

文章编号: 1001-1455(2007)06-0522-07

光滑粒子法与有限元的耦合算法 及其在冲击动力学中的应用*

王吉, 王肖钧, 卞梁

(中国科学技术大学力学与机械工程系, 安徽 合肥 230026)

摘要: 扼要讨论了光滑粒子法的离散思想, 充分利用光滑粒子法和有限元方法各自的优点, 提出了一种初始时刻用有限元建模, 计算过程中大变形单元自动转换为光滑粒子的耦合算法。高速碰撞的系列算例说明, 耦合算法不但适宜于计算大变形冲击动力学问题, 而且由于集两种方法的优点于一身, 可以更高效地模拟一些高速碰撞问题, 提高计算效率。

关键词: 固体力学; 耦合算法; 光滑粒子法; 高速碰撞; 有限元

中图分类号: O347; O413.1

国标学科代码: 130 · 1570

文献标志码: A

1 引言

高速碰撞是典型的冲击力学问题, 高速碰撞数值模拟计算一直是冲击工程数值计算的难点。当采用 Lagrange 有限元或有限差分方法计算高速碰撞问题时, 必然遇到网格大畸变和滑移面处理等一系列数值计算中的关键问题, 他们常常成为 Lagrange 有限元或有限差分法在工程应用中的制约因素。虽然 Euler 方法不存在计算大畸变问题的困难, 但是难以准确描述各类界面。因此寻找适宜于高速碰撞数值模拟的新的计算方法, 一直是计算力学工作者的努力目标。光滑粒子法(smoothed particle hydrodynamics method)便是其中的一种典型方法。光滑粒子法是一种纯 Lagrange 无网格算法, 通过带质量的粒子离散计算域, 粒子本身便代表材料, 不同材料的粒子自然地构成界面, 不同材料粒子的相对运动便形成所谓界面的滑移。因此从理论上说, 光滑粒子法可以比较“自然地”模拟高速碰撞、侵彻贯穿等物理现象, 因此是冲击力学中一种比较理想和有前途的数值方法, 但其计算效率要低于有限元法。为了提高计算效率, G. R. Johnson 等^[1-2]将光滑粒子法与有限元方法耦合起来, 发挥他们各自的长处, 在变形大的地方采用光滑粒子方法, 其他区域使用有限元算法, 开展侵彻贯穿方面的数值计算, 取得了一些有意义的结果。

本文中在 G. R. Johnson 等^[1-2]的工作基础上, 提出一种初始时刻用有限元方法建模、随着变形的增大、大变形区域的有限元单元自动转换成光滑粒子的耦合算法。并详细讨论耦合算法中的几个关键问题, 如粒子生成的条件与方式、滑移计算与界面计算等。通过经典 Taylor 碰撞、高速和超高速碰撞等问题的计算实例, 分析耦合算法的长处和特点。

2 光滑粒子法

J. K. Chen 等^[3]从 Taylor 展开式出发, 引入核函数的概念, 建立了光滑粒子法的基本算式。设函数 $f(\mathbf{x}')$, 对粒子 i 所在位置 \mathbf{x}_i 进行 Taylor 展开, 并引入核函数 $W_i = W(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|, h)$, 其中 h 为光滑长度。在解域 Ω 中积分, 便可得到函数 $f(\mathbf{x}')$ 一阶偏导数核估计的求和形式

* 收稿日期: 2006-05-22; 修回日期: 2006-09-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(10572134)

作者简介: 王吉(1979—), 男, 博士研究生。

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j(f_j - f_i)W_{ij,\beta}}{\rho_j} = \frac{\partial f}{\partial x_i^\alpha} \sum_{j=1}^N \frac{m_j(x_j^\alpha - x_i^\alpha)W_{ij,\beta}}{\rho_j} \tag{1}$$

式中： N 表示粒子数，由于核函数 W 是强尖峰函数，因此实际计算时，只需考虑 W 某一邻域里的粒子， m_j 是粒子 x_j 的质量， $W_{ij,\beta}$ 表示离散核函数 W_{ij} 对空间坐标 x^β 的偏导数。(1) 式是以空间坐标 x_i^β 为方向的代数方程组，求解该方程组，便可获得函数 $f(x')$ 沿三个方向的一阶偏导数。可以证明由此获得的一阶偏导数的核估计，对于内点精度为二阶，而对于边界点则为一阶。采用(1)式对守恒方程中的空间导数进行离散，便可得到光滑粒子法的基本算式。

3 光滑粒子法和有限元法的耦合

在高速和超高速碰撞的数值模拟计算中，Lagrange 有限元常常遭遇局部区域一些网格畸变过大，以及侵入面推进过程中两侧单元滑移计算的困难。虽然光滑粒子法可以自然地避开这些问题，但是其计算效率远低于有限元方法，因此其工程应用受到了很大限制。考虑到网格畸变过大和滑移计算只发生在局部区域的一些个别单元上，倘若能将出现计算困难的单元自动转换为光滑粒子，按光滑粒子法计算，其余区域依然用有限元方法计算，则可充分发挥两者的优势，切实解决高速碰撞中的计算难题。然而耦合算法也提出了新的课题：(1) 如何实现有限元单元向光滑粒子的自动转换；(2) 光滑粒子与有限元单元间的界面计算问题。

3.1 有限元单元向光滑粒子的转换

Lagrange 有限元在高速侵入数值计算中，滑移面两侧单元常常是大畸变单元，因此需要依据网格具体变形情况设计光滑粒子生成的条件。在耦合算法中，我们借用有限元计算中处理大畸变单元的思想，以等效塑性应变作为单元转换的判据，即当位于滑移面两侧 Lagrange 单元的等效塑性应变达到某一特定值时，将此单元转换成光滑粒子。此时，光滑粒子的质量、体积和应力都等同于被替换 Lagrange 单元相应的物理量，而粒子的几何量，如坐标和速度则取为该 Lagrange 单元节点的平均值，再利用光滑粒子的速度分布，求出该时刻粒子的应变率张量和旋转率张量。光滑粒子的光滑长度 h 可以近似通过质量守恒条件获得

$$h = h_0 (\rho_0 / \rho)^{1/\nu} \tag{2}$$

式中： h_0 表示初始设定的光滑长度，它的选取带有经验性，并和初始的 Lagrange 单元尺寸相关， ν 为空间的维数，轴对称情况下取 $\nu=3$ 。

图 1 为位于滑移面上的 Lagrange 单元向光滑粒子转换的示意图，虚线 N 为初始滑移面，实线 M 为单元转换以后的滑移面。以该时刻为例，滑移面上有 4 个单元满足转换条件而转换成光滑粒子（黑色的圆）。

应该指出，有限元算法里，等效塑性应变是作为单元因畸变过大而破坏所设立的判据，但在耦合算法里，等效塑性应变是单元转换为粒子的阈值条件，两者的物理意义并不相同。耦合算法里的等效塑性应变直接关系到光滑粒子的个数。由于粒子数的多寡对计算结果的影响并不是本文研究的重点，因此在下面的算例里将参考 G. R. Johnson 的工作^[1]，将阈值取为 0.5，以说明本文方法的有效性。

3.2 光滑粒子与有限元交界面的滑移计算

界面处理也是高速碰撞计算中的关键问题，在耦合算法中，同样也存在着光滑粒子与有限元界面（滑移面）之间的接触问题。如图 2 所示，图中每一个圆都代表一个光滑粒子，当粒子侵入滑移面 M 时

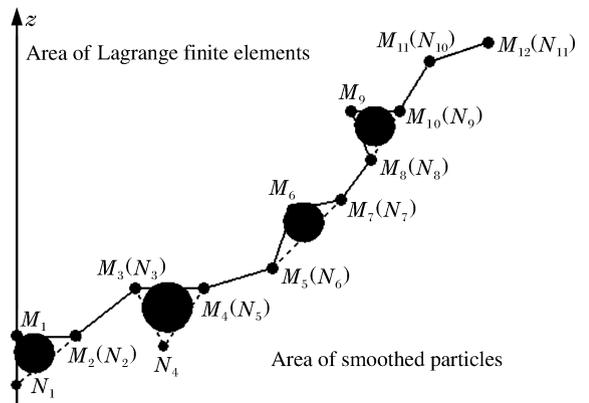


图 1 Lagrange 单元与光滑粒子的转换示意图

Fig. 1 Description of the SPH node generation algorithm

(如粒子 i 和 j), 由于这种侵入是非物理的, 因此要做必要的处理。首先根据动量守恒、动量距守恒定理对该粒子和位于滑移面上的相关有限元节点进行速度调整

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_i v_i = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 + m_i v'_i \\ m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + m_i v_i r_i = m_1 v'_1 r_1 + m_2 v'_2 r_2 + m_i v'_i r_i \\ v'_i - v'_1 = (v_2 - v_1)(r_i - r_1)/(r_2 - r_1) \end{cases} \quad (3)$$

式中: i 表示光滑粒子 i , 1 和 2 表示与粒子 i 相接触 Lagrange 单元对应的两个节点 M_2 和 M_3 , v_1 、 v_2 和 v_i 分别为节点 M_2 、 M_3 及粒子 i 调整前沿线段 $M_2 M_3$ 法线方向的速度分量, v'_1 、 v'_2 和 v'_i 则是调整后的法向速度分量, r 代表矢径。其中第三个公式表示 M_2 、 M_3 和 i 的速度分量呈线性分布。然后利用速度插值方式调整光滑粒子和单元节点的位置, 使粒子沿滑移面法向方向回到刚好与滑移面相切的位置。

3.3 界面附近光滑粒子的计算

处于光滑粒子区和有限元区交界面附近的光滑粒子, 其影响域会包含部分的 Lagrange 单元, 如图 3 所示。光滑粒子的计算精度与影响域内的粒子数和分布形态密切相关, 如果在计算这些光滑粒子时不涉及相关单元, 那么必将影响粒子的计算精度, 特别是在计算初期粒子数比较少的时候尤为突出。因此需要对这些粒子影响域内的 Lagrange 单元做一定的处理, 使其既有 Lagrange 单元的信息又有光滑粒子的信息, 我们将这些单元称为虚拟粒子。由于粒子影响域不大, 因此只需让位于滑移面一侧的 Lagrange 单元以虚拟粒子的身份参与光滑粒子计算即可, 这些虚拟粒子的质量、体积和应力都等同于 Lagrange 单元相应的物理量, 而粒子的坐标和速度为该单元节点的平均值。图 3 中实线圆为光滑粒子, 小的虚线圆为虚拟粒子, 大的虚线圆为粒子 i 的影响域。此时不止光滑粒子 k 、 j 、 l 、 m 和 n 处于影响域内, 虚拟粒子 3、4、5 也处于影响域内, 这些粒子都将参与粒子 i 的计算。

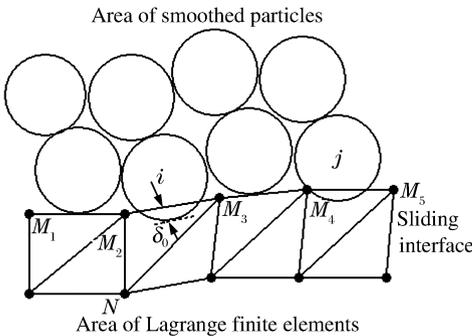


图 2 Lagrange 单元与光滑粒子的界面模型

Fig. 2 SPH node sliding on a standard grid

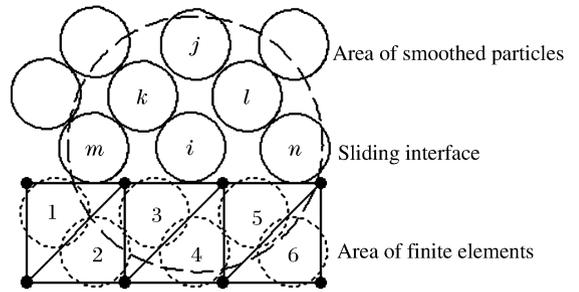


图 3 交界面附近粒子的计算示意图

Fig. 3 Computations of the SPH nodes

near the sliding interface

4 计算实例和讨论

4.1 Taylor 碰撞

Taylor 碰撞是典型的高速碰撞问题。1948 年, G. I. Taylor 研究了一平头柱形杆弹法向撞击刚性靶板问题。从一维弹塑性波理论出发, 采用刚塑性本构模型, 解析获得了杆弹撞击后柱体变形与材料动态屈服强度间的近似关系。由于 Taylor 碰撞体现了材料大变形高应变率等典型的冲击力学特性, 因此通过 Taylor 碰撞研究材料力学性能一直受到关注。W. H. Gust^[4] 和 G. R. Johnson 等^[2] 都先后通过数值方法研究了 Taylor 碰撞问题, 通过与实验结果比较, 验证本构模型和计算方法的合理性和准确性。为此我们采用光滑粒子法及耦合算法对 Taylor 碰撞开展数值模拟, 以便与已有的理论研究和实验资料相比较, 确定本文所述方法和所编程序的可靠性。

设直径 $D_0 = 7.6$ mm、长度 $L_0 = 25.4$ mm 的钢柱, 以速度 $v_0 = 221$ m/s 法向撞击刚性平板, 材料参数分别为^[5]: 密度 $\rho_0 = 7.890$ T/m³, 冲击压缩实验中测得的 $D-u$ 线性关系中的常数 $c_0 = 3.6$ km/s, $s = 1.80$, 剪切模量 $\mu = 80$ GPa, 简单拉伸条件下的屈服应力 $Y_0 = 0.5$ GPa, Gruneisen 系数 $\Gamma = 1.81$ 。设材

料为理想弹塑性体。图 4 给出了碰撞后的变形示意图,定义变形后柱体的长度为 L ,撞击端直径为 D ,离固壁 $0.2L_0$ 处的直径为 W 。张刚明等^[6]给出了同样算例的实验结果, $L=19.8\text{ mm}$, $D=13.7\text{ mm}$, $W=8.6\text{ mm}$ 。

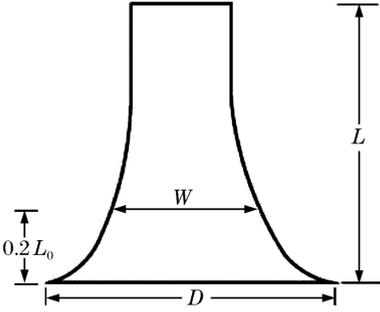


图 4 Taylor 碰撞示意图

Fig. 4 Taylor impact

分别采用纯光滑粒子法和耦合算法对 Taylor 碰撞开展数值模拟计算。初始时刻,耦合算法以三角形单元建模,共 658 个单元,单元数与纯光滑粒子法模型的 630 个粒子相近,计算过程中,随着有限元单元变形的发展,部分单元自动按上述方法转换成光滑粒子。

表 1 计算和实验结果的比较

Table 1 Comparison between computations and experiment

方法	L/mm	D/mm	W/mm
光滑粒子法(63×10 粒子)	19.8	11.3	9.2
耦合算法(47×14 单元)	19.8	12.0	8.4
实验	19.8	13.7	8.6

图 5~6 分别给出了纯光滑粒子法和耦合算法在 $10\ \mu\text{s}$ 和 $40\ \mu\text{s}$ 时的变形图,耦合算法中杆弹上部仍为有限元,下部已转换为光滑粒子。表 1 给出了计算值与实验结果的比较。虽然几个特征尺寸耦合算法要比光滑粒子法更接近实验值,但是从撞击端的总体构形上看,两者仍有差异,这说明耦合算法中粒子的生成和界面算法对结果有一定影响。通过与实验结果的比较,进一步改进相关算法,将是本文后续工作的重点。然而 Taylor 碰撞的初步计算结果表明,采用本文给出的思想建立耦合算法是成功的。

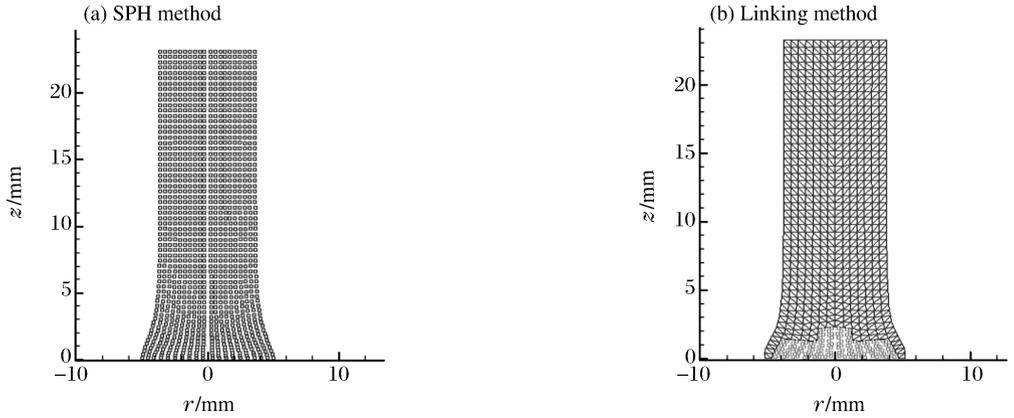


图 5 $10\ \mu\text{s}$ 时变形图

Fig. 5 Deformation at $t = 10\ \mu\text{s}$

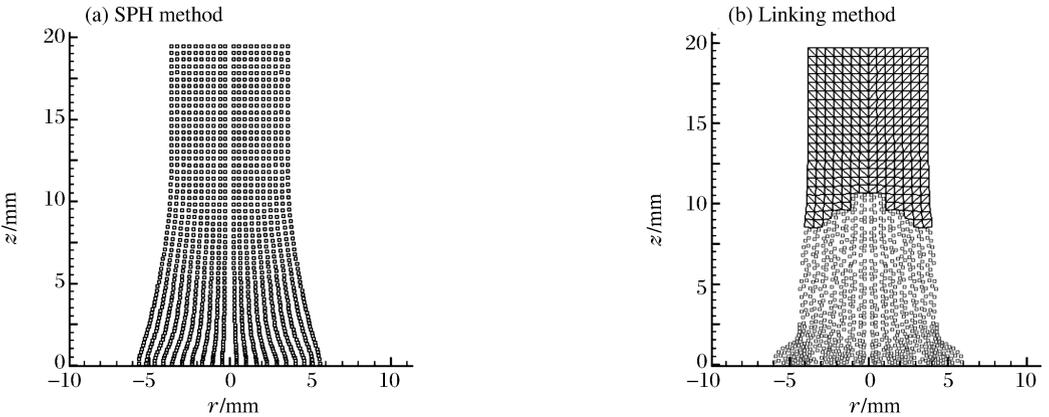


图 6 $40\ \mu\text{s}$ 时变形图

Fig. 6 Deformation at $t = 40\ \mu\text{s}$

4.2 有限元、光滑粒子法和耦合算法的对比计算

钨合金平头杆弹,弹长 20 mm、直径 10 mm,以初速 $v_0 = 1.5$ km/s 正撞击厚为 10 mm 的钢靶,分别采用有限元法、光滑粒子法和耦合算法进行对比计算,靶板和杆弹视为理想弹塑性体。表 2 给出了计算中用到的两种材料的参数。

表 2 两种材料的参数

Table 2 Parameters of two materials

材料	$\rho_0 / (\text{t/m}^3)$	μ / GPa	$c_0 / (\text{km/s})$	s	Y_0 / GPa	Γ
钨合金	17.6	124.1	4.143	1.28	1.76	1.43
钢	7.8	77.5	4.588	1.40	1.00	1.81

采用有限元程序计算时,单元取为三角形单元,共 2 048 个单元。采用光滑粒子法计算时,共 1024 个粒子。而在耦合计算中,初始模型只取了 800 个三角形单元。

图 7~8 分别给出了三种方法在不同时刻(3 μs 和 10 μs)的计算结果。对于畸变过大的单元,有限元方法用消蚀法处理,即当单元等效塑性应变超过某一阈值时,该单元被认为破坏,只能承受静水压力。计算中钨合金和钢靶的极限等效应变分别取为 1.0 和 0.9。光滑粒子法由于不存在单元,等效塑性应变增大,相当于粒子距离减小,因此不会出现有限元方法中因单元变形太大导致计算无法进行下去的情形。而在耦合算法中,由于只有部分单元转换成粒子(如 3 μs 时为 98 个粒子,10 μs 时为 310 个粒子),因此既能有效处理畸变过大的计算问题,又保留了有限元计算效率高的优势。从图中可以看到,三种方法的变形图像相差不是很大。由于在有限元方法中,破坏的单元对子弹不再存在阻力作用,因此相同时刻杆弹的速度要比光滑粒子法计算的结果大。有限元方法中子弹前部速度比较小的单元由于达到了破坏条件,成为破坏单元,在图上没有画出。光滑粒子法中,由于子弹前部的变形较大,形成的蘑菇头要比有限元方法的大,从而开坑半径要大一些。而耦合算法计算结果更趋近于光滑粒子法。

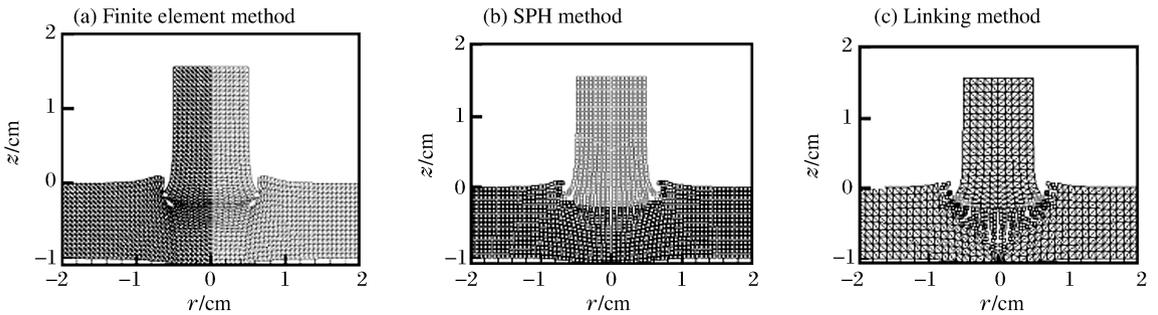


图 7 3 μs 时变形图

Fig. 7 Deformation at $t = 3 \mu\text{s}$

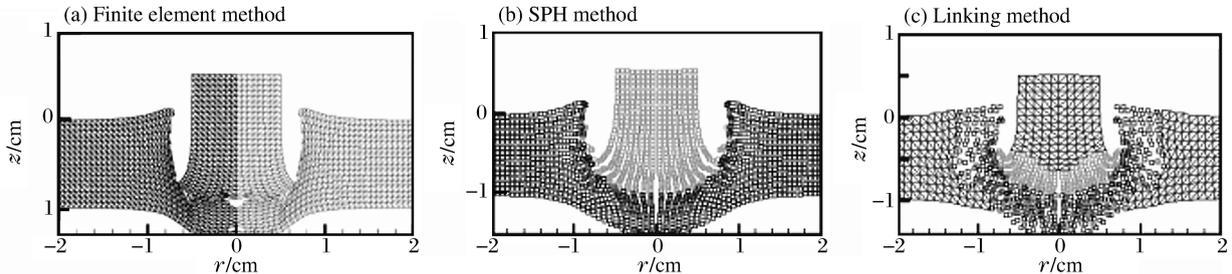


图 8 10 μs 时变形图

Fig. 8 Deformation at $t = 10 \mu\text{s}$

4.3 超高速碰撞计算

考虑高速平头弹丸侵彻半无限厚靶板的情况,子弹长 20 mm、弹径 10 mm,初始弹速 4 km/s,子弹和靶板的材料与算例 2 相同。光滑粒子法共用了 10 496 个粒子。耦合算法中共用了 8 200 个单元(粒子)。图 9~11 分别给出了两种算法在几个不同时刻的变形图。图上颜色淡一点的是子弹的粒子,而颜

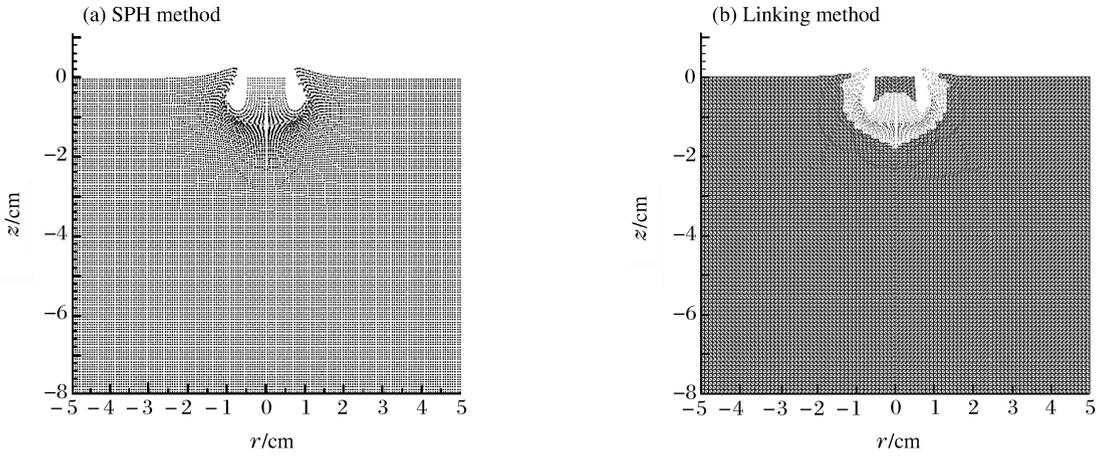


图 9 5 μs 时变形图

Fig. 9 Deformation at $t = 5 \mu s$

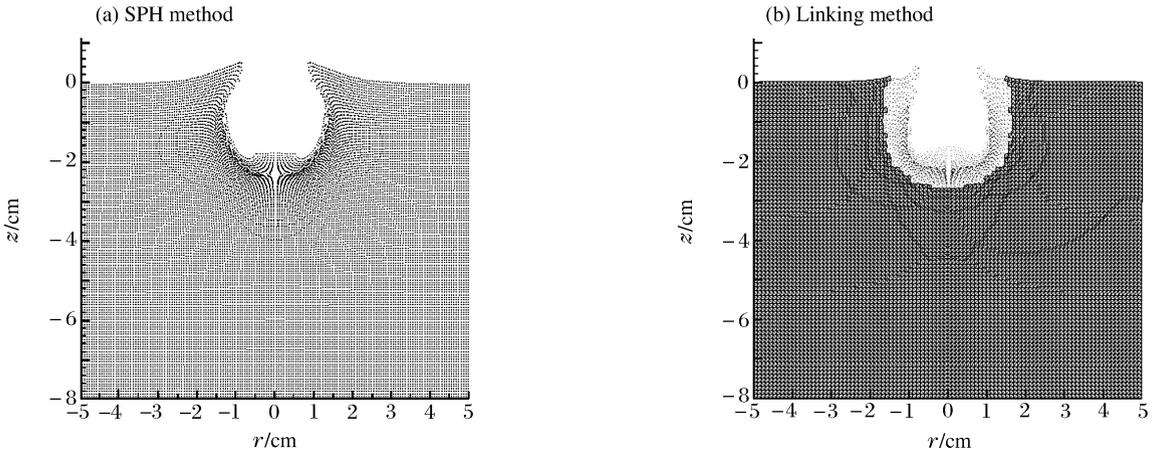


图 10 10 μs 时变形图

Fig. 10 Deformation at $t = 10 \mu s$

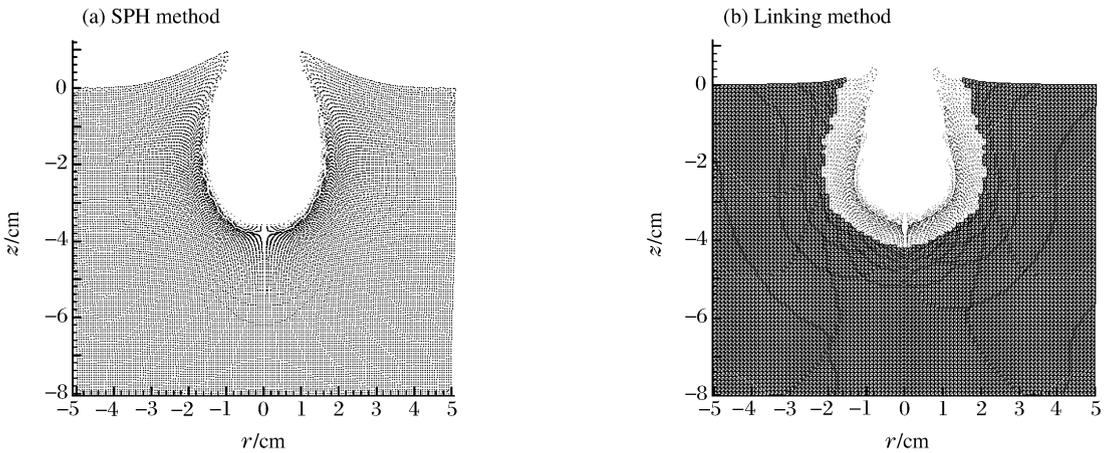


图 11 20 μs 时变形图

Fig. 11 Deformation at $t = 20 \mu s$

色深一点的是靶板的粒子，耦合算法中有大量未转换成粒子的有限元单元。从图上可以清晰地看出靶板的成坑过程。刚开始时，靶板表面形成一个比弹径略大的坑。随着子弹的不断侵彻，头部逐渐形成蘑菇头，阻碍子弹的侵彻，而径向速度不断增大，使得开坑半径变大，同时在耦合算法中随着变形的增大，

有更多的单元转换成粒子。随着粒子径向速度的消耗,到一定时候坑的径向扩展就停止了,而坑的轴向仍在发展直至弹体粒子的动能消耗殆尽。两种算法的计算结果相差不大,耦合算法所得的坑深和开坑半径略小于光滑粒子法。总体说来,用光滑粒子法或耦合算法模拟高速碰撞贯穿现象是合适的,变形图像与实际比较相似。用有限元方法计算超高速碰撞时会遇到很大困难,即便采用消蚀法,也不可能象光滑粒子法一样模拟出开坑过程。不过光滑粒子法中的粒子搜索很费时,计算效率要明显低于有限元法,而耦合算法集两者的优点于一身,其计算效率要远高于光滑粒子法,这一点在计算模型的单元较多时显得尤为明显。以此算例为例,采用光滑粒子法计算需数个小时,而耦合算法中,由于靶板的绝大部分计算域始终是有限元单元,光滑粒子只集中在弹靶接触的局部区域,粒子数并不多(20 μs 时为 1 612 个粒子),因此整个计算过程只需十分钟多,计算效率得到了大幅度的提升。

参考文献:

- [1] Johnson G R. Linking of Lagrangian particle methods to standard finite element methods for high velocity impact computations[J]. Nuclear Engineering and Design, 1994,50:265-274.
- [2] Johnson G R, Holmquist T J. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants[J]. Journal of Applied Physics, 1988,64(8):3901-3910.
- [3] Chen J K, Beraun J E, Jih C J. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics[J]. Computational Mechanics, 1999,23:279-287.
- [4] Gust W H. High impact deformation of metal cylinders at elevated temperatures[J]. Journal of Applied Physics, 1982,53(5):3566-3575.
- [5] Libersky L D, Petschek A G. High strain Lagrangian hydrodynamics: A three-dimensional SPH code for dynamic material response[J]. Journal of Computational Physics, 1993,109:67-75.
- [6] 张刚明,王肖钧. 高速碰撞数值计算中的光滑粒子法[J]. 计算物理,2003,20(5):447-454.
ZHANG Gang-ming, WANG Xiao-jun. Smoothed particle hydrodynamics method to numerical simulation of hypervelocity impact[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2003,20(5):447-454.

Linking of smoothed particle hydrodynamics method to standard finite element method and its application in impact dynamics

WANG Ji*, WANG Xiao-jun, BIAN Liang

(University of Science and Technology of China, Hefei 230026, Anhui, China)

Abstract: This paper gives a brief description of smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. By taking the advantages of SPH and standard finite element methods, a coupled method is proposed, in which the computational model is made up of finite elements in initial time and the large distortional elements are converted automatically into smoothed particles. Numerical examples for hypervelocity impact by the coupled method show that the coupled method is a more efficient method to simulation of large deformation problems in impact dynamics.

Key words: solid mechanics; coupled method; SPH; hypervelocity impact; finite element

* Corresponding author: WANG Ji
E-mail address: jily456@163.com
Telephone: 86-551-3606734