

文章编号: 1001-1455(2008)05-0438-05

Level set 方法在自适应 Cartesian 网格上的应用*

张 军¹, 赵 宁¹, 任登凤², 谭俊杰²

(1. 南京航空航天大学航空宇航学院, 江苏 南京 210016;

2. 南京理工大学动力工程学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 采用基于自适应 Cartesian 网格的 level set 方法对多介质流动问题进行数值模拟。采用基于四叉树的方法来生成自适应 Cartesian 网格。采用有限体积法求解 Euler 方程, 控制面通量的计算采用 HLLC (Hartern, Lax, van Leer, Contact) 近似黎曼解方法。level set 方程也采用有限体积法求解, 采用 Lax-Friedrichs 方法计算通量, 通过窄带方法来减少计算量, 界面的处理采用 ghost fluid 方法。Runge-Kutta 显式时间推进, 时间、空间都是二阶精度。对两种不同比热比介质激波管问题进行数值模拟, 其结果和精确解吻合; 对空气/氦气泡相互作用等问题进行模拟, 取得令人满意的结果。

关键词: 流体力学; 自适应 Cartesian 网格; level set 方法; 多介质; 窄带

中图分类号: O351.2

国标学科代码: 130·2564

文献标志码: A

1 引 言

多介质流体运动界面的数值模拟涉及很多重要的工程技术领域, 在流体力学、航空航天、武器工业等领域有重要的应用。在多介质流体运动界面的数值模拟研究中, 最核心的问题是运动界面的精确描述。如何通过数值模拟方法得到精确的流体界面发展规律一直是研究的热点和难点。这一问题的数值模拟方法主要分为两大类, 即界面追踪方法^[1]和界面捕捉方法。界面追踪方法的主要特点是: 能够保持间断的准确和锐利; 为了避免 CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) 条件难以满足的小网格问题, 需要对网格进行合并、细化和重分等处理; 该方法难于处理界面拓扑结构变化的情况; 当推广到多维问题时, 交界面的重构变得非常复杂; 该方法在间断处对流体状态变量进行单侧光滑外推, 采用不同的数值通量进行计算, 不可避免会引入守恒性误差。界面捕捉方法主要有 level set (LS) 方法、体积份额法。LS 方法^[2]的基本思想是用 LS 函数跟踪界面, 一般情况下界面沿法向速度是变化的, 在初始时刻 LS 函数为距离函数的情况下, 经过有限的时间步后, 其梯度可能变得剧烈或者平缓, 等值线出现聚合和拉伸的情况, LS 函数将不再保持距离函数的性质, 这时就需要对 LS 函数进行重新初始化, 使它保持距离函数的性质。LS 方法简捷通用、易于处理拓扑结构变化, 得到广泛的应用^[3-9]。目前对 LS 方法进行的研究, 大部分基于结构 Cartesian 网格。由于这种网格到处都是均匀的, 和流场其他地方相比, 界面不可能有更高的精度, 如果想要更准确地研究界面的特性, 则需要大大增加网格的数量, 这就会大大增加计算量和计算时间。由于自适应 Cartesian 网格善于处理复杂几何形状和以解为基础的自适应, 在计算流体力学中得到广泛的应用^[10-11]。自适应 Cartesian 网格的主要特点是: 自动快速生成网格; 以界面位置和其他流动特征为基础的网格自适应; 简单的通量公式, 以叉树为基础的数据结构适合于面向对象的编程; 采用局部特征为基础的网格自适应, 能够高效地处理多尺度问题。

本文中对 LS 方法在自适应 Cartesian 网格上的应用进行研究。采用有限体积方法求解 Euler 方程和 LS 方程, Runge-Kutta 显式时间推进, 时间、空间都是二阶精度。对两种不同比热比介质激波管问题、空气/氦气泡相互作用等问题进行数值模拟。

* 收稿日期: 2007-03-19; 修回日期: 2007-06-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(10576015)

作者简介: 张 军(1978—), 男, 博士, 助理研究员。

2 控制方程

流动控制方程为 Euler 方程, 可以采用积分形式表示, 如

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{F} d\Gamma = \mathbf{0} \tag{1}$$

式中: V 是控制体体积, Γ 是它的边界, 守恒型变量 \mathbf{U} 和无粘矢量通量 \mathbf{F} 分别定义为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n u + p n_x \\ \rho u_n v + p n_y \\ (\rho E + p) u_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

式中: ρ, p, E 分别表示流体密度、压强、比总内能; u, v 分别表示速度矢量的 2 个分量; \mathbf{n} 表示边界 Γ 的单位外法线方向, n_x, n_y 是 \mathbf{n} 的 2 个分量; $u_n = u n_x + v n_y$ 。

比内能 e 和比总内能 E 的关系为 $E = e + (u^2 + v^2)/2$ 。

气体状态方程为 $p = p(\rho, e) = (\gamma - 1)[\rho E - \rho(u^2 + v^2)/2 - p_c] - p_c$, 其中 p_c 为材料常数。

熵 s 和声速 c 的关系为 $c^2 = \frac{dp(\rho, s)}{d\rho} = \frac{\partial p}{\partial e} \frac{p}{\rho^2} + \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p + p_c}{\rho}$ 。

3 Level set 方法

采用 LS 方法来捕捉界面, LS 函数 ϕ 是距离函数, 其零值标志界面所在的位置, 其正、负值分别代表某种流体, 每一种流体都满足 Euler 方程。LS 方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F_n(\mathbf{x}, \nabla \phi, \kappa) |\nabla \phi| = 0 \tag{3}$$

式中: F_n 是界面的法向速度, $\nabla \phi$ 是距离函数的梯度, κ 是界面的平均曲率。方程(3)可以简化为下面的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(\mathbf{x}, \nabla \phi) = 0 \tag{4}$$

对于任意一个控制体, 方程(4)可以采用有限体积法离散成下面的形式^[10]

$$V \frac{d\phi_x}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n_c} \hat{H}_{1k} S_k = 0, \quad V \frac{d\phi_y}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n_c} \hat{H}_{2k} S_k = 0 \tag{5}$$

式中: V 是控制体的体积, k 表示单元的第 k 个面, n_c 是控制体的总面数, S_k 是第 k 个面的面积。

通量 \hat{H} 的计算采用 Lax-Friedrichs 方法。对于任意一条边, 假设其左边的值为 (ϕ_x^-, ϕ_y^-) , 右边的值为 (ϕ_x^+, ϕ_y^+) , Lax-Friedrichs 通量按照下面的公式计算

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1k}(\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-) &= \frac{1}{2} [H(\phi_x^+, \phi_y^+) + H(\phi_x^-, \phi_y^-)] n_x - \frac{1}{2} \alpha (\phi_x^+ - \phi_x^-) & \alpha &= \max_{\phi_x, \phi_y} \left| \frac{\partial H(\phi_x, \phi_y)}{\partial \phi_x} \right| \\ \hat{H}_{2k}(\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-) &= \frac{1}{2} [H(\phi_x^+, \phi_y^+) + H(\phi_x^-, \phi_y^-)] n_y - \frac{1}{2} \beta (\phi_y^+ - \phi_y^-) & \beta &= \max_{\phi_x, \phi_y} \left| \frac{\partial H(\phi_x, \phi_y)}{\partial \phi_y} \right| \end{aligned}$$

为了保持 LS 函数 ϕ 在界面附近始终为距离函数, 必须对它重新初始化, 重新初始化方程为

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon + \text{sgn}(\phi_0) (\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} - 1) &= 0 \\ \text{sgn}(\phi_0) &= \phi_0 / \sqrt{\phi_0^2 + \varepsilon^2} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ghost fluid method(GFM)^[12] 是一种简单有效的方法, 通过定义 ghost 点, 将多介质流动问题转化为单介质流动问题。其主要思想是: 界面之间存在接触间断, 界面两侧的压力和法向速度相等, 而切向速度和密度不等, 为了维持接触间断的性质, 虚拟流场的压力和法向速度为该点真实流体的压力和法向速度; 切向速度和密度由界面另一侧的真实流场延拓过来。

4 自适应 Cartesian 网格的生成

Cartesian 网格有自动生成、自动自适应、通量计算和数据结构简单等优点,成为目前被广泛关注的网格生成方法之一。本文中借鉴非结构网格生成和自适应的特点,采用自适应 Cartesian 网格方法生成网格。采用基于 C++ 面向对象的思想编程实现。

为了使程序高效、模块化,一个合适的数据结构是必须的。本文中,每个单元有 1 个指向父单元的指针和 4 个指向子单元的指针、4 个指向面的指针、4 个指向顶点的指针,每个网格单元还存储 4 个原始变量、体积、LS 函数等成员变量。另外,每个单元存储它的网格自适应层 level,对于初始网格,level 为 0,父单元为 NULL;经过一次自适应以后,level 为 1,以此类推,经过 n 次自适应以后,level 为 n 。经过自适应以后,最后没有子单元的网格是要计算的网格。为了提高效率,解算器采用以链表为基础的数据结构,代替二叉树为基础的数据结构,使数据查询更快、程序代码更简捷;而且,以链表为基础的流动解算器能够处理用其他方法生成的网格。

初始 Cartesian 网格生成以后,对界面附近的网格(通过重复的四叉树分解方法)进行自适应,直到达到自适应的要求为止。将不被计算的单元从链表中删除,将通过自适应生成的并且被计算的单元添加到链表中。在求解 LS 方程时,将具有最高的自适应 level 的区域作为窄带区域,在窄带区域内,对 LS 方程进行求解和重新初始化(采用 fast marching method)。

本文的主要步骤为:(1)初始 Cartesian 网格生成。(2)对界面附近的网格进行自适应,直到达到自适应的要求为止。将不被计算的单元从链表中删除,将通过自适应生成的并且被计算的单元添加到链表中。将具有最高的自适应 level 的区域作为窄带区域。(3)在窄带区域内求解 LS 方程,重新初始化。(4)求解 Euler 方程。(5)返回步骤(2)。

5 计算结果及分析

5.1 两种不同比热比介质的激波管问题

这里 Sod 激波管问题考虑的是两种不同的理想气体。量纲一化的计算初始条件为

$$\begin{aligned} \rho = 1.000, u = 0, p = 1.0, \gamma = 1.667, p_c = 0 & \quad 0 \leq x \leq 0.5 \\ \rho = 0.125, u = 0, p = 0.1, \gamma = 1.2, p_c = 0 & \quad 0.5 < x \leq 1.0 \end{aligned}$$

$t = 0$ 时,没有进行自适应的网格单元数为 2 000; $t = 0.2$ 时,网格单元数为 4 760(经过 3 次自适应)。图 1 给出 $t = 0.2$ 时的自适应 Cartesian 网格,图 2 给出密度、速度、压强沿激波管中心的分布,从图 2 中可以看出数值解与精确解吻合较好。

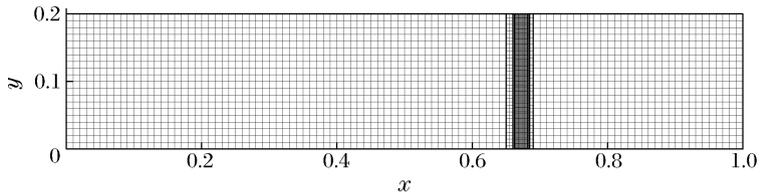


图 1 $t = 2.0$ 时刻,自适应后的网格

Fig. 1 Mesh after adaptation at $t = 2.0$

5.2 空气/氦气泡相互作用问题

马赫数为 1.22 的激波与氦气泡相遇,波前 ($x \leq 225$) 的量纲一初始状态值为: $\rho = 1, u = 0, v = 0, p = 1, \gamma = 1.4, p_c = 0$;波后 ($x > 225$) 的量纲一初始状态值为: $\rho = 1.376 4, u = -0.394, v = 0, p = 1.569 8, \gamma = 1.4, p_c = 0$;氦气泡内 ($(x - 175)^2 + y^2 \leq 625$) 的量纲一初始状态值为: $\rho = 0.138, u = 0, v = 0, p = 1, p_c = 0$,

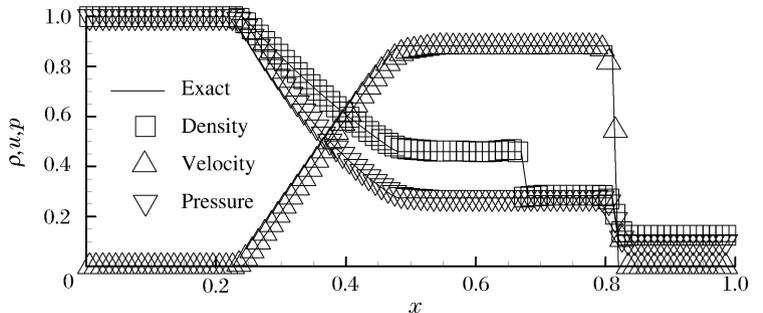


图 2 密度、速度、压强的数值解与精确解的比较

Fig. 2 Comparison between numerical and exact results of density, velocity and pressure

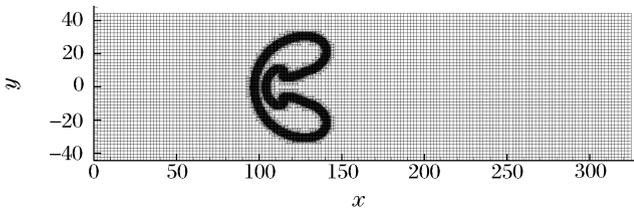
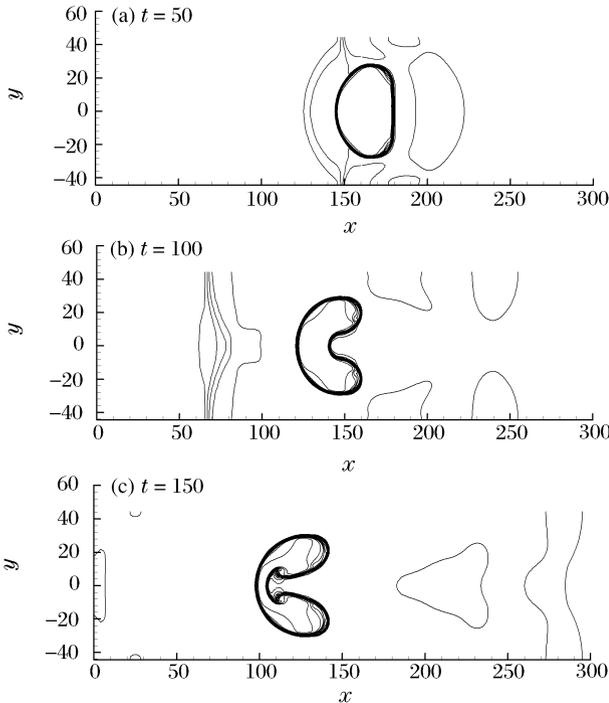
图 3 $t=150$ 时刻, 自适应后的网格Fig. 3 Mesh after adaptation at $t=150$ 

图 4 不同时刻的密度等值线图

Fig. 4 Contour lines of density at different times

$\gamma=1.667$ 。

$t=0$ 时, 没有进行自适应的网格单元数为 7 335; $t=150$ 时, 网格单元数为 28 878(经过 3 次自适应)。图 3 给出 $t=150$ 时的自适应 Cartesian 网格, 图 4 给出 $t=50、100、150$ 时的密度等值线图, 和计算结果^[8]吻合。从计算结果来看, 网格自适应能够更精确地模拟界面处的流场, 更准确地捕捉界面, 表明利用该方法可对可压缩介质流动进行数值模拟。

6 结 论

采用基于自适应 Cartesian 网格的 level set(LS)方法对多介质流动问题进行数值模拟。采用有限体积法求解 Euler 方程和 LS 方程, 通过窄带方法来减少计算量, 界面的处理采用 ghost fluid 方法。对典型的多介质流动问题进行数值模拟, 取得令人满意的结果, 验证了该方法的可行性。

参考文献:

- [1] Glimm J. Tracking of interfaces for fluid flow: Accurate methods for piecewise smooth problems, transonic, shock, and multidimensional flows[J]. Advances in Scientific Computing, 1982;259-287.
- [2] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988,79:12-49.
- [3] 王春武, 赵宁. 二维多介质流动问题的界面处理方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2005, 37(1):114-116. WANG Chun-wu, ZHAO Ning. Interface treating method for 2-D multi-medium flow[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 37(1):114-116.
- [4] 张学莹, 赵宁, 朱君. 多流体界面不稳定性守恒和非守恒高精度数值模拟方法[J]. 爆炸与冲击, 2006, 26(1):65-70. ZHANG Xue-ying, ZHAO Ning, ZHU Jun. The conservative and non-conservative algorithms applied to numerical studies of the interface instability in multi-component fluids[J]. Explosion and Shock Waves, 2006, 26(1):65-70.
- [5] 柏劲松, 陈森华, 李平. 多介质流界面高精度自适应欧拉算法[J]. 计算物理, 2003, 20(2):95-101. BAI Jing-song, CHEN Sen-hua, LI Ping. High resolution Eulerian adaptive algorithm for multi-fluid interfaces[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2003, 20(2):95-101.
- [6] 程军波, 唐维军, 李德元, 等. 利用 ghost fluid 方法模拟激波与柱形界面相互作用[J]. 计算物理, 2003, 20(3):219-225.

- CHENG Jun-bo, TANG Wei-jun, LI De-yuan, et al. Simulation of interaction of shocks with a cylinder interface by means of ghost fluid method[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2003,20(3):219-225.
- [7] 张镭,袁礼. Ghost fluid方法与双介质可压缩流动计算[J]. 计算物理, 2003,20(6):503-508.
- ZHANG Lei, YUAN Li. Ghost fluid method and computation of compressible two-fluid flows[J]. Chinese Journal of Computational physics, 2003,20(6):503-508.
- [8] 刘儒勋,王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2001.
- [9] 封建湖,蔡力,谢文贤,等. 求解无粘可压 Euler 方程组的虚拟流方法[J]. 计算力学学报,2006,23(4):496-501.
- FENG Jian-hu, CAI Li, XIE Wen-xian, et al. The ghost fluid method for inviscid compressible Euler equations[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006,23(4):496-501.
- [10] Wang Z, Wang Z J. The Level Set Method on Adaptive Cartesian Grid for Interface Capturing[R]. AIAA-2004-82.
- [11] Wang Z, Wang Z J. Multi-Phase Flow Computation with Semi-Lagrangian Level Set Method on Adaptive Cartesian Grids[R]. AIAA-2005-1390.
- [12] Fedkiw R P, Marquina A, Merriman B. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)[J]. Journal of Computational Physics, 1999,152:457-492.

Application of the level set method on adaptive cartesian grids

ZHANG Jun^{1*}, ZHAO Ning¹, REN Deng-feng², TAN Jun-jie²

- (1. *College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, Jiangsu, China;*
2. *Department of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, Jiangsu, China)*

Abstract: The level set method based on adaptive Cartesian grids is used to simulate multi-material flow problems. An quadtree-based algorithm is applied to generate adaptive Cartesian grids. The Euler equations are solved by the finite volume method and the flux of the control face is computed by the HLLC (Hartner, Lax, van Leer, Contact) approximate Riemann method. The level set equations are solved by the finite volume method and the flux is computed by the Lax-Friedrichs method. The narrow band method is used to reduce computational costs and the ghost fluid method is used to treat the interface. The explicit two-stage Runge-Kutta time-integration scheme can achieve second-order time-accuracy and the space accuracy is second order. The shock-tube problem containing two different ideal gases with different specific heat ratios is computed and the numerical results agree with the exact solution. Simulated results on interaction of air with helium bubble are satisfactory.

Key words: liquid mechanics; adaptive Cartesian grid; level set method; multi-material; narrow band method

* Corresponding author: ZHANG Jun
E-mail address: zhangjunrdf@nuaa.edu.cn
Telephone: 86-25-84891160