

文章编号: 1001-1455(2008)06-0552-05

弯曲波对含多圆孔薄板的散射与动应力集中*

赵嘉喜, 刘殿魁, 齐 辉, 杨在林

(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 采用复变函数法和多极坐标方法, 研究了弯曲波对含有多圆孔薄板的散射问题。通过板的弯曲波动方程和内力方程的推导, 求出在入射弯曲波条件下该问题的一般解的函数逼近序列和边界条件的表达式。用展开正交函数的方法将待解的问题归结为对一组无穷代数方程组的求解。最后, 给出了含 3 圆孔薄板的孔边动应力集中系数的结果, 并分析了孔间距和波数对动应力分布的影响。

关键词: 固体力学; 动应力集中; 复变函数法; 多圆孔薄板; 多极坐标

中图分类号: O347.2 **国标学科代码:** 130 · 15 **文献标志码:** A

1 引 言

弹性薄板结构在航天、航空以及船舶结构中经常用到, 在工程设计中往往需要在薄板上开排孔, 由于孔和孔的相互影响, 在薄板中传播的弯曲波将会发生更复杂的散射现象, 导致孔边动应力发生复杂的变化, 从而会直接影响到薄板结构的使用寿命^[1-5]。关于薄板开孔问题, N. I. Muskhelishvili^[1] 和 G. N. Savin^[2] 等提出的复变函数方法已经成功地解决了双调和方程所描述的薄板开孔的静应力集中问题。而在 20 世纪 60 年代, Y. H. Pao^[6] 首次研究了薄板开单圆孔弯曲波的散射与动应力集中问题, 并给出了问题的分析解与数值结果。但是对于薄板开多圆孔弯曲波的散射问题, 由于数学上的困难, 这方面的研究还很少, 仅在 20 世纪 90 年代末, 胡超等^[7] 采用复变量和局部坐标系的方法对双圆孔平板的弹性波散射问题并给出了部分算例。

本文中利用复变函数方法和多极坐标方法, 对含多孔薄板的动应力集中问题进行了分析研究, 并计算了自由边界的含 3 圆孔薄板的孔边动应力集中系数的数值结果, 分析了孔间距和波数对动应力分布的影响。

2 薄板弯曲波动方程和它的一般解

如图 1 所示, 一稳态弯曲波沿 x 轴方向入射到含多圆孔的薄板中, 在复坐标 (z, \bar{z}) 中, 各个圆孔 c_s 的半径分别为 a_s 。薄板开孔弯曲波的散射及动应力集中问题可归结为求解如下弯曲波动控制方程^[4]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (1)$$

式中: D 为薄板的弯曲刚度, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$; E, ν 分别为薄板的弹性模量和泊松比; ρ, h 分别为薄板的密度和厚度; t 为时间; q 为横向载荷, 做自由波动, 取 $q=0$ 。

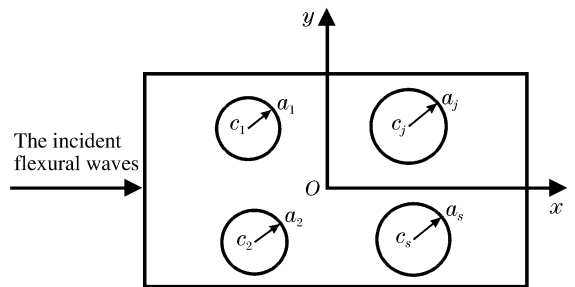


图 1 含多圆孔薄板的模型

Fig. 1 Model of thin planes with multiple cutouts

* 收稿日期: 2007-04-20; 修回日期: 2007-08-28
基金项目: 黑龙江省自然科学基金项目(A0206)
作者简介: 赵嘉喜(1980—), 男, 博士。

在复坐标 (z, \bar{z}) 中,由圆形孔洞引起的散射波^[4] $w_1^{(s)}$ 和 $w_2^{(s)}$ 可以写成

$$w^{(s)} = w_1^{(s)} + w_2^{(s)} = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(k | z |) + B_n H_n^{(1)}(ik | z |)] (z / | z |)^n e^{-i\omega t} \quad (2)$$

式中: $k^2 = \omega \sqrt{2b\rho/D}$, ω 为弯曲波的圆频率, b 为薄板厚度的一半, $H_n^{(1)}$ 为第一类 Hankel 函数。 A_n, B_n 为待定系数。

在极坐标中,弯矩和横向剪力^[4]可以写成

$$\begin{cases} M_{rr} = -D \left[\nu \nabla^2 w + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], & M_{\theta\theta} = -D \left[\nu \nabla^2 w - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \\ M_{r\theta} = -D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), & Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w), & V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \\ Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w), & \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{cases} \quad (3)$$

3 薄板中的总波场

如图 1 所示,略去时间因子,在复坐标 (z, \bar{z}) 下,入射波^[4]可以写成

$$w^{(i)} = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k | z |) (z / | z |)^n \quad (4)$$

式中: J_n 为第一类 bessel 函数。

由文献[4],在复坐标 (z, \bar{z}) 下,由多个圆孔引起的散射波可以写成

$$w^{(s)} = w_0 \sum_{s=1}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n [A_{ns} H_n^{(1)}(k | z - c_s |) + B_{ns} H_n^{(1)}(ik | z - c_s |)] \left(\frac{z - c_s}{| z - c_s |} \right)^n \quad (5)$$

式中: s 为圆孔的编号, c_s 为第 s 个圆孔在复坐标 (z, \bar{z}) 下的复数坐标值。 A_{ns}, B_{ns} 为待定系数。若将坐标系移动到第 j 个圆孔圆心位置,即在坐标系 (z_j, \bar{z}_j) 下, $z = z_j + c_j, z - c_s = z_j + c_j - c_s = z_j - (c_s - c_j) = z_j - d_{sj}$,可得薄板中的总波场

$$w = w^{(i)} + w^{(s)} = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k | z + c_j |) \left(\frac{z + c_j}{| z + c_j |} \right)^n + w_0 \sum_{s=1}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n [A_{ns} H_n^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) + B_{ns} H_n^{(1)}(ik | z_j - d_{sj} |)] \left(\frac{z_j - d_{sj}}{| z_j - d_{sj} |} \right)^n \quad (6)$$

式中: c_j 为第 j 个圆孔圆心在复坐标 (z, \bar{z}) 下的复数坐标值。

4 问题的解答

在坐标系 (z_j, \bar{z}_j) 下,考虑到 $z_j = re^{i\theta_j}, \bar{z}_j = re^{-i\theta_j}$,将(6)式代入(3)式,整理得

$$\begin{aligned} M_{rr} &= -Dw_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \overline{F'_{1n}(k | z_j + c_j |)} - Dw_0 \sum_{s=1}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n [A_{ns} F'_{1n}(k | z_j - d_{sj} |) + B_{ns} F'_{1n}(ik | z_j - d_{sj} |)] \\ M_{\theta\theta} &= -Dw_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \overline{F'_{2n}(k | z_j + c_j |)} - Dw_0 \sum_{s=1}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n [A_{ns} F'_{2n}(k | z_j - d_{sj} |) + B_{ns} F'_{2n}(ik | z_j - d_{sj} |)] \\ V_r &= -Dw_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \overline{F'_{3n}(k | z_j + c_j |)} - Dw_0 \sum_{s=1}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n [A_{ns} F'_{3n}(k | z_j - d_{sj} |) + B_{ns} F'_{3n}(ik | z_j - d_{sj} |)] \end{aligned} \quad (7)$$

式中:

$$F'_{1n}(k | z_j - d_{sj} |) = k^2 \left[\frac{1 - \nu}{4} H_{n-2}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{| z_j - d_{sj} |} \right)^{n-2} e^{2i\theta_j} + \frac{1 - \nu}{4} H_{n+2}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{| z_j - d_{sj} |} \right)^{n+2} e^{-2i\theta_j} - \frac{1 + \nu}{2} H_n^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{| z_j - d_{sj} |} \right)^n \right]$$

$$\begin{aligned}
 F'_{2n}(k | z_j - d_{sj} |) &= k^2 \left[\frac{\nu - 1}{4} H_{n-2}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n-2} e^{2i\theta_j} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\nu - 1}{4} H_{n+2}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n+2} e^{-2i\theta_j} - \frac{1 + \nu}{2} H_n^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^n \right] \\
 F'_{3n}(k | z_j - d_{sj} |) &= -k^3 \left\{ \frac{5 - \nu}{8} \left[H_{n-1}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n-1} e^{i\theta_j} - \right. \right. \\
 &\quad H_{n+1}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n+1} e^{-i\theta_j} \left. \right] + \frac{1 - \nu}{8} \left[H_{n-3}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n-3} e^{3i\theta_j} - \right. \\
 &\quad H_{n+3}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n+3} e^{-3i\theta_j} \left. \right] + \frac{(1 - \nu)k^2}{2 |z_j|} \left[H_{n-2}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n-2} e^{2i\theta_j} + \right. \\
 &\quad \left. H_{n+2}^{(1)}(k | z_j - d_{sj} |) \left(\frac{z_j - d_{sj}}{|z_j - d_{sj}|} \right)^{n+2} e^{-2i\theta_j} \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{F'_{1n}(k | z_j + c_j |)} &= \text{Re } F'_{1n}(k | z_j + c_j |), & \overline{F'_{2n}(k | z_j + c_j |)} &= \text{Re } F'_{2n}(k | z_j + c_j |) \\
 \overline{F'_{3n}(k | z_j + c_j |)} &= \text{Re } F'_{3n}(k | z_j + c_j |)
 \end{aligned}$$

本文研究的圆孔皆为自由边界,以第 j 个孔为研究对象,即在 (z_j, \bar{z}_j) 下, $M_r = 0, V_r = 0$, 可得

$$\sum_{s=1}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{ns} \xi_{sjn} + B_{ns} \eta_{sjn}) = \zeta_j \tag{8}$$

式中: ξ_{sjn}, η_{sjn} 表示在方程求解中的对应分量,可参考文献[7]。

这样,由 k 个圆孔就可以得到 $2k$ 个方程,通过数值计算^[7],即可以解得 k 组 A_n, B_n 的值。

工程上,薄板中的动应力集中系数有如下定义:动弯矩集中系数是开孔周边上的环向动弯矩与入射波在入射方向上的弯矩幅值之比,即: $M_\theta^* = M_{\theta\theta} / M_0$ 。式中, M_θ^* 为量纲一弯矩,表示动弯矩集中系数; M_0 为入射弯矩的幅值, $M_0 = D\omega_0 k^2$ 。由式(7)可得,在 (z_j, \bar{z}_j) 下多圆孔中第 j 个孔周边上的动应力集中系数

$$M_\theta^* = -\frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \overline{F'_{2n}(k | z_j + c_j |)} - \frac{1}{k^2} \sum_{s=1}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n [A_{ns} F'_{2n}(k | z_j - d_{sj} |) + B_{ns} F'_{2n}(ik | z_j - d_{sj} |)] \tag{9}$$

5 算例及分析

本文中给出的算例为 3 个半径相同的圆孔,如图 2 所示。计算的圆孔为上下部署的中间圆孔,3 圆孔圆心的连线与 x 轴垂直。其中, L 为相邻圆孔圆心之间的距离。同时,在本文中泊松比 ν 取 0.3。图 3 给出了 $L/a = 3.0$ 时中间圆孔孔边动弯矩分布情况,其中 $0^\circ \sim 180^\circ$ 表示的是 $t = 0$ 时的动弯矩分布, $180^\circ \sim 360^\circ$ 表示的是 $t = T/4$ 时的动弯矩分布。图 4(a)给出了在单孔和 3 圆孔情况下,当 $\theta = \pi/2$ 时,孔边动弯矩随波数 ka 的变化规律,图 4(b)给出了在 3 圆孔情况下,中间圆孔孔边动弯矩随孔间距 L/a 的变化规律。

由算例可知:

(1) 与单圆孔的情况相比,3 圆孔排列时中间孔的动弯矩分布会发生较大的变化。有的情况下,动弯矩会发生较大幅度的增加,所以在实际应用中,对多孔的具体分析是很有必要的。图 3 给出了在 3 圆孔竖直排列时中间圆孔孔边动弯矩分布情况,相比文献[4]中的单圆孔情况,低频入射时中间孔孔边动弯矩有较大的变化,最大值通常出现在 $\theta = \pi/2$ 处。图中给出的是 $L/a = 3.0$ 的情况,当 $ka = 0.1, \theta =$

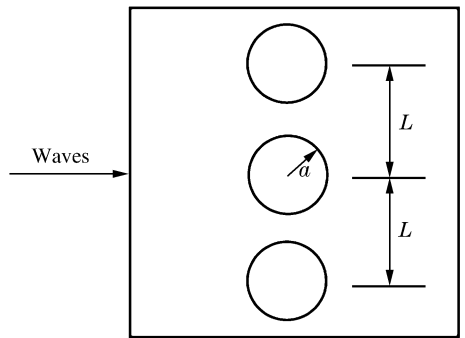


图 2 三孔竖直排列示意图

Fig. 2 Sketch of three cutouts in vertical arrangement

$\pi/2, t=0$ 时,孔边动弯矩的最大值为 2.50,比单孔时的动弯矩值(1.84)^[4]增大了 36.6%。而当 $t=T/4$ 时的动弯矩数值也有一定的变化。但在中高频入射时,孔边动弯矩将会发生较复杂的变化,此时的最大值位置不定,需要进行定性分析。

(2) 图 4(a)给出了 $L/a=3.0, 10^5$ 时,3 孔情况下孔边的动弯矩随波数的变化曲线,当 $L/a=10^5$ 时,可退化为单孔情况,采用本文方法得到的结果与文献[4]完全一致,同时孔边动弯矩随波数呈下降趋势。只是由于孔与孔之间的相互影响,当距离较近时,动弯矩数值会有较大程度的增加。从图 4(b)可以看出,当 $\theta=\pi/2$ 时,近距离排列的孔对孔边动弯矩的影响是较大的。当孔间距 $L/a=2.1, ka=0.1, t=0, \theta=\pi/2$ 时,中间孔动弯矩集中系数为 6.51,这样的数值会对材料产生较大的破坏作用,在工程设计中应尽量避免近距离孔的布置。同时,随着距离的增大,影响越来越小,并逐渐接近单孔值。通常情况下,当 $L/a>9.0$ 时,可以认为孔和孔互不影响。

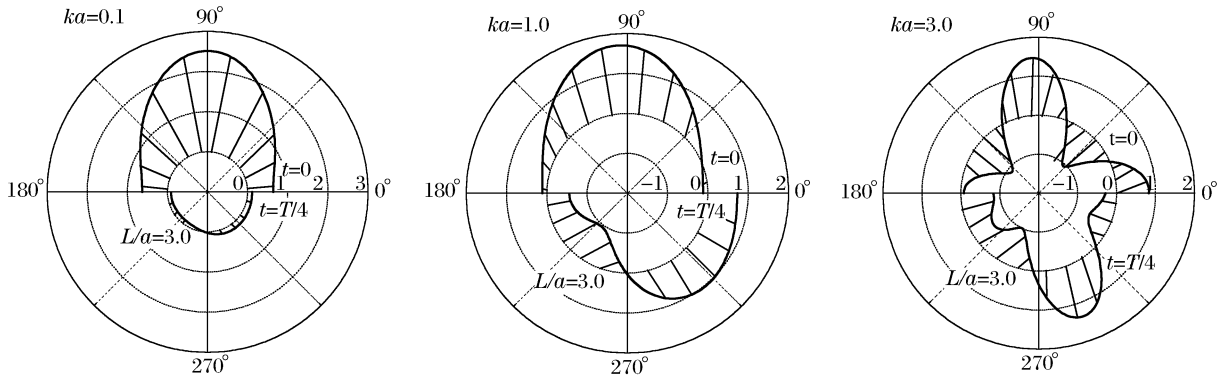


图 3 三孔竖直排列时中间孔孔边动弯矩分布

Fig. 3 Dynamic bending moment factors of the middle cutout in case of three cutouts in vertical arrange

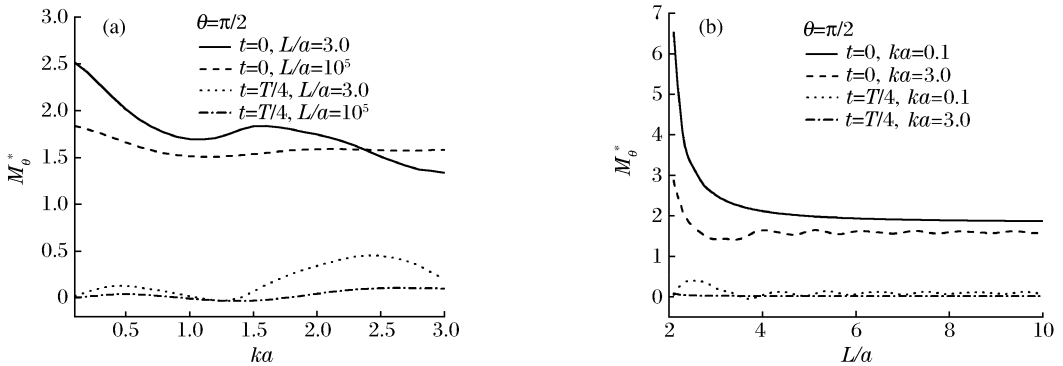


图 4 三孔竖直排列时中间孔孔边动弯矩随 ka 和 L/a 的变化

Fig. 4 $M_{\theta}^* -ka$ and $M_{\theta}^* -L/a$ curves of the middle cutout in case of three cutouts in vertical arrange

6 结 束 语

采用复变函数法和多极坐标方法研究了弯曲波对含多圆孔薄板的散射问题。通过对算例的分析,我们发现当孔间距很小时,相邻的孔边会出现较大的应力集中现象,这主要与能量分配有关。近距离的圆孔会在很小的区域内分得较多的能量,从而造成孔边较大的应力。另外,入射波波数对结果有着较复杂的影响。特别是在高频波入射时,表现出很复杂的特征,需要进行定性分析。此外,除准静态($ka=0.1$)处,动应力集中系数随孔间距的增加呈波动下降趋势。当 $L/a>9.0$ 时,孔和孔的影响可以消除。

参考文献:

- [1] Muskhelishvili N I. 数学弹性力学的几个基本问题[M]. 赵惠元,译. 北京:科学出版社,1958.
- [2] Savin G N. 论孔附近的应力集中[M]. 卢鼎霍,译. 北京:科学出版社,1958.
- [3] 余同希,苏先樾,王晓东. 弹塑性波的研究现状和趋势[J]. 力学进展,1992,22(3):347-357.
YU Tong-xi, SU Xian-yue, WANG Xiao-dong. The present situation and the tendency of the research on elastoplastic wave[J]. Advances in Mechanics, 1992,22(3):347-357.
- [4] 黎在良,刘殿魁. 固体中的波[M]. 北京:科学出版社,1995:319-323.
- [5] 王铎,马兴瑞,刘殿魁. 弹性动力学最新进展[M]. 北京:科学出版社,1995.
- [6] Pao Y H. Dynamical stress concentration in an elastic plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1962,29(2):299-305.
- [7] 胡超,马兴瑞,黄文虎. 含双圆孔平板弹性波散射与动应力分析[J]. 力学学报,1998,30(5):587-596.
HU Chao, MA Xing-rui, HUANG Wen-hu. Dynamic stress concentrations in thin plates with two circular cutouts [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998,30(5):587-596.

Dynamic stress concentration in multi-cutouts-contained thin plates subjected to flexural waves

ZHAO Jia-xi^{*}, LIU Dian-kui, QI Hui, YANG Zai-lin

(College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University,
Harbin 150001, Heilongjiang, China)

Abstract: Scattering of flexural waves by multiple cutouts and dynamic stress concentration in the thin plates were investigated in terms of the complex variable function method and multi-polar coordinates. The expressions of function approach sequences and condition boundary for the general solution to this problem were proposed by deducing the bending motion equations of the plates. It was solved as a series of infinite algebraic equations by expanding the orthogonal functions. The dynamic moment factors of the plates with three circular cutouts were numerically presented, and the influences of paces between circular cutouts and wave number on dynamic stress distribution were analyzed.

Key words: solid mechanics; dynamic stress concentration; complex variable function method; thin plates with multiple circular cutouts; multi-polar coordinates

* Corresponding author: ZHAO Jia-xi
E-mail address: zhaojiaxi1980@126.com
Telephone: 86-24-23971761