

文章编号: 1001-1455(2008)01-0080-06

# RKDG 有限元方法计算流体与刚体耦合\*

孙振生, 张世英

(第二炮兵工程学院, 陕西 西安 710025)

**摘要:** 用 Level set 方法配合 Runge-Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) 有限元方法求解流体与刚体耦合问题。用 RKDG 有限元方法求解欧拉方程, 通过求解 Level set 方程对界面进行追踪, 并用推广的 Ghost fluid 方法对流刚界面进行处理。数值实验表明, 该方法具有较高的分辨率。由于该方法不需要对移动网格进行处理, 因此可以处理任意形状的拓扑问题, 并且很容易推广到三维。

**关键词:** 流体力学; 流刚耦合; Ghost fluid 方法; 间断 Galerkin 法; Level set 方法

**中图分类号:** O351.2

**国标学科代码:** 130 · 2564

**文献标志码:** A

## 1 引 言

间断有限元方法是 20 世纪 70 年代 W. H. Reed 等<sup>[1]</sup>提出的, 并用于解决中子输运问题。20 世纪 80 年代, B. Cockburn 等<sup>[2]</sup>构造了  $k+1$  阶的 Runge-Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) 有限元方法求解一维标量守恒律方程, 并将该方法成功地应用到多维标量守恒律<sup>[3]</sup>和 多维守恒律方程组<sup>[4]</sup>。RKDG 有限元方法具有灵活处理间断和易于处理复杂的区域边界和边值问题的能力。

运动界面的追踪有很多方法, 如格子类方法<sup>[5]</sup>、VOF 方法<sup>[6]</sup>和 Level set 方法<sup>[7]</sup>等。Level set 方法把随时间运动的物质界面看作某个函数  $\varphi(x, t)$  的零等值面, 并满足一定的方程。在任意时刻只要知道了  $\varphi(x, t)$  的函数值, 就可以知道等值面的位置, 即物质界面的位置。R. P. Fedkiw 等<sup>[8]</sup>在 Level set 方法的基础上引入了 Ghost fluid 方法。Ghost fluid 方法的主要思想是利用 Level set 函数将含有两种流体的流场分成只含有一种流体的两个流场, 每个流场由真实流场和虚拟流场组成, 每个流场可以单独进行计算, 从而避开了界面两边状态方程不同的问题。

本文中用 RKDG 有限元与 Level set 相结合的方法计算刚体与无粘可压缩流体相耦合的问题。用 RKDG 有限元求解欧拉控制方程, 用 Level set 追踪流体与刚体的界面, 并引入推广的 Ghost fluid 方法在界面处进行特殊处理。

## 2 方 程

### 2.1 欧拉方程组

二维可压缩理想流体力学方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

### 2.2 状态方程

采用理想气体的状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (2)$$

\* 收稿日期: 2006-07-04; 修回日期: 2007-04-03

作者简介: 孙振生(1982—), 男, 博士。

## 2.3 Level set 方程与重新初始化方程

Level set 的控制方程如下

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (3)$$

由于数值方法的耗散效应,方程(3)经过几个时间步的迭代后, $\varphi(x, y, t)$ 不再是 $(x, y)$ 点到界面的符号距离。因此,为了保证 $\varphi(x, y, t)$ 始终是 $(x, y)$ 点到界面的符号距离,必需重新初始化。根据文献[9]的方法,通过求解初值问题

$$\partial \varphi / \partial t + \text{sgn}(\varphi_0)(1 - |\nabla \varphi|) = 0 \quad (4)$$

稳定解来实现。为了求解的方便,将符号函数光滑化为

$$\text{sgn}_\epsilon(\varphi_0) = \varphi_0 / \sqrt{\varphi_0^2 + \epsilon^2} \quad (5)$$

## 3 数值方法

### 3.1 Euler 方程组的 RKDG 有限元格式

考虑二维方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ 分别代表式(1)中的各物理量。在计算域内分别于 $x$ 方向和 $y$ 方向均匀地设置离散点 $(x_1, x_2, \dots, x_{M-1})$ 和 $(y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$ ,记为 $\Omega_{i,j} = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \otimes (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ 。

设 $v(x, y)$ 是光滑函数,将它乘以式(6)并在 $\Omega_{i,j}$ 域上积分得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}} U(x, y) v(x, y) dx dy + \int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial}{\partial x} [F(x, y, t) v(x, y)] dx dy + \int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial}{\partial y} [G(x, y, t) v(x, y)] dx dy - \\ \int_{\Omega_{i,j}} F(x, y, t) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy - \int_{\Omega_{i,j}} G(x, y, t) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dx dy = 0 \end{aligned}$$

在 $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ 和 $(y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ 上分别定义两族正交完备的函数系列 $B_{h_x}^{(i)} = \{b_k^{(i)}(x)\}$ ,  $C_{h_y}^{(j)} = \{c_m^{(j)}(y)\}$ ,其中 $h_x$ 和 $h_y$ 是网格尺度, $k$ 和 $m$ 是函数序号。设 $v(x, y) = b_k^{(i)}(x) c_m^{(j)}(y)$ ,将它代入上式,并利用格林公式得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}} U(x, y, t) b_k^{(i)}(x) c_m^{(j)}(y) dx dy + \\ \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} [F(x_{i+1/2}, y, t) b_k^{(i)}(x_{i+1/2}) - F(x_{i-1/2}, y, t) b_k^{(i)}(x_{i-1/2})] c_m^{(j)}(y) dy + \\ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [G(x, y_{j+1/2}, t) c_m^{(j)}(y_{j+1/2}) - G(x, y_{j-1/2}, t) c_m^{(j)}(y_{j-1/2})] b_k^{(i)}(x) dx - \\ \int_{\Omega_{i,j}} F(x, y, t) \frac{\partial b_k^{(i)}(x)}{\partial x} c_m^{(j)}(y) dx dy - \int_{\Omega_{i,j}} G(x, y, t) b_k^{(i)}(x) \frac{\partial c_m^{(j)}(y)}{\partial y} dx dy = 0 \end{aligned}$$

由于间断有限元在同一节点上的左、右函数值可以间断,则共节点上的左、右通量项不能相抵。为了解决这个问题,利用 Riemann 解的方法构造局部的解,由此得到流通量最新的表达式 $H_{i\pm 1/2, j}$ 和 $H_{i, j\pm 1/2}$ 来代替 $F$ 和 $G$ 。不同的方法可构造不同的 $H_{i\pm 1/2, j}$ 和 $H_{i, j\pm 1/2}$ 。本文中采用 B. Cockburn 等<sup>[4]</sup>提出的 TVB 方法,则方程可以化为如下形式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}} U(x, y, t) b_k^{(i)}(x) c_m^{(j)}(y) dx dy + \\ \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} [H_{i\pm 1/2, j}^{(y)} b_k^{(i)}(x_{i+1/2}) - H_{i\pm 1/2, j}^{(y)} b_k^{(i)}(x_{i-1/2})] c_m^{(j)}(y) dy + \\ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [H_{i, j\pm 1/2}^{(x)} c_m^{(j)}(y_{j+1/2}) - H_{i, j\pm 1/2}^{(x)} c_m^{(j)}(y_{j-1/2})] b_k^{(i)}(x) dx - \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_{i,j}} F(x,y,t) \frac{\partial b_k^{(i)}(x)}{\partial x} c_m^{(j)}(y) dx dy - \int_{\Omega_{i,j}} G(x,y,t) b_k^{(i)}(x) \frac{\partial c_m^{(j)}(y)}{\partial y} dx dy = 0 \quad (7)$$

$$\text{设解 } U^{(i,j)} = \bar{U}_{ij}(t) b_0^{(i)} c_0^{(j)} + U_{ijx}(t) b_1^{(i)} c_0^{(j)} + U_{ijy}(t) b_0^{(i)} c_1^{(j)} + U_{ijxy}(t) b_1^{(i)} c_1^{(j)} + U_{ijxy}(t) b_2^{(i)} c_0^{(j)} + U_{ijyy}(t) b_0^{(i)} c_2^{(j)} \quad (8)$$

根据  $\Omega_{i,j}$  区域上的两族正交完备的函数系列满足的条件,可以得到  $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, c_0^{(j)}, c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2$  的具体值。然后代入式(7)得

$$\begin{aligned} \Delta x_i \Delta y_j \bar{b}_k \bar{c}_m \frac{dU_{k,m}^{(i,j)}}{dt} = & - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} [H_{i+1/2,j}^{(y)} b_k^{(i)}(x_{i+1/2}) - H_{i-1/2,j}^{(y)} b_k^{(i)}(x_{i-1/2})] c_m^{(j)}(y) dy - \\ & \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [H_{i,j+1/2}^{(x)} c_m^{(j)}(y_{j+1/2}) - H_{i,j-1/2}^{(x)} c_m^{(j)}(y_{j-1/2})] b_k^{(i)}(x) dx + \\ & \int_{\Omega_{i,j}} F(x,y,t) \frac{\partial b_k^{(i)}(x)}{\partial x} c_m^{(j)}(y) dx dy + \int_{\Omega_{i,j}} G(x,y,t) b_k^{(i)}(x) \frac{\partial c_m^{(j)}(y)}{\partial y} dx dy \quad (9) \end{aligned}$$

式中:  $U_{k,m}^{(i,j)}$  表示  $\bar{U}_{ij}, U_{xij}, U_{yij}, U_{xyij}, U_{xxij}, U_{yyij}$ , 这样式(9)是关于  $U_{k,m}^{(i,j)}$  的常微分方程,可以用 Runge-Kutta 法求解,可以简写为

$$dU/dt = L(U^{(n)}) \quad (10)$$

常微分方程组(10)的时间离散采用带限制器的 TVD Runge-Kutta 方法<sup>[4]</sup>。

### 3.2 Level set 方程的求解和重新初始化方程的求解

在计算过程中,将 Eluer 方程和 Level set 方程分开求解,即在每求解一步 Eluer 方程后再求解一步 Level set 方程和重新初始化方程。这样在已知  $t_n$  时刻各个物理量的值的情况下,求解  $t_{n+1}$  时刻  $\varphi(x,y,t)$  的值时,在  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  时间内速度  $u$  可以看成是只和位置有关的函数。用 WENO 格式求解 Level set 方程和重新初始化方程,具体方法参考文献[9-10]。

## 4 界面的处理

Ghost fluid 方法是 R. P. Fedkiw 等<sup>[8]</sup>针对可压缩两介质气体界面问题提出的,比较理想地解决了气体界面接触间断处的数值耗散问题。本文中 Ghost fluid 方法推广到计算流体与刚体相互耦合的问题,把流体与刚体的交界面处当成反射壁面来处理,根据文献[11],通过以下方式给 Ghost 网格赋值

$$\rho_G = \rho_R, \quad \mathbf{V}_G = \mathbf{V}_R^T - \mathbf{V}_R^N + 2\mathbf{U}_G^N, \quad E_G = E_R - \frac{1}{2}\rho_R |\mathbf{V}_R|^2 + \frac{1}{2}\rho_G |\mathbf{V}_G|^2$$

式中:下标 G 表示 Ghost 网格,下标 R 表示实网格,  $\mathbf{V}_R^T$  和  $\mathbf{V}_R^N$  分别表示实网格处速度的切向分量和法向分量,  $\mathbf{U}_G^N$  是界面速度的法向分量。

对于任何一个给定的 Ghost 网格节点  $\mathbf{x}_1$ ,通过以下方式求得与它对应的反射网格点

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - 2\varphi(\mathbf{x}_1) \nabla \varphi(\mathbf{x}_1)$$

当点  $\mathbf{x}_2$  在计算域内时,可以直接通过线性插值求得该点处的各变量值;当点  $\mathbf{x}_2$  不在计算域内时,可以由以下两种办法求得点  $\mathbf{x}_2$  处的各变量值。如图 1 所示,设  $P_1$  的反射点为  $P_2$ ,  $\Gamma$  为计算域的边界,  $P_3$  为  $P_1$  和  $P_2$  的连线与  $\Gamma$  的交点,  $P_5$  是  $P_2$  通过  $\Gamma$  的反射点。一种简单的办法是直接用  $P_3$  处的值代替  $P_2$  点处的值,这种方法在某些情况下会引入较大的误差。另一种更精确的方法是把  $P_2$  也看成 Ghost 网格点,根据  $\Gamma$  处的边界条件,通过  $P_5$  给出  $P_2$  的值,本文中就是采用这种方法。

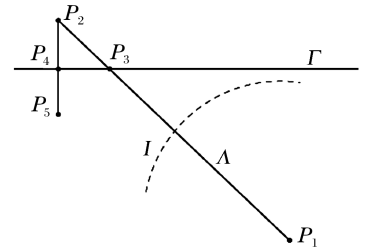


图 1 计算域外反射点的处理

Fig. 1 Solution for points out of domain

## 5 数值算例

### 5.1 Sod 激波管问题

为了验证计算软件的正确性,本文中首先对具有精确解的 Sod 激波管问题进行了计算。Sod 问题

是一类比较特别的 Riemann 问题,在随时间发展过程中,形成稀疏波、压缩波、间断面等流动结构,计算流体力学研究工作者常用来验证计算软件的有效性。Sod 问题的初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & 0 \leq x \leq 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1) & 0.5 < x \leq 1.0 \end{cases}$$

在考虑熵增的条件下,对 Sod 问题可以求得唯一确定的理论解。本算例在计算域  $x \in [-0.5, 0.5]$  内采用了 101 个网格点。图 2 给出了  $t=0.2$  时的数值结果,并与精确解进行了比较。可以看出,将 RKDG 有限元法与 Level set 相结合清晰地捕捉到了求解域中的压缩波强间断面、接触间断面和稀疏波系结构。

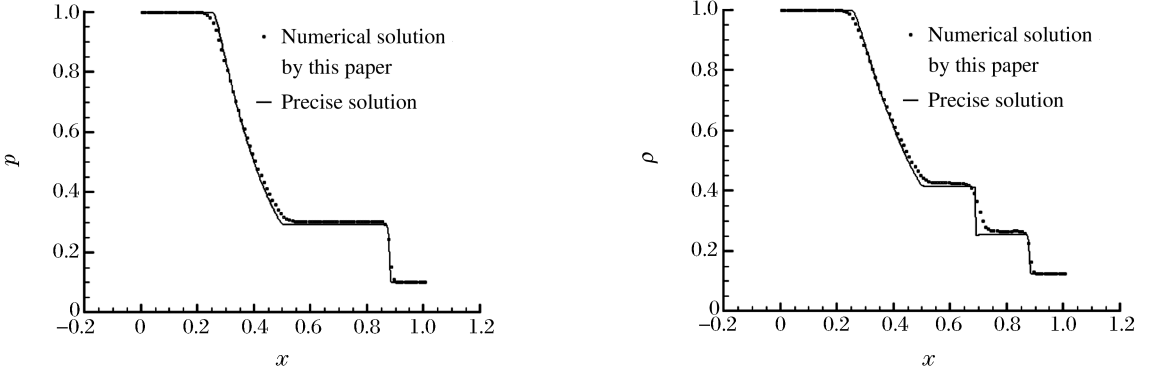


图 2 将 RKDG 和 Level set 方法相结合计算的 Sod 激波管问题

Fig. 2 Calculated results of sod problem by combining RKDG and level set methods

### 5.2 刚体在风洞中的运动

在长为 4、宽为 1 的风洞中,有马赫数为 3 的气体自左向右运动,初始时刻气体的常数  $\gamma = 1.4, \rho = 1.0, p = 1.0, u = 3\sqrt{1.4}/2, v = 0$ 。同时,半径为 0.125 的刚球以速度  $u = 3\sqrt{1.4}/2$  自右向左运动。图 3 为  $t=0.1, 0.3, 0.5, 1.6$  时的压强分布图,图 4 为  $t=0.1, 1.6$  时刚体界面处得局部放大图。

从图 3~4 中可看出,间断有限元有很强的激波捕捉能力,而 Levelset 有很强的界面追踪能力,流固界面被限制在一个网格内,并且边界处没有出现压力振荡。该结论同文献[11]中的基本一致。 $t=0.5$  时,流固边界处的质量损失同网格尺寸的关系如表 1 所示,表中  $h$  为网格尺寸的大小,  $\Delta m$  为质量损失的绝对误差,  $\Delta m/m$  为质量损失的相对误差。从表 1 中可以看出,随着网格尺寸的减小,质量损失趋近于零,也就保证了界面处的质量守恒。

表 1  $t=0.5$  时流固边界处的质量损失

Table 1 Mass loss of the solid-fluid boundary at $t=0.5$		
$h$	$\Delta m$	$\Delta m/m$
0.04	$2.32 \times 10^{-2}$	$4.23 \times 10^{-3}$
0.02	$6.78 \times 10^{-3}$	$1.24 \times 10^{-3}$
0.01	$3.36 \times 10^{-3}$	$6.13 \times 10^{-4}$

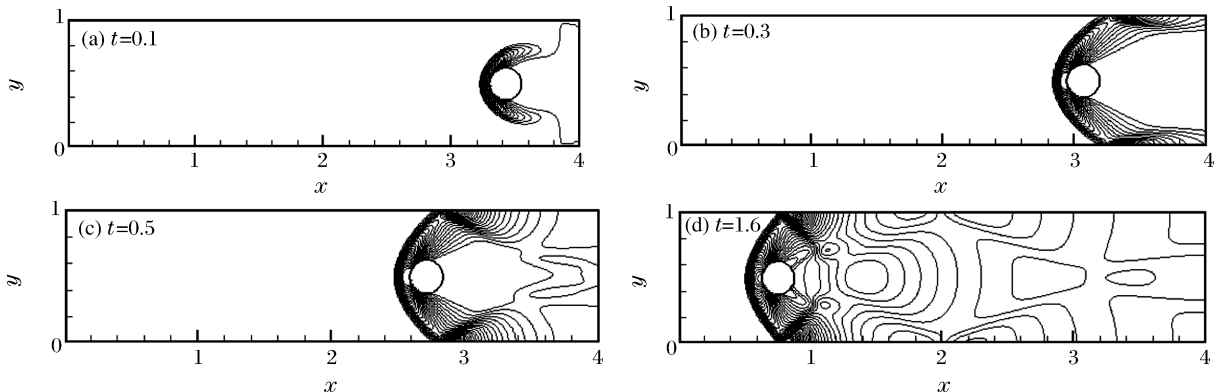


图 3 不同时刻的压强分布图

Fig. 3 Pressure field at different times

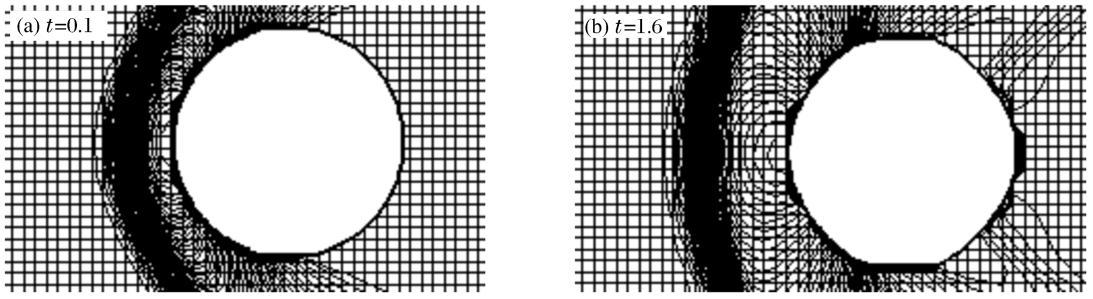


图4 不同时刻刚体界面的局部放大图

Fig. 4 Enlarged local image of rigid boundary at different times

### 5.3 刚体在风洞中的旋转

在长为2、宽为1的风洞中贮存有一定质量的理想气体。初始时刻气体的状态参数  $\gamma = 1.4$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $p = 1.0$ ,  $u = v = 0$ 。有一刚体以一定的角速度在风洞中旋转,由于刚体头部的绝对速度远大于其中心部分的速度,因此在其头部会产生两道激波。图5是  $t = 0.10, 0.25, 0.37, 0.50$  时的压强分布图,从图5中可以看出,在  $t = 0.10$  时,刚体头部产生的两道激波分别以一定的速度向边界运动;在  $t = 0.25$  时,初始产生的两道激波经过壁面的反射后同刚体头部新产生的激波相交,这样,在刚体的头部不断产生新的激波并不断地经过壁面的反射并同原来的激波相互作用;在  $t = 0.37, 0.50$  时,流场的激波结构已经相当复杂,但由于间断有限元良好的激波捕捉能力,使得各激波的宽度基本被控制在3个网格以内,没有发生大的数值耗散现象。该问题利用动网格处理是相当困难的,但利用本文的方法可以很好地处理流固耦合界面,并得到锐利的激波图像。

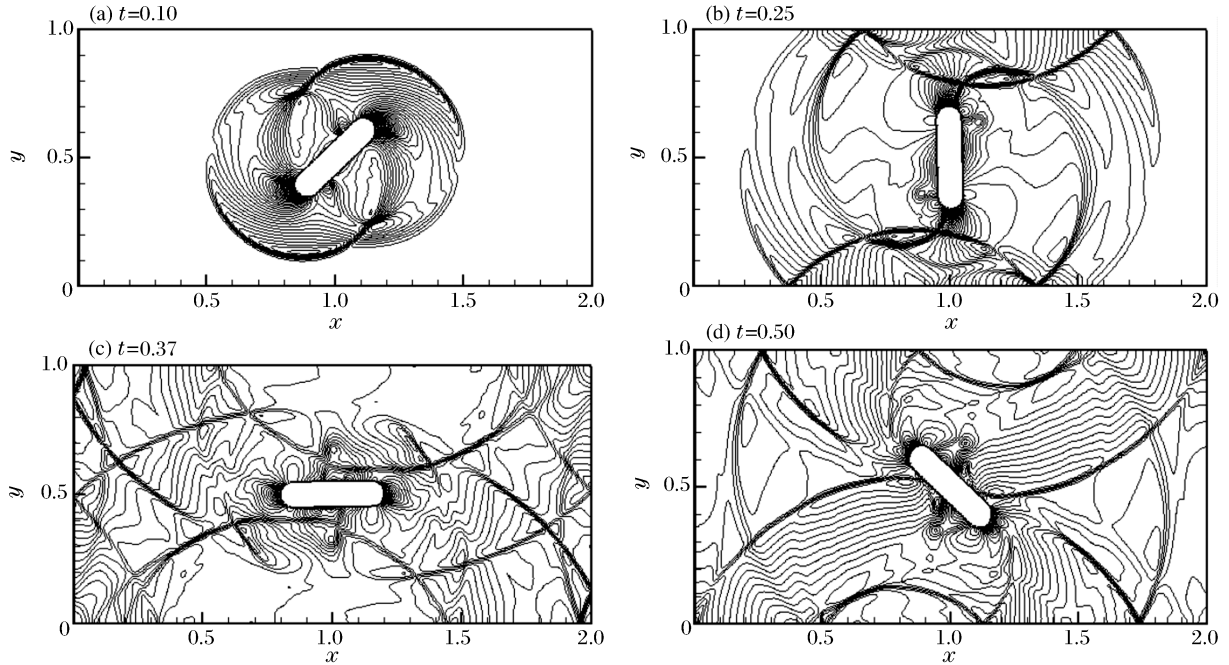


图5 不同时刻的压强分布图

Fig. 5 Pressure field at different times

## 6 结论

利用 Level set 方法和 RKDG 有限元方法相结合的方法求解流体与刚体耦合问题,推广的 Ghost fluid 方法能够很好地处理流固耦合的界面,避免了流固界面处的压力振荡,得到了分辨率较高的结果。该方法是基于固定网格上的,不需要网格的移动,因此可以处理各种形状的拓扑问题,具有动网格不可比拟的优势。该方法可以很容易推广到三维。

**参考文献:**

- [1] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Los Alamos Scientific Laboratory Report, LAUR-73-749,1973.
- [2] Cockburn B, Wang S C. TVB Runge-Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws II : General framework[J]. Mathematics of Computation, 1989,52:411-435.
- [3] Cockburn B, Wang S C. TVB Runge-Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws IV : The multidimensional case[J]. Mathematics of Computation, 1990,54:541-581.
- [4] Cockburn B, Wang S C. TVB Runge-Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws V : The multidimensional systems[J]. Journal of Computational Physics, 1998,141:199-224.
- [5] Harlow F H, Welch J F. Numerical calculations of time-dependent viscous in compressible flow of fluid with free surface[J]. Physics of Fluids, 1965,8:2182-2189.
- [6] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundary[J]. Journal of Computational Physics, 1981,39:201-225.
- [7] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature dependent speed; algorithms based on Hamilton Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988,79(1):12-49.
- [8] Fedkiw R P, Marquina A, Merriman B. An isobaric fix for the overheating problem in multi-material compressible flows[J]. Journal of Computational Physics, 1999,148:545-578.
- [9] Osher S, Wang S C. High order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton Jacobi equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1991,28:907-922.
- [10] Jiang G S, Wu C C. A high order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magneto hydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 1999,150:561-594.
- [11] Hu P, Flaherty J E, Shephard M S. Solving fluid/rigid body interaction problem by a discontinuous Galerkin level set method[J]. SIAM Journal of Scientific Computing, 2005,22:1-19.

**Discontinuous Galerkin method and computation of fluid-rigid interaction**SUN Zhen-sheng<sup>\*</sup>, ZHANG Shi-ying*(The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, Shaanxi, China)*

**Abstract:** Rigid and fluid interaction problems are solved by the level set method with the RKDG method. The system of the Euler equations are solved by the RKDG method while the level set equation which describes the motion of the interface are solved by high-resolution WENO finite difference scheme. The extended ghost fluid method is used to deal with the solid and fluid boundary. Numerical tests on two dimensional flow are carried out and satisfactory results are obtained. This method can be extended to three dimensional questions since no mesh modification is needed.

**Key words:** fluid mechanics; rigid and fluid interaction; ghost fluid method; discontinuous Galerkin method; level set method

---

\* Corresponding author: SUN Zhen-sheng  
E-mail address: sun\_2001\_2000@tom.com  
Telephone: 86-10-62797713