

文章编号: 1001-1455(2008)05-0407-08

单模大扰动的 Richtmyer-Meshkov 不稳定性*

欧阳良琛, 马东军, 孙德军, 尹协远

(中国科学技术大学工程科学学院, 安徽 合肥 230027)

摘要: 采用高精度的多介质 Ghost-Fluid 方法, 对马赫数为 1.15 的激波分别作用于单模大扰动 Air-CO₂、Air-SF₆、Air-N₂ 和 Air-He 界面后的 Richtmyer-Meshkov 不稳定现象进行了数值研究, 得到了不同时刻扰动界面的演化图像, 给出了流场的密度等值线和密度纹影图, 同实验结果吻合较好。给出了界面的扰动增长随时间变化的情况, 并同理论模型进行了对比。对激波从轻气体进入重气体的情况, 扰动增长可采用 Sadot 模型描述线性阶段和早期非线性阶段; 对于弱激波同密度接近的气体界面的相互作用, 线性阶段时间较长, 可用线性模型描述。

关键词: 爆炸力学; Richtmyer-Meshkov 不稳定性; Ghost-Fluid 方法; 激波; 扰动

中图分类号: O381; O354

国标学科代码: 130 · 3520

文献标志码: A

1 引言

当激波穿过密度不同的两种流体界面时, 界面扰动随时间急剧增长, 产生 Richtmyer-Meshkov (R-M) 不稳定性^[1-3]。这种激波-界面的相互作用在超声速冲压发动机中的混合和燃烧、激光驱动的惯性约束热核聚变等过程中有重要作用, 而且在天体物理中超新星爆发, 磁约束聚变等领域也广泛存在 R-M 不稳定现象。R-M 不稳定现象产生的机制是由于 $\nabla \rho \times \nabla p$ 在界面上不等于零而产生的斜压效应, $\nabla \rho$ 为界面两边的密度梯度, ∇p 为激波压力梯度。R. D. Richtmyer^[2] 认为可以将 R-M 不稳定性看作是在 Rayleigh-Taylor (R-T) 不稳定性的基础上加上一个脉冲加速, 提出了一个简单的线性脉冲模型。为了考虑后期的非线性发展, Q. Zhang 等^[4] 基于 Padé 近似和渐近拟合, 发展了 R-M 不稳定性的定量非线性理论。O. Sadot 等^[5] 基于实验数据拟合分析, 提出了一个能够适合线性和早期非线性的公式, 该公式很好地满足速度 $1/t$ 的渐近行为, 得到广泛应用。M. Vandenboomgaerde 等^[6] 则考虑了激波从重气体进入轻气体的情况。激波加速界面的早期是可压和近似线性的, 可以用线性理论来描述; 不稳定发展的中期是近似不可压和非线性的, 有钉状结构和泡状结构出现, 是目前实验和数值研究^[7-8] 的热点之一; 而后期会最终发展到湍流混合, 是 R-M 不稳定性研究的重要方向。G. Jourdan 等^[7] 实验研究了马赫数为 1.15 的空气中激波分别作用于较大幅度单模态扰动 Air-CO₂、Air-SF₆、Air-N₂ 和 Air-He 界面后的非线性发展情况, 并同各理论模型进行了比较。本文中采用高精度的 Ghost-Fluid 方法^[9] 对实验条件下的 R-M 不稳定现象^[7] 进行数值研究, 讨论不同密度比界面在激波加速下的非线性演化过程, 并将数值结果同实验结果^[7] 和各理论模型的预测结果进行比较, 讨论他们在线性阶段和非线性阶段的异同点。

2 物理模型

激波作用于两种介质界面的时候, 有两种不同的情况^[7]: (1) 激波从较轻的气体(空气)进入较重的气体(SF₆、CO₂), 界面上初始扰动将正向增长, 见图 1(a); (2) 激波从较重的气体(空气)进入较轻的气体(He、N₂), 界面上初始扰动幅值先减小, 扰动逆向反转后, 幅值又会增加, 见图 1(b)。

* 收稿日期: 2007-04-06; 修回日期: 2007-07-31

基金项目: 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金项目(10376035);
中国博士后科学基金项目(2004036160)

作者简介: 欧阳良琛(1982—), 男, 硕士研究生。

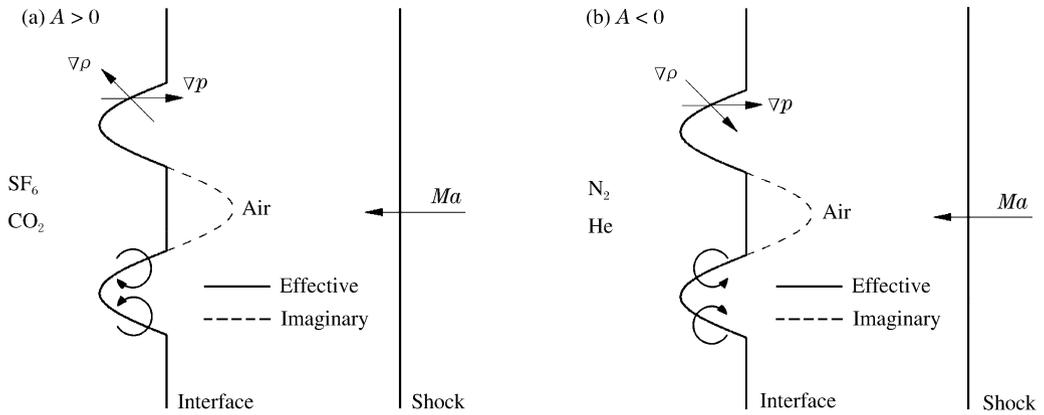


图 1 激波加速两个大振幅单模扰动的示意图

Fig. 1 Schematic showing the shock-interface interaction

对于 R-M 不稳定现象, R. D. Richtmyer^[2]给出了一个线性稳定性分析的脉冲模型

$$d\eta/dt = k[u]A^+\eta_0^+ \quad (1)$$

式中: $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, $\lambda = 90 \text{ mm}$ 为扰动波长, η_0 是初始振幅, $[u]$ 为激波作用后的速度改变量。在 CO_2 -Air 例子中, $[u] = 99 \text{ m/s}$; 在 N_2 -Air 例子中, $[u] = 104 \text{ m/s}$ 。 A 为 Atwood 数, $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$, 激波从流体 2 进入到流体 1。在 CO_2 -Air 例子中, $A = 0.19$; 在 N_2 -Air 例子中, $A = -0.05$ 。上标 + 表示这些物理量是当激波穿过界面后立即测量的。

该线性模型预测扰动将以一个常增长率增长。R. E. Duff 等^[10]考虑到实验真实条件的影响, 对式 (1) 进行了修正, 考虑了一个增长减小因子 ψ

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{k[u]A^+\eta_0^+}{\psi} \quad (2)$$

ψ 由 Sturm-Liouville 边界值问题的特征值所决定

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dy} \left(\rho \frac{df}{dy} \right) - \left(1 - \frac{\psi}{kA} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \right) k^2 f = 0 \quad (3)$$

式中: 当 $y \rightarrow \pm \infty$ 时, $f \rightarrow 0$ 。

O. Sadot 等^[5]总结了以前的线性和弱非线性模型并结合实验结果, 提出了一个简单公式来预测 R-M 不稳定现象中“钉”状和“泡”状结构的线性以及早期非线性发展趋势

$$v_{B/S} = \frac{v_0(1 + v_0kt)}{1 + (1 \pm A)v_0kt + [(1 \pm A)/(1 + A)][1/(2\pi C)]v_0^2k^2t^2} \quad (4)$$

式中: $v_{B/S}$ 表示泡或者钉的速度, 其中 + 号对应“泡”, - 号对应“钉”。本文中只考虑泡状结构的生长变化。 $v_0 = Ak\eta_0[u]$ 为 Richtmyer 初始增长率。依据文献^[7], 在 Air-SF₆、Air-CO₂ 的例子中, 分别选择 $C = 1/(3\pi)$, $1/(4\pi)$ 。M. Vandenboomgaerde 等^[6]则主要考虑了激波由重气体进入轻气体的情况, 给出了相关的扰动增长率预测公式

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}k[u](A^+\eta_0^+ - A^-\eta_0^-) - \frac{1}{6}k[u](A^+ - A^-)(\eta_0^+ - \eta_0^-) \quad (5)$$

式中: 上标 - 表示这些物理量是激波作用前的测量值。

3 数值方法

采用 Ghost-Fluid 方法^[9]模拟存在激波的多介质可压缩流动。单介质内部的控制方程是二维可压缩 Euler 方程, 采用高精度高分辨率的人工压缩 WENO 格式进行求解, 特别适合处理同时含有激波和复杂流动结构的问题。多介质界面的位置采用 Level-Set 界面跟踪方法求解, 多介质界面的物理量耦合求解采用 Ghost-Fluid 技术。详细的数值方法实现过程和数值验证可以参考文献^[9]。

单介质内部的二维可压缩 Euler 方程组守恒形式为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{U}=(\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$, $\mathbf{F}=(\rho u, \rho u^2+p, \rho v u, (\rho E+p)u)^T$, $\mathbf{G}=(\rho v, \rho u v, \rho v^2+p, (\rho E+p)v)^T$; ρ, u, v, p, e 和 $E=e+(u^2+v^2)/2$ 分别表示密度、 x 轴方向速度、 y 轴方向速度、压力、单位质量的内能和总能。对于一般状态方程, 压力可以表示为密度和内能的函数, $p=p(\rho, e)$ 。对于本文的计算问题, 采用理想气体状态方程 $p=(\gamma-1)\rho e$ 。

计算中网格是固定的, 而多介质界面通过 Level-Set 方法来捕捉。因为 Level-Set 方法较其他方法计算简单, 格式统一, 易于处理界面拓扑变化。对于 Level-Set 演化方程的求解, 空间离散采用高精度五阶 WENO 格式, 时间离散采用 TVD-Runge-Kutta 格式。具体二维 Level-Set 演化方程如下

$$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0 \quad (7)$$

式中: ϕ 为到界面的垂直距离, $\phi=0$ 表示界面位置。同时为了保持界面附近的 Level-Set 函数为距离函数, 在每个时间步完成后进行 Level-Set 函数的重新初始化。其中所使用的二维 Level-Set 重新初始化方程为

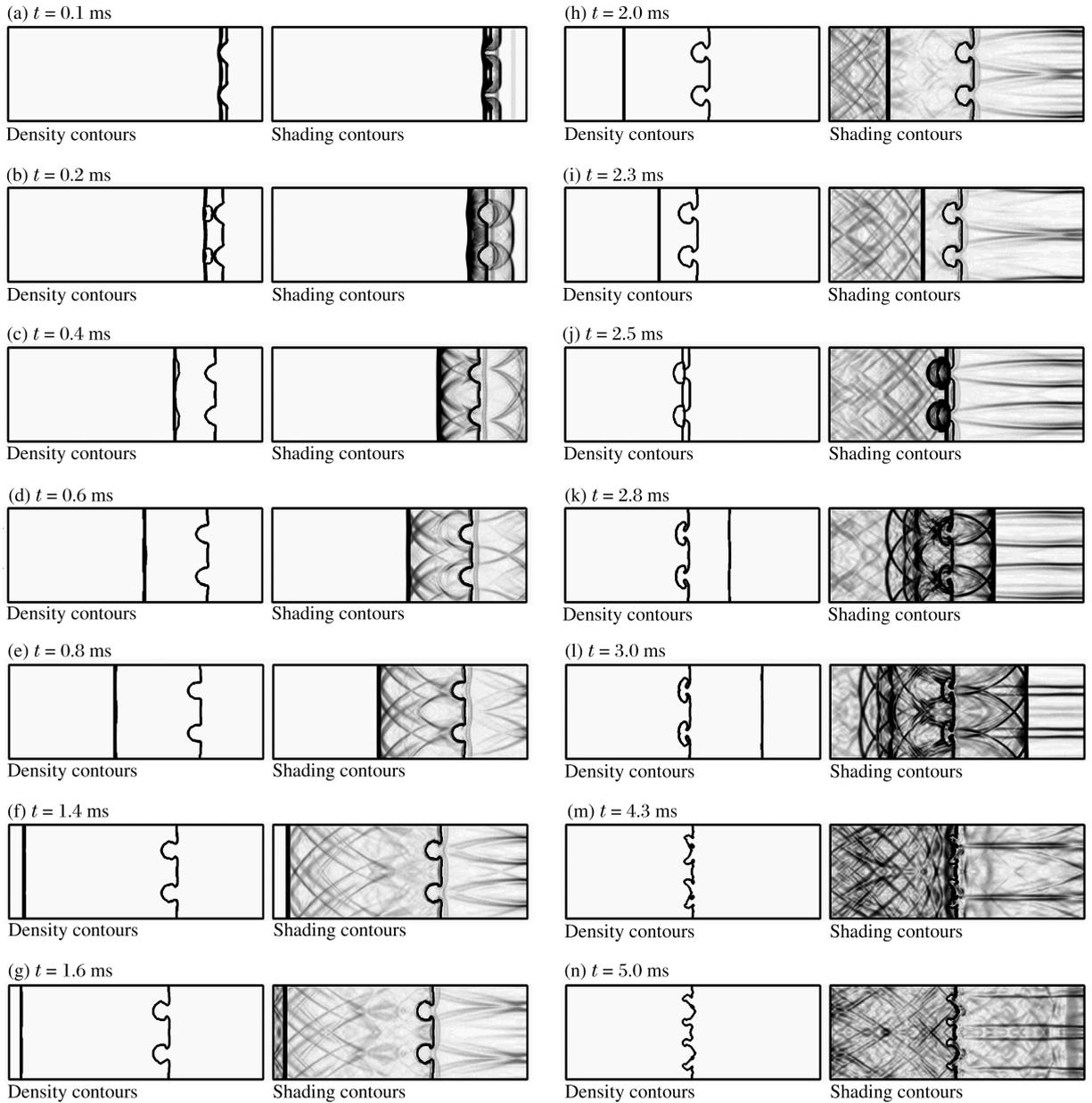
$$\phi_t + \text{sgn}(\phi_0)(\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} - 1) = 0, \quad \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \quad (8)$$

4 数值结果分析

根据实验条件^[7], 假定激波由计算区域的右边进入并向左运动。界面左边气体密度为 ρ_1 , 比热比为 γ_1 ; 界面右边气体密度为 ρ_2 , 比热比为 γ_2 。激波前的压力为一个大气压, 激波的马赫数为 1.15。波后空气的物理参数由激波前后关系式求得, 激波和界面之间为静止空气, 界面左边为一个大气压下静止的 SF₆、CO₂、He 或 N₂。文献[7]中研究不同情况下的 R-M 不稳定现象, 分别考虑轻-重(SF₆-Air、CO₂-Air)、相近(N₂-Air)、重-轻(He-Air)等 3 种不同密度比下较大幅度单模态扰动界面的演化过程。实验中初始单模扰动界面几何形状见图 1。界面上的半正弦扰动的初始振幅为 21 mm, 波长为 90 mm。选择大的初始振幅主要是为了让扰动迅速进入非线性阶段。在数值模拟中, 上下壁面以及左侧壁面给定固壁边界条件, 右侧壁面给定自由来流边界条件, 计算网格为 540×200。

4.1 CO₂-Air 界面的演化

图 2 给出了空气中激波和 CO₂-Air 界面相互作用随时间演化过程的等密度线图和密度纹影图。激波和界面相互作用后, 产生一个左行的穿透激波和一个右行的反射激波, 而界面被加速到常速度, 与激波相同的方向运动, 向左移动。右行反射激波通过折射过程也达到一个恒定速度, 随后很快地通过右边界离开计算区域, 不再对界面有影响。穿透激波向左运动过程中, 由于界面的扰动而形成的强度较弱的横向波跟随透射激波发展, 并且与上下壁面相互作用, 产生了更多的横向波, 引起流场复杂的扰动。这些横向波跟随透射激波向左运动。当左行穿透激波在与左侧壁面作用后($t=1.5$ ms), 反射向右运动。反射回来的透射激波与横向波相互作用, 使横向波的强度加强, 并且横向波跟随透射激波向右发展。这些纵横交错的横向波, 形成“井”字型。最后当透射激波与界面再次相互作用时($t=2.3\sim 2.5$ ms), 形成了更复杂的图像。在界面的左侧, 第二次作用后的反射波与左边的横向波相互作用, 使波相互间的扰动更加复杂; 而在界面的右侧, 横向波也开始形成比较明显的相互交错的“井”型结构。横向波对界面的作用的影响, 相对于那些主要激波, 比较小。这些类似的现象在其他算例的计算结果中也得到体现。激波和界面第二次相互作用的时间与实验结果^[7]($t=2.4$ ms)吻合较好。在激波穿越界面后和在第二次相互作用前, 界面的扰动方向没有变化, 扰动持续增长(振幅变大)。反射回来的激波第二次碰到界面时, 产生一个右行的穿透稀疏波和一个左行的反射激波。此时激波不再像第一次作用那样(从重气体入射到轻气体), 而是从轻气体入射到重气体。因此界面开始发生反转, 振幅开始减小。在 $t=5.0$ ms 时可以很清楚地看出, 原本是波峰的位置, 已经变成了向右凹进的“波谷”。整个计算结果在线性阶段和非线性阶段的初期同实验现象^[7]一致。在很后期的非线性发展阶段, 由于界面附近的湍流混合现象出现, 计算结果与实验结果^[7]有一定的差异。

图 2 CO_2 -Air 界面的演化过程Fig. 2 Evolution of the CO_2 -Air interface

4.2 SF_6 -Air 界面的演化

图 3 给出了空气中激波和 SF_6 -Air 界面相互作用随时间演化过程的等密度线图和密度纹影图, 整个过程与 CO_2 -Air 的例子相似。激波和界面相互作用后, 由于两种气体的密度相差比较大 ($A=0.6$), 所以界面一开始就快速地扭曲, 并迅速地形成互相镶嵌的钉泡结构。由其泡状结构的大小可以看出, 由于密度差比较大, 其扰动作用也比较大。与 CO_2 -Air 例子相比, SF_6 -Air 界面的运动速度较慢。在非线性发展阶段, 每个界面的扰动都形成一对旋转方向相反的涡。反时针的涡在右边, 顺时针的涡在左边。因为反射激波到达界面较早, 所以没有明显的涡生成。在反射激波作用后, 原本波峰和波谷处都开始向内凹陷, 开始形成新的较小的“泡”状结构。但是由于计算时间的缘故, 并没有得到充分发展。另外, 由于不稳定的发展强烈地依赖于初始条件, 而实验初始条件很难达到完全对称, 所以在实验^[7]中两个扰动很快发展到不对称, 上面的扰动发展比较快, 因此较快地与反射激波发生相互作用。而本文的数值模拟

没有引入其他初始条件扰动,模拟结果对称性很好。与实验中^[7]的扰动发展情况相比较,界面形状的发展趋势定性一致,在定量上比较有一定出入。可能因为实验中^[7]的 SF₆物性数据不完整,同数值模拟中的数据设置不完全一致。

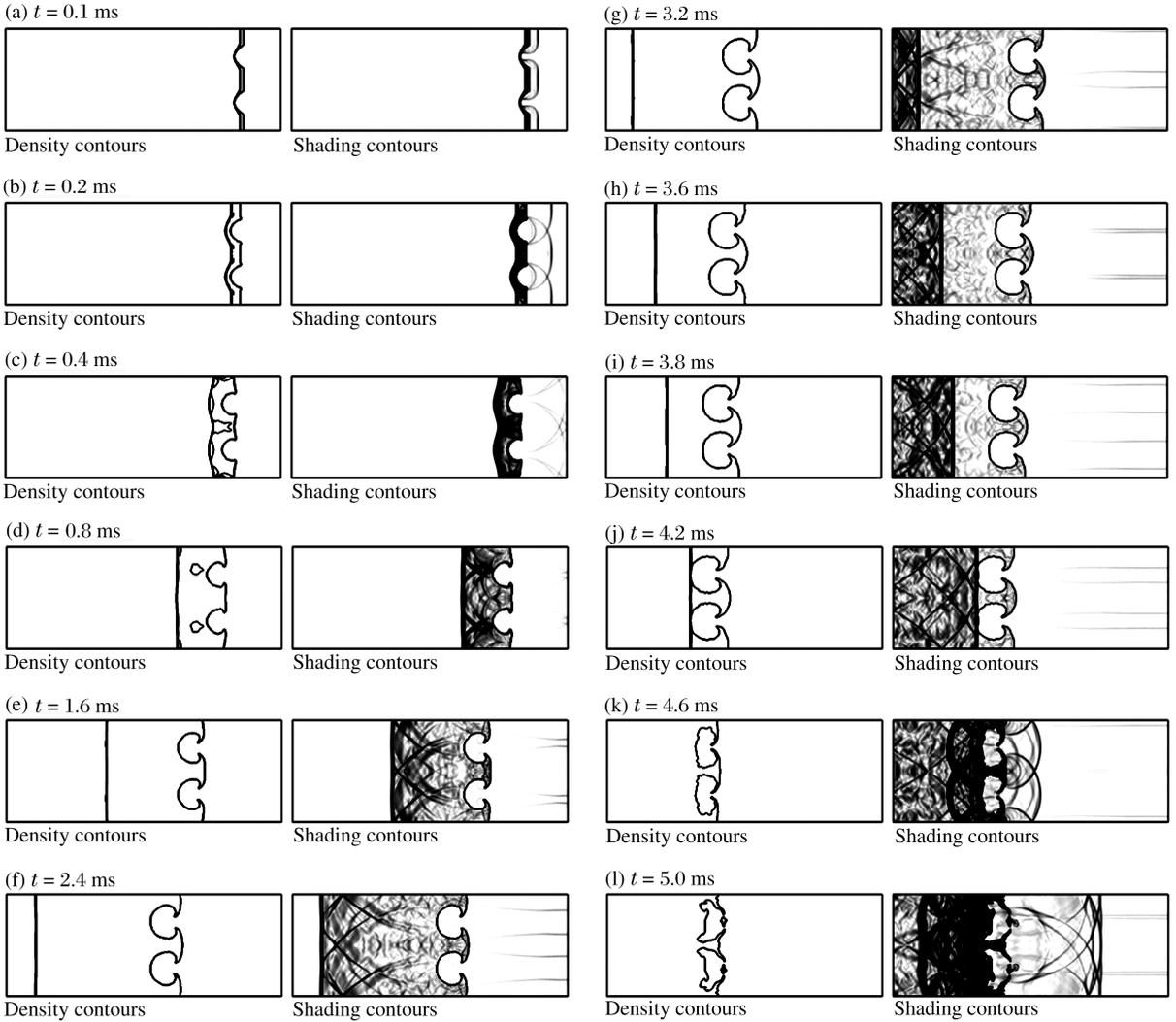
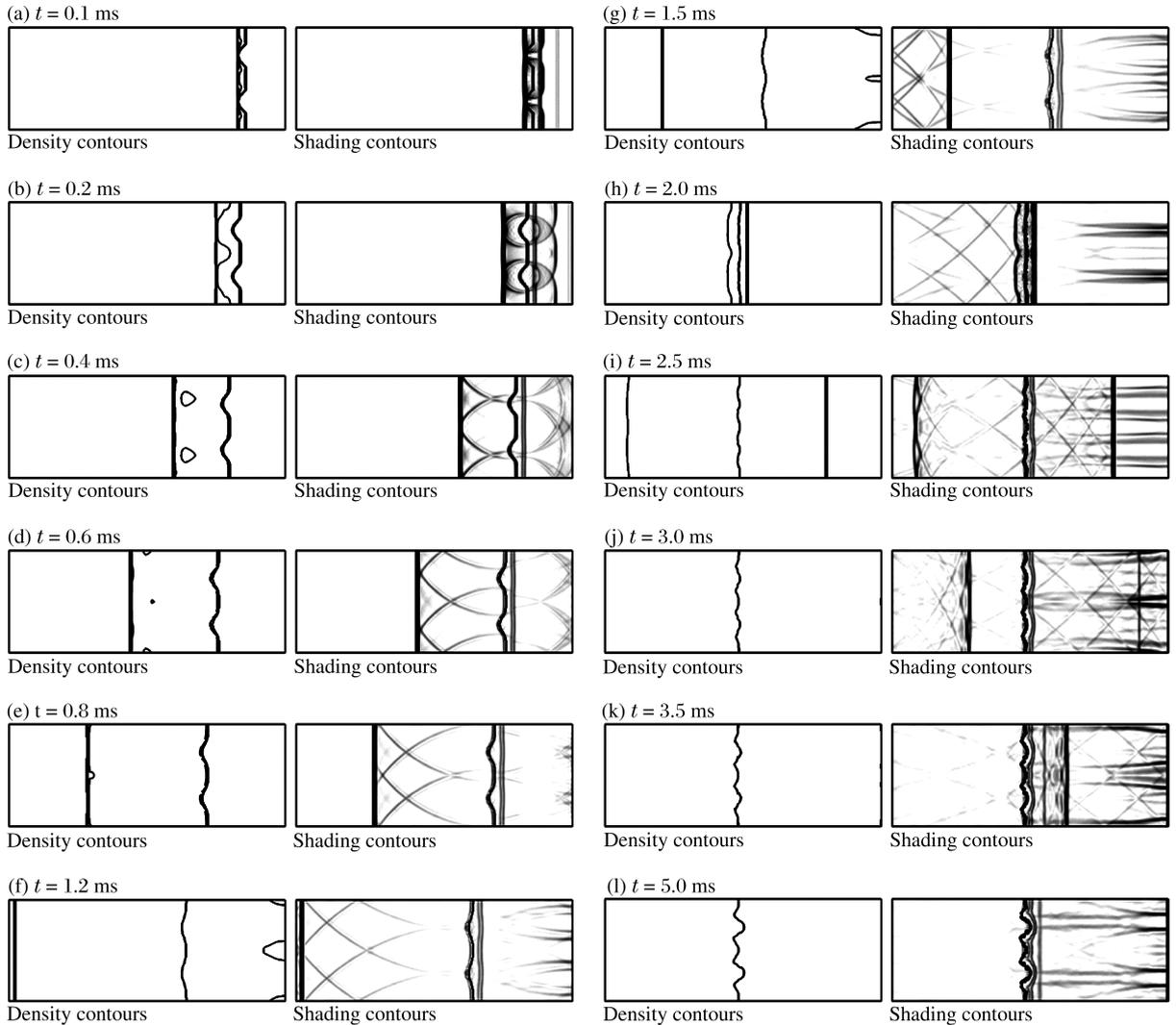


图 3 SF₆-Air 界面的演化过程
Fig. 3 Evolution of the SF₆-Air interface

4.3 N₂-Air 界面的演化

图 4 给出了空气中激波和 N₂-Air 界面相互作用随时间演化过程的等密度线图和密度纹影图。空气中激波和 N₂-Air 界面相互作用后,产生一个左行的穿透激波和一个右行的反射稀疏波。第一次相互作用的时候,由于激波是从重的气体进入轻的气体(A<0),所以相互作用后,界面的扰动开始反转,交界面的扰动幅值开始减小。这是典型的激波由重气体向轻气体入射时的特征。由于两种气体的密度很接近(A 绝对值很小),所以界面演化得较慢。直到激波碰到左壁面反射回来,快要到达界面的时候,界面才反转到相对较平直的形状(界面的最大振幅较小)。随后,激波第二次作用到界面上,由于此时激波的作用为从轻气体入射到重气体,所以激波的作用为加速此时界面的扰动。从 t=2.5~5.0 ms 可以很明显的看出其过程。与 SF₆-Air、CO₂-Air 例子中的数值结果相比,N₂-Air 例子中横向波图像较简单。N₂-Air 数值模拟的结果同实验结果^[7]吻合较好。

图 4 N_2 -Air 界面的演化过程Fig. 4 Evolution of the N_2 -Air interface

4.4 He-Air 界面的演化

图 5 给出了空气中激波和 He-Air 界面相互作用随时间演化过程的等密度线图和密度纹影图。由于激波第一次作用在界面的时候,激波是从重气体进入轻气体,界面迅速反转。因为界面两边的气体的密度差别比较大($A = -0.77$),所以界面的反转效应很明显。在 $t = 0.4$ ms 时,原本初始扰动为波峰的位置已经反转为波谷,而原本中间波谷的位置也反转为波峰。可以通过在同一时间 $t = 0.6$ ms 与 N_2 -Air 例子中的密度等值线图比较可看出,此时 N_2 -Air 界面的扰动幅值只是减小,而还没有出现扰动相位的转变。而此时 He-Air 界面的扰动已经完全“反转”过来。因此,其反转效应比 N_2 -Air 例子中更明显。这主要是由于密度差的大小不同引起的。激波在经过壁面反射,并再次作用于界面的时候,由于此时激波从轻气体进入重气体,因此界面扰动的反转作用得到显著加强($t = 0.9 \sim 1.6$ ms)。在非线性发展阶段的后期,由于“泡”状结构已经得到了相当的发展,所以 2 个“泡”开始出现相互挤压。在整个计算时间内,数值模拟结果能够同实验结果^[7]吻合很好。

4.5 界面扰动的增长

图 6 是第一次入射激波同多介质界面作用后,反射激波同界面作用前的量纲一的界面扰动大小 η 与时间 t 的对应关系。图中给出了 $A > 0$ (CO_2 -Air)、 $A \approx 0$ (N_2 -Air)、 $A < 0$ (He-Air) 三种典型情况。 CO_2 -Air 和 N_2 -Air 的计算结果分别与 Sadot 非线性模型和 Richtmyer 线性模型进行了比较。图中并没

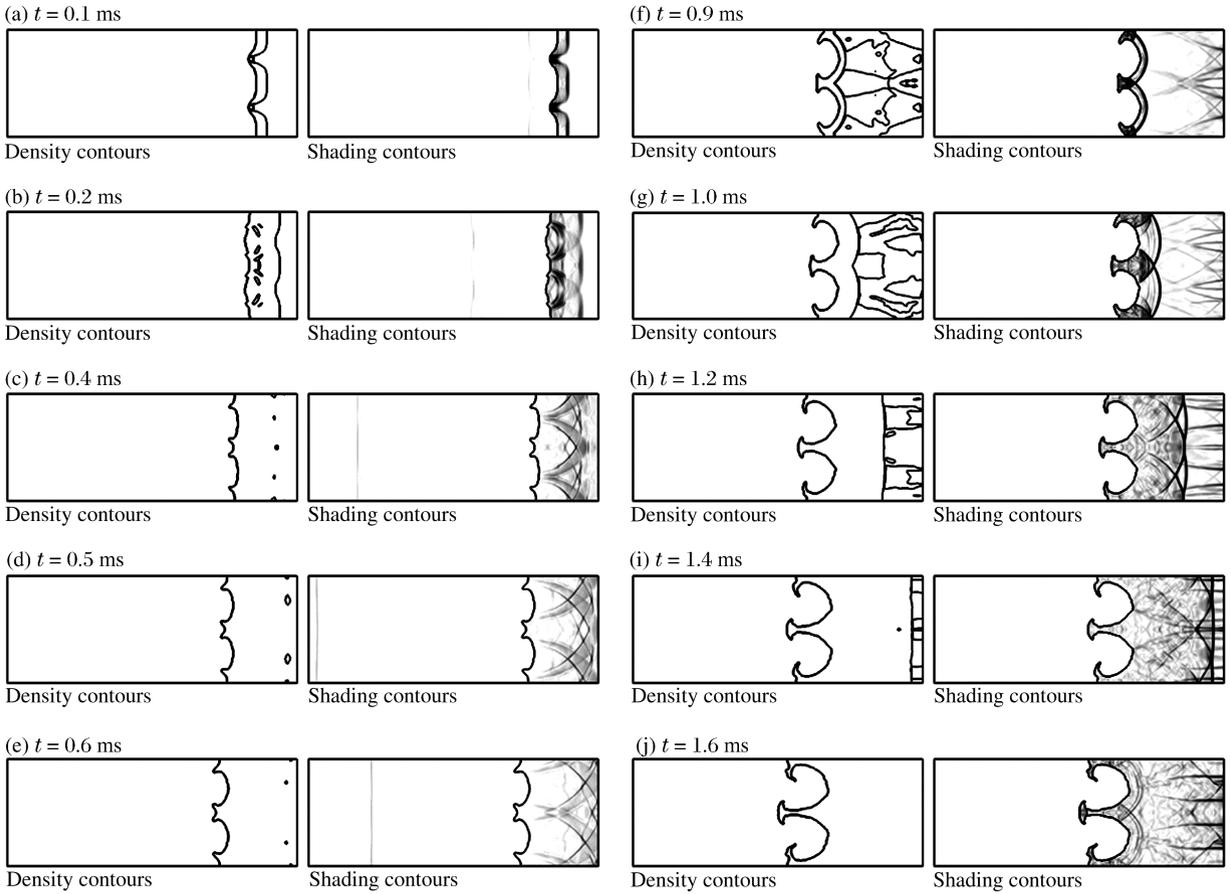


图 5 He-Air 界面的演化过程
 Fig. 5 Evolution of the He-Air interface

有给出 Vandenboomgaerde 模型曲线,但 He-Air 的计算结果与 Vandenboomgaerde 模型曲线早期结果^[7]一致。从图 6 可看出,CO₂-Air 的计算结果与非线性 Sadot 模型早期线性阶段以及中期非线性的结果吻合,直到非线性发展后期湍流混合前,数值模拟结果同理论和实验结果都吻合较好。而 N₂-Air 的例子说明对于密度接近的多介质界面在弱激波作用下扰动发展的反转阶段可以由 Richtmyer 线性模型预测。非线性作用使界面扰动增长率减小,并把初始正弦界面扭曲成钉泡结构。CO₂-Air、He-Air 到后期都进入了非线性阶段,而 N₂-Air 在反射激波作用前还处于线性阶段。这与界面演化的密度图一致,CO₂-Air、He-Air 都已形成了较明显的钉泡结构。

5 结 论

采用高精度的多介质 Ghost-Fluid 方法,对马赫数为 1.15 的空气中激波分别作用于单模大扰动 CO₂-Air、SF₆-Air、N₂-Air 和 He-Air 界面后的 Richtmyer-Meshkov 不稳定现象进行了数值研究,得到了不同时刻扰动界面的演化图像,给出了流场的密度等值线和密度纹影图。除 SF₆-Air 算例中由于物性参数不完整同实验还不能精确对比外,其他数值模拟结果同实验结果^[7]吻合很好。还给出了多介质界面的扰动增长随时间的变化情况,并同理论模型结果进行了对比。界面两边气体密度相差越大,其扰

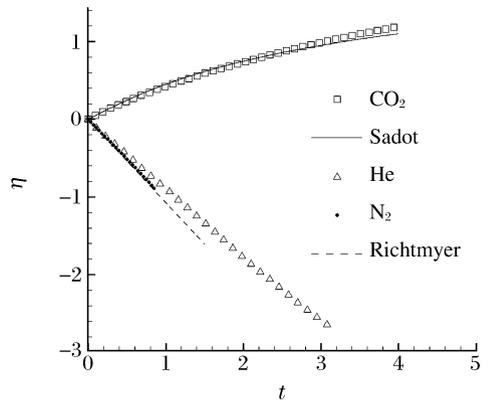


图 6 界面的扰动增长
 Fig. 6 Non-dimensional perturbation growth of the interface

动随时间发展越快,越早进入非线性发展阶段。对激波从轻气体进入重气体的情况,扰动增长可以采用 Sadot 模型描述线性阶段和非线性阶段早期。对激波从重气体进入轻气体的情况,扰动增长可以近似采用 Vandenboomgaerde 模型描述。对于弱激波同气体密度接近的界面的相互作用,线性阶段时间较长,可以用 Richtmyer 线性模型进行预测。

参考文献:

- [1] Brouillette M. The Richtmyer-Meshkov instability[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2002,34:445-468.
- [2] Richtmyer R D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids[J]. *Communications on Pure Applied Mathematics*, 1960,13:297-319.
- [3] Meshkov E E. Instability of a shock wave accelerated interface between two gases[R]. NASATTF-13-074, 1970.
- [4] Zhang Q, Sohn S I. Nonlinear theory of unstable fluid mixing driven by shock waves[J]. *Physics of Fluids*, 1997, 9:1106-1124.
- [5] Sadot O, Erez L, Alon U, et al. Study of nonlinear evolution of single-mode and two-bubble interaction under Richtmyer-Meshkov instability[J]. *Physical Review Letters*, 1998,80(8):1654-1657.
- [6] Vandenboomgaerde M, Mügler C, Gauthier S. Impulsive model for the Richtmyer-Meshkov instability[J]. *Physical Review: E*, 1998,58(2):1874-1882.
- [7] Jourdan G, Houas L. High-amplitude single-mode perturbation evolution at the Richtmyer-Meshkov instability[J]. *Physical Review Letters*, 2005,95,204502.
- [8] Latini M, Schilling O, Don W S. High-resolution simulations and modeling of reshocked single-mode Richtmyer-Meshkov instability: Comparison to experimental data and to amplitude growth model predictions[J]. *Physics of Fluids*, 2007,19,024104.
- [9] 马东军. 可压缩/不可压缩流体交界面高精度数值方法的研究[D]. 合肥:中国科学技术大学,2002.
- [10] Duff R E, Harlow F H, Hirt C W. Effects of diffusion on interface instability between gas[J]. *Physical of Fluids*, 1962,5(4):417-425.

High-amplitude single-mode perturbation evolution of Richtmyer-Meshkov instability

OU-YANG Liang-chen, MA Dong-jun^{*}, SUN De-jun, YIN Xie-yuan
(*School of Engineering Science, University of Science and Technology of China,
Hefei 230027, Anhui, China*)

Abstract: The high-amplitude single-mode Richtmyer-Meshkov instability is simulated by using the high-resolution ghost-fluid method. The initial conditions and computational domain are modeled after the single-mode, 1.15-Mach, shock tube experiment by Jourdan G, et al. Four test examples are presented with the evolutions of the air-CO₂, air-SF₆, air-N₂ and air-He interfaces, including density and shading contours. The simulated amplitudes are in agreement with the experimental data and the predictions of the theoretical models. The perturbation growths for the light-heavy (air-SF₆ and air-CO₂) cases agree well with the nonlinear model of Sadot O, et al. At the close density (air-N₂) interface acting with the weak shock wave, the slow evolution can be described by the linear theory.

Key words: mechanics of explosion; Richtmyer-Meshkov instability; ghost-fluid method; shock; perturbation

^{*} Corresponding author: MA Dong-jun
E-mail address: mdj@ustc.edu.cn
Telephone: 86-551-3606797