euler 网格上。对于 Lagrange 步，由于介质体积分数 $Y^{(s)}$ 的随体导数为零，体积分数 $Y^{(s)}$ 在 Lagrange 步计算中保持不变，因此多介质流体的一维 Lagrange 控制方程组可以写成

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial(r^\alpha u)}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + r^\alpha \frac{\partial p}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(r^\alpha u p)}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial t} = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5)$$

式中： τ 为比容； α 在平面、轴对称和球对称时分别取 0、1、2； r 为空间坐标； m 为质量坐标， $m = \int_{r_0}^r \rho r^\alpha dr$ 。经过 Lagrange 步网格发生变形，因此需要 Remap 步的计算，将 Lagrange 网格中平均物理量从 Lagrange 坐标系变换到静止 Euler 网格上，经过 Remap 步，Euler 网格上物理量为 $(\rho^E)^{n+1}$ 、 $(u^E)^{n+1}$ 、 $(E^E)^{n+1}$ 和 $((Y^{(s)})^E)^{n+1}$ 。利用 Strang 维数分裂，将上述过程推广到多维情况，差分格式见文献[5]。

对于方程(3)，其粘性通量采用二阶空间中心差分计算，时间推进采用两步 Rung-Kutta 方法进行求解。由于牛顿流体粘性应力张量和能量流仅对流场的动量和能量产生影响，因此不考虑方程(3)中的第一个和最后一个方程，将它写成守恒形式为

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}} = (\rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^\top \\ \bar{\mathbf{F}} = (-\sigma_{xx}, -\sigma_{xy}, -\sigma_{xz}, -(u\sigma_{xx} - v\sigma_{xy} - w\sigma_{xz} + q))^\top \\ \bar{\mathbf{G}} = (-\sigma_{yx}, -\sigma_{yy}, -\sigma_{yz}, -(u\sigma_{yx} - v\sigma_{yy} - w\sigma_{yz} + q))^\top \\ \bar{\mathbf{H}} = (-\sigma_{zx}, -\sigma_{zy}, -\sigma_{zz}, -(u\sigma_{zx} - v\sigma_{zy} - w\sigma_{zz} + q))^\top \end{cases} \quad (7)$$

式中： u, v, w 分别表示 x, y, z 方向上的速度。在笛卡儿坐标系下，可用守恒型有限差分算子将式(6)中的空间导数项表示为

$$\mathbf{L}_h(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^E) = \frac{\bar{\mathbf{F}}_{i-1/2,j,k}^E - \bar{\mathbf{F}}_{i+1/2,j,k}^E}{\Delta x} + \frac{\bar{\mathbf{G}}_{i,j-1/2,k}^E - \bar{\mathbf{G}}_{i,j+1/2,k}^E}{\Delta y} + \frac{\bar{\mathbf{H}}_{i,j,k-1/2}^E - \bar{\mathbf{H}}_{i,j,k+1/2}^E}{\Delta z} \quad (8)$$

式中：上标 E 表示前面经 Remap 步后 Euler 网格上的物理量，则采用两步 Rung-Kutta 时间推进方法得到的计算为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{(D)} = \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^E + \Delta t \mathbf{L}_h(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^E) \\ \mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^E + \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{(D)} + \Delta t \mathbf{L}_h(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{(D)})] \end{cases} \quad (9)$$

4 数值算例

算例1 气体-液体两相流的 Riemann 问题

对于气体-液体两相流的一维 Riemann 问题,初始条件在 $x \in [0, 0.5]$ 区间内为气体状态,在 $x \in [0.5, 1.0]$ 区间内为液体状态。下面取的量纲为 1 的数据来自文献[6-7]中计算球对称水下爆炸的数据

$$(\rho, u, p, \gamma, \pi)_L = (1.241, 0, 2.753, 1.4, 0) \quad x < 0.5$$

$$(\rho, u, p, \gamma, \pi)_R = (0.991, 0, 3.059 \times 10^{-4}, 5.5, 1.505) \quad x \geq 0.5$$

在 $[0, 1]$ 内划分网格数为 200。对于气体和液体的动力粘性系数 μ 分别取 4.0×10^{-5} 和 1.0×10^{-3} 。在 $t=0.1$ 时刻考虑粘性和不考虑粘性计算的密度、压力和速度分布如图 1 所示,由于粘性对流场影响较小,因此在图 1 中 viscous 1 和 inviscid 对应的曲线差别较小。为了在数值计算中观察粘性对流场的影响,适当地人为增大动力粘性系数,将气体和液体的动力粘性系数分别设置为 2.0×10^{-3} 和 2.0×10^{-2} ,此时在图 1 中对应曲线 viscous 2。比较曲线 viscous 1 和曲线 viscous 2,可以清楚地看出,对于可压缩粘性流体,粘性对激波和稀疏波的影响较明显。该算例中由于流体的交界面是以间断分解后恒定的接触间断速度作平面运动,而粘性系数较小,因此粘性对其影响较小。

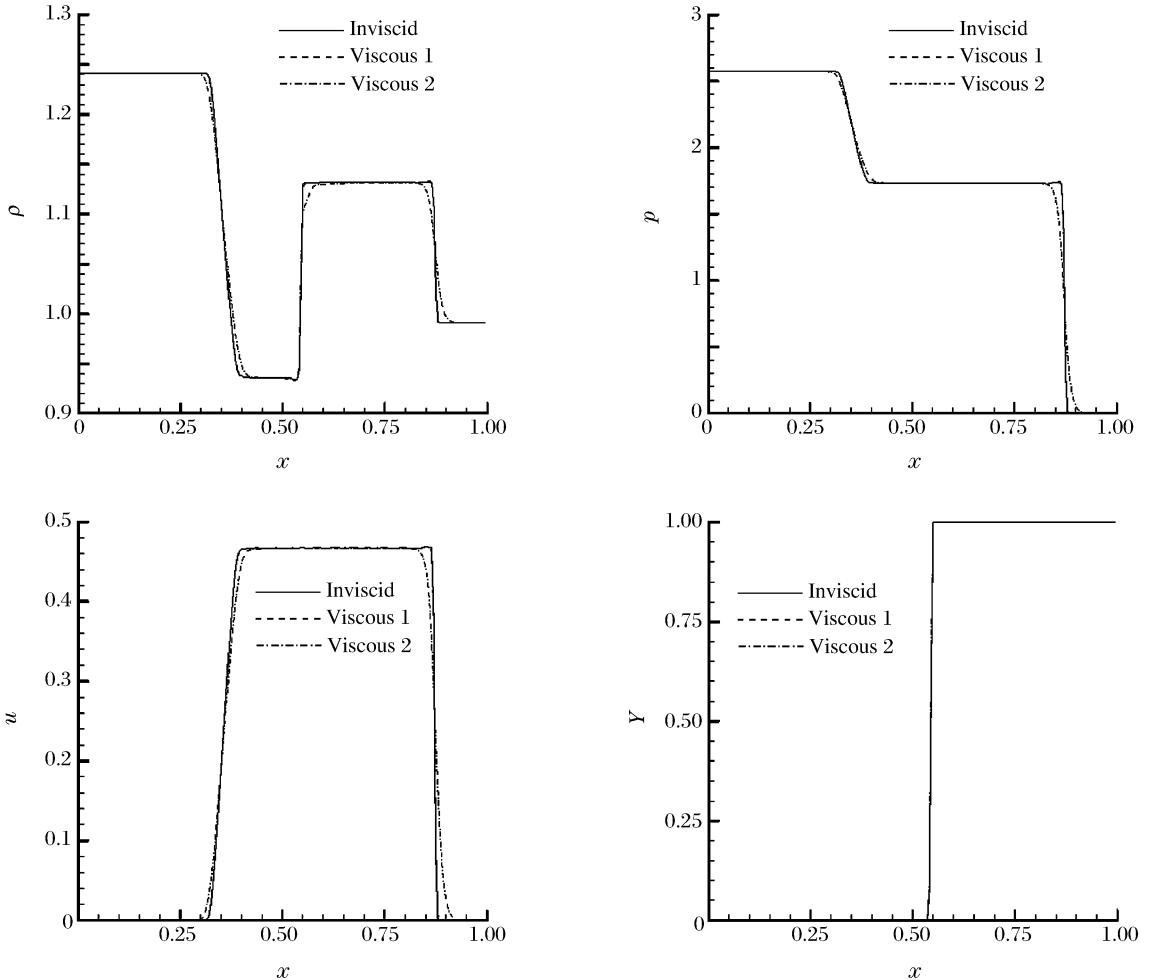


图 1 $t=1.0$ 时刻气体-液体两相流 Riemann 问题的数值计算结果

Fig. 1 Numerical results of the two-phase gas-liquid Riemann problem at $t=0.1$

算例2 二维 RM 不稳定性多介质粘性流体的数值计算

当激波在非线性物质表面上折射时,物质界面获得一个有限加速度,该界面上的扰动发展形成 RM 界面不稳定性。考虑气液两相流 RM 界面不稳定性问题,设计算区域高度和宽度分别为 1 和 5,两种不

同流体初始时刻界面处扰动

$$x = x_0 + A \cos[\omega k(y - y_0)] \quad x \in [-1, 4], \quad y \in [0, 1]$$

式中： $x_0 = 3.2, y_0 = 0.5, \omega = 6.283, k = 1, A = 0.1$ 。两种流体初始参数^[8]从左到右(见图 2(a))为

$$(\rho, u, v, p, \gamma, \pi)_L = (1, 0, 0, 1, 1.4, 0), \quad (\rho, u, v, p, \gamma, \pi)_M = (5, 0, 0, 1, 4, 1)$$

$$(\rho, u, v, p, \gamma, \pi)_R = (7.093, -0.7288, 0, 10, 4, 1)$$

右边液体中激波马赫数为 1.95, 界面位置为 3.325。NS 方程计算中气体和液体的动力粘性系数 μ 分别取为 4.0×10^{-5} 和 1.0×10^{-3} , 计算网格为 500×100 。在 $t = 2.0$ 时刻计算给出密度、压力、速度和液体体积分数的等值线结果如图 2(b)~(e), 其中实线表示不考虑粘性影响的计算结果, 虚线为考虑粘性影响的计算结果, 密度、压力和速度为 30 条等值线, 液体体积分数为 0.05、0.5、0.95 三条等值线。从对比计算结果可见, 粘性项对流场产生了一定的影响, 对于界面不稳定性问题, 在界面上非线性比较严重区域影响更明显, 如尖钉两侧的混合区域。

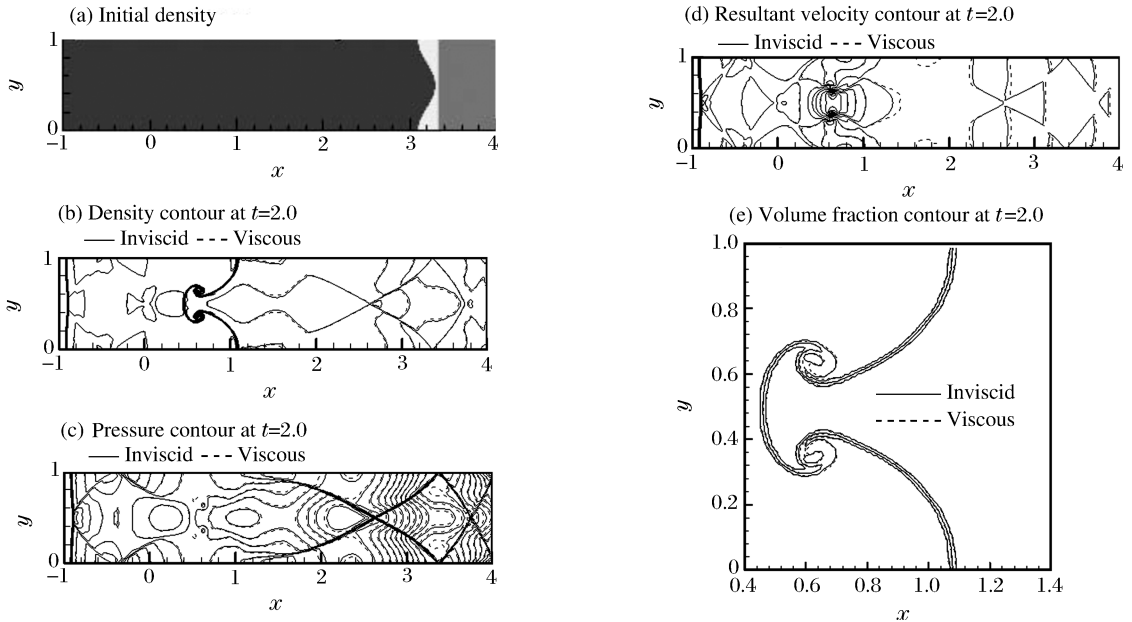


图 2 $t = 0.2$ 时刻二维 RM 不稳定性多介质粘性流体的数值计算结果

Fig. 2 Numerical results of the two-dimensional multi-viscosity-fluid RM instability at $t = 2.0$

算例 3 三维 RM 不稳定性多介质粘性流体的并行计算

该算例是重流体中激波向上运动加速气体-液体界面, 受扰动的交界面位置表示为

$$z = z_0 + \eta (\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)) \quad z \in [-2, 2], x \in [0, 1], y \in [0, 1]$$

式中： $z_0 = -1.2$ 是无扰动的气体-液体交界面位置, $\eta_0 = 0.1$ 是交界面的扰动强度, 激波初始位置 $z = -1.5$ 。NS 方程中气体和液体的动力粘性系数 μ 分别取为 4.0×10^{-5} 和 1.0×10^{-3} 。初始条件为

$$(\rho, p, u, v, w, \gamma, \pi) = \begin{cases} (7.093, 10, 0, 0, 0, 0.7288, 4, 1) & z < -1.5 \\ (5, 1, 0, 0, 0, 4, 1) & -1.5 \leq z \leq -1.2 + 0.1\cos(2\pi x) + 0.1\cos(2\pi y) \\ (1, 1, 0, 0, 0, 1, 4, 0) & z > -1.2 + 0.1\cos(2\pi x) + 0.1\cos(2\pi y) \end{cases}$$

取 x, y 方向为固壁边界条件, z 方向为流动边界条件。计算采用区域分解方法, 通过非阻塞通信方式进行数据交换, 在 MPI 并行环境下, 用 32 个 2.2 G 的 CPU 完成该算例, 计算网格设置为 $160 \times 160 \times 320$ 。

激波穿越气液交界面时产生透射波和反射波, 如果是重流体加速轻流体, 反射波为稀疏波; 如果是轻流体加速重流体, 则反射波为激波, 本算例为前者。由于激波对交界面加速时在交界面上 $\nabla \rho \times \nabla p \neq 0$ 产生涡量, 从而导致交界面失稳并不断演化, 最后重流体进入轻流体形成尖钉状结构, 而轻流体如同被重流体包围形成泡状结构。在 $t = 2.0$ 时刻给出考虑粘性情况下 NS 方程计算的交界面的形状如图 3(a) 所示, 沿 $y = 0.5$ 剖开可以比较清楚地观察内界面形状如图 3(b) 所示, 图 3(c) 是 $t = 2.0$ 时刻不

考虑粘性时 Euler 方程计算给出的交界面形状。可见,2 种情况下 $t=2.0$ 时刻 RM 界面不稳定性均已经完全发展起来,有明显的蘑菇形状结构,其顶部是重流体进入轻流体形成尖钉状结构,而下面是轻流体被重流体包围形成泡状结构。为了比较 NS 方程和 Euler 方程计算给出的交界面形状,图 4 在 xz 平面上给出 $y=0.5$ 剖面的气体体积分数二维图形,气体体积分数从 1% 到 99%,图 4(a) 是 NS 方程计算结果,图 4(b) 是 Euler 方程计算结果,显然在重流体进入轻流体形成尖钉状结构中,考虑粘性效应时界面不稳定性引起的混合部分明显小于不考虑粘性时的情况,同时前者的涡结构似乎较后者更规则。可见,尽管粘性系数比较小,但对流场特别是因界面不稳定性引起的混合部分在考虑与不考虑流体粘性时,其差异是比较明显的。

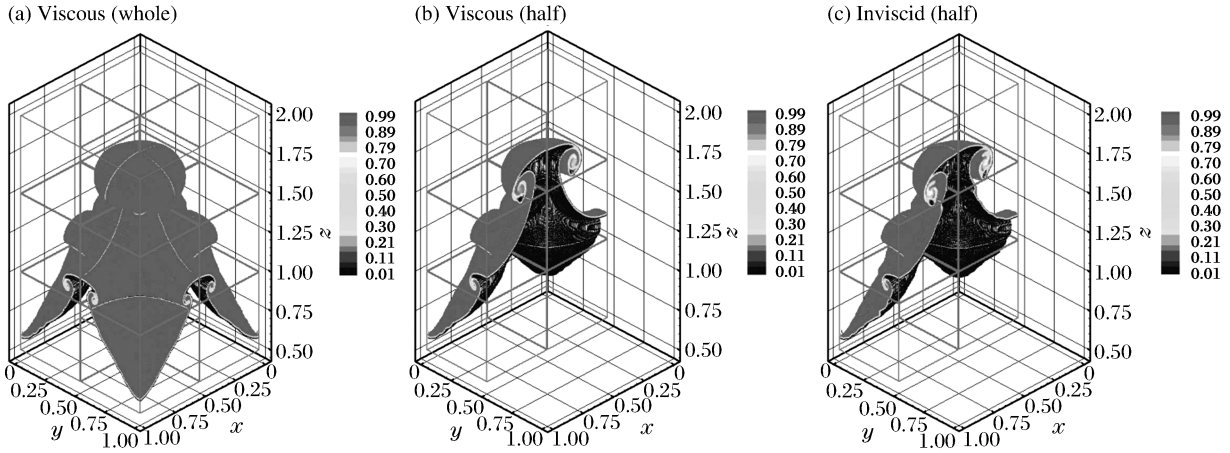


图 3 $t=2.0$ 时刻的界面形状图

Fig. 3 Interface configuration at $t=2.0$

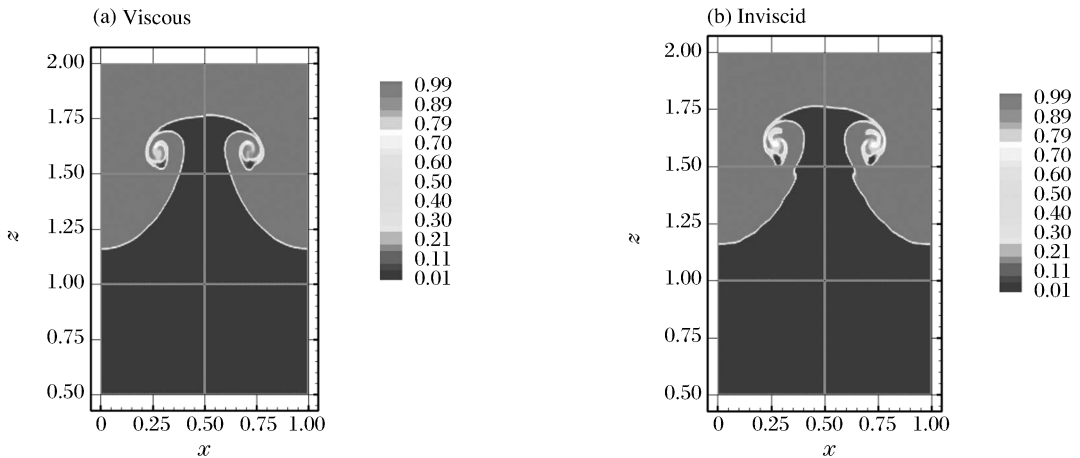


图 4 xz 中间面上气体的体积分数二维图形

Fig. 4 Volume fraction plots of the air at the xz middle plane

5 结论

本文中给出了考虑热传导和粘性情况下的可压缩多介质流体 NS 方程的计算方法,将高精度 PPM 方法、二阶空间中心差方法和两步 Rung-Kutta 时间推进方法相结合进行数值计算,通过数值算例,比较了考虑与不考虑流体粘性时的计算结果。对于界面不稳定性中多介质复杂流动及其相互作用情况下,尽管粘性系数比较小,但是对流场特别是因界面不稳定性引起的混合部分产生了比较明显的影响。这为进一步研究可压缩多介质粘性流体界面不稳定性引起的湍流混合问题以及大涡模拟打下基础。

参考文献:

- [1] Greenough J A, Rider W J, Zoldi C, et al. Code-to-code comparisons for the problem of shock acceleration of a diffuse dense gaseous cylinder[C]// 8th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. Lawrence Livermore National Laboratory and Los Alamos National Laboratory, 2001.
- [2] 宁建国, 陈龙伟. Euler 方法中的模糊界面处理[J]. 中国科学: E, 2004, 34(7): 776-792.
- [3] Colella P, Woodward P. The piecewise parabolic method (PPM) for gas dynamical simulations[J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54: 174-201.
- [4] 赵宁, 余彦, 唐维军. R-M 不稳定性数值模拟方法[J]. 计算数学, 2001, 23(4): 477-490.
ZHAO Ning, YU Yan, TANG Wei-jun. Numerical simulation methods to Richtmyer-Meshkov instabilities[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2001, 23(4): 477-490.
- [5] BAI Jing-song, LI Ping, TAN Duo-wang. Simulations of the instabilities experiments in stratified cylindrical shells [J]. Chinese Physics Letter, 2006, 23(7): 1850-1852.
- [6] Cocchi J P, Saurel R, Loraud J C. Treatment of interface problems with Godunov-type schemes[J]. Shock Waves, 1996, 5: 347-357.
- [7] Cooke C H, Chen T J. Continuous front tracking with subcell resolution[J]. Journal of Scientific Computing, 1991, 6: 269-275.
- [8] Shyue K M. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 142(1): 208-242.

Computation of compressible multi-viscosity-fluid flows

BAI Jing-song^{1,2*}, LI Ping^{1,2}, WANG Tao²,
XIE Bin², ZHONG Min², CHEN Sen-hua²

- (1. *Laboratory for Shock Wave and Detonation Physics Research, Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, Sichuan, China;*
2. *Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, Sichuan, China*)

Abstract: By using a splitting technique, the flux of the Navier Stokes governing equations including heat exchange and viscosity are divided into three parts, so called inviscid flux, viscous flux and heat flux, to calculate. The inviscid part of flux is evaluated using a high resolution multi-fluid parabolic piecewise method, the viscous part of flux is computed with a second order central difference in space and two-step Rung-Kutta scheme in time, and the heat flux part is not considered. Influences of fluid viscosity on instability of the interface between two fluids are revealed by computation results of the examples of Riemann problem in shock tube, two and three dimensional Richtmyer-Meshkov instabilities using the Navier Stokes governing equations and Euler governing equations.

Key words: liquid mechanics; Navier Stokes equation; multi-fluid parabolic piecewise method; viscous fluid

* Corresponding author: BAI Jing-song
E-mail address: bjsong_mail@21cn.com
Telephone: 86-816-2485109