文章编号:1001-1455(2009)01-0007-06

非线性弹性大变形材料梁的抗爆特性

方 秦,杜茂林,陈 力

(解放军理工大学工程兵工程学院,江苏南京 210007)

摘要:从理论上探讨了非线性弹性大变形材料应用于抗爆结构的可行性,为此,基于等效结构体系的分析原理,将两端固定铰支梁的横向和纵向位移表示为三角级数形式,应用第二类 Lagrange 方程建立了非线性大变形材料梁的非线性分析方法,并且用 ABAQUS 有限元软件中的超弹性材料模型验证了所提出的方法的有效性。对典型的爆炸荷载作用下非线性弹性大变形材料梁的抗爆特性进行了分析,讨论了动力放大系数和材料性质及动荷载之间的关系。结果表明:与线弹性小变形材料相比,非线性弹性大变形材料具有优良的抗爆特性,结构的抗爆能力随结构变形的增大而显著提高。

关键词:爆炸力学;非线性分析方法;爆炸荷载;梁;非线性弹性材料;大变形 中图分类号:O382.2;TJ91 国标学科代码:130•35 文献标志码:A

1 引 言

防护工程中很多构件可以简化为梁进行计算。提高梁抗力的方法主要是通过采用高强度新材料和改善梁的截面形状。为了寻找提高梁抗力的新途径,方秦等^[1]用解析方法分析了弹性阻尼支承梁的动力响应特性,结果表明梁两端设置 弹簧及阻尼器可以提高梁对爆炸荷载的抗力。在线性分析的基础上,方秦等^[2]采用 ABAQUS 有限元程序,分析了在非 线性响应条件下在梁两端设置弹簧及阻尼器对其抗力的影响,计算表明在非线性情况下,梁两端设置弹簧及阻尼器仍可 以提高梁对爆炸荷载的抗力。曾首义等^[3]讨论了在梁上设置钢管吸能装置以提高梁抗力的可行性。方秦等^[4]、姜锡权 等^[5]进一步讨论了钢管吸能装置的吸能效率评价及相关参数的影响,并通过特例说明此类装置具有较好的抗力的效果。

近年来,在地面结构抗爆炸恐怖袭击的研究中,开发了 Line-X 和 POLIBRID® 705 等抗爆加固材料,现场加固砖墙结构的试验表明,采用这种弹性聚合物材料加固的砖墙结构的抗爆性能明显提高。这些材料基本上都具有非线性弹性和大变形的特征。但是,如何有效地进行爆炸荷载作用下的非线性大变形材料组成的结构动态响应分析,却少见报道。

李明瑞^[6] 对梁的有限变形问题的研究情况进行了论述。早期关于梁的有限变形问题的研究中,Von Kárman 认为 最能表征梁板壳大变形特征的是在变形时产生了较大的转动(事实上还应考虑大曲率),即挠度 v 对截面位置 x 的导数 θ = dv/dx 的二次项是一个不容忽视的量,他在壳的中面(梁的中轴线)线位移上又加上了(dv/dx)²的非线性项。这一项 通常称为 Von Kárman 项,并将线性方程附带有 Von Kárman 非线性项的方程称为 Von Kárman 方程。后人在 Von Kárman 方程的基础上给出了不同的增补项。在求解方法上多采用小载荷步长,多次加载法^[7-8]。另外还有两大类求解 方法,引进跟随单元转动的坐标系法^[9-10]和投影法^[11-12],以消除大转动的影响。这些近似理论的缺点是计算量大,不适 合求解动力学问题、结构稳定屈曲分叉问题;由于计算步长小而引起的误差积累造成计算精度低。LI Ming-rui^[13-15]运用 连续介质力学的理论体系,采取 Timoshenko 梁模型,用 Lagrange 描述导出了线弹性材料梁上任意点的 Green-Lagrange 应变表达式,根据 Green-Lagrange 应变和 Kirchhoff 应力的能量共轭关系得出有限元的平衡方程,方程求解对应变和加 载步长可不加限制。

本文中对能够产生大变形的弹性材料梁,在变形过程中,逐步抵抗爆炸载荷的特性进行了分析,借鉴文献[16-17]的 近似方法和文献[18]中的应变分析的方法,用第二类 Lagrange 方程建立了爆炸载荷作用下梁的动力方程。这样得到的 动力方程是一组常系数常微分方程组,求解很方便。

2 爆炸载荷作用下非线性弹性梁的大变形动力分析方法

设两端固定铰支梁如图1所示,图中v为梁任意截面的竖向位移,y为截面上一点相对于中性轴的坐标。

* 收稿日期: 2007-08-13; 修回日期: 2009-01-14
 基金项目: 国家自然科学基金项目(50525825,50638030);国家科技支撑计划基金项目(2006BAJ13B02)
 作者简介:方 秦(1962-),男,博士,教授,博士生导师。



Fig. 1 An analytical model for the beam



对于应变的分析,采用 Lagrange 描述法^[18],如图 2 所示,梁在静止时的初始位形为 C_n 。惯性参照系用 3 个正交单位基矢量 $e_j(j=1,2,3)$ 来表示, e_1 与梁未变 形时的中轴线重合。梁中轴线上的任意截面的位置可 表示为矢量 $X(x) = xe_1$,其中 x 是未变形时截面距原 点 O的距离。



8

图 2 梁的变形示意图

Fig. 2 Configuration of beam deformation

截面在参考位形中用一对正交矢量 a_2 和 a_3 来表示, $a_1 = a_2 \times a_3$, a_j (j = 1, 2, 3)是三维欧氏空间中的正交单位基矢量。从初始位形 C_n 到当前位形 C 的位移矢量 $u = ua_1 + va_2$ 。

截面的位置由位置矢量 x(x,t) = X(x) + u(x,t) 和一对正交矢量 $d_2(x,t)$ 和 $d_3(x,t)$ 表示($d_1 = d_2 \times d_3$)。 d_1 和 d_2 由 a_1 和 a_2 绕 d_3 轴作有限转动而得,可用正交旋转张量 R(x,t)来描述

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

梁的广义应变在参考位形中以应变矢量 $E(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}^{\mathsf{T}} \mathbf{x}' - \mathbf{X}'$ 和曲率张量 $K(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}^{\mathsf{T}} \mathbf{R}'$ 表示。"'"表示对 x 的导数。由不计剪切变形得, $\gamma = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ 。"•"表示二维欧氏空间中的点积。因此截面转角 $\theta = \arctan [v'/(1+u')]$ 。 又有 $\sin\theta = v'/(1+\epsilon_1)$, $\cos\theta = (1+u')/(1+\epsilon_1)$,这样非零应变就只剩下轴向应变和曲率张量的非零项,即

$$\varepsilon_1 = Ea_1 = \sqrt{(1+u')^2 + (v')^2} - 1 , \qquad k = \theta' = (v'' + u'v'' - u''v')/(1+\varepsilon_1)^2$$
面上任音一片的应恋

则梁横截面上任意一点的应变

$$e = \sqrt{(1+v')^2 + (v')^2} - 1 + (v'' + u'v'' - u''v')y/(1+\varepsilon_1)^2$$
(3)

2.2 应力应变关系

考虑到防护结构构件的抗爆要求和现有弹性聚合物材料的实际应力应变关系的特点,并为了简化问题,假设非线性 弹性材料的应力应变关系为

$$\sigma = a \left[(\varepsilon - b)^3 + b^3 \right] \tag{4}$$

式中:a和b为材料常数。

2.3 梁的动能和势能

梁的动能 T 和势能 U 分别可写为

$$T = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \rho \left(\dot{v}^{2} + \dot{u}^{2} \right) \mathrm{d}x , \qquad U = \int_{V} \left(\int_{0}^{\varepsilon} \sigma \mathrm{d}\varepsilon \right) \mathrm{d}V$$
(5)

式中:p为梁材料的密度, v、u上的点表示对时间求偏导,V表示体积分。

2.4 振型选取

考虑到结构和载荷的对称性,借鉴防护结构中采用静力挠曲线的方法^[16],以及文献[17]中对振型的假设,设满足位移边界条件的竖向和水平位移分别为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n-1}(t) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}, \qquad u(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2n}(t) \sin \frac{2n\pi x}{L}$$
(6)

式中:φ和ψ为待定函数。

2.5 广义力

设爆炸载荷简化为突加均布三角形载荷

$$p(t) = \begin{cases} p_0 (1 - t/t_d) & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$
(7)

式中: p_0 为载荷峰值, t_d 为载荷作用时间。典型的长时间作用载荷的 $t_d = 0.5$ s(如核爆炸载荷),典型的短时间作用载荷的 $t_d = 0.01$ s(如化爆炸载荷)。对应于广义坐标 φ_{2n-1} 的广义力

$$Q_{vn} = 2 \int_{0}^{L/2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} p(t) \cos \theta \sqrt{1 + {u'}^2 + {v'}^2} \, \mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots$$
(8)

对应于广义坐标 42n 的广义力

$$Q_{un} = 2 \int_{0}^{L/2} \sin \frac{2n\pi x}{L} p(t) \sin \theta \sqrt{1 + {u'}^2 + {v'}^2} \, \mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots$$
(9)

2.6 动力方程

将式(3)~(9)代入第二类 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = Q_j \tag{10}$$

可得到梁的动力方程。其中 qi 为广义坐标, Qi 为对应的广义力。

对梁的动力响应分析,常采用静载作用下变形为近似振型,并应用加权残值法建立动力学方程¹⁶,本文中 u 和 v 分 别取一项计算。动力方程建立借助 MATLAB 来实现。式(5)动能的计算用 MATLAB 的积分命令 int 即可得到由广义 坐标表示的动能解析表达式,而式(5)势能和式(8)~(9)广义力的计算,需要结合应用数值与符号运算,应用梯形公式和 积分命令 int 来完成。得到动能和势能的广义坐标表达式后,由式(10)可得到一个常系数线性微分方程组,求解很方便。

3 分析模型的验证

为了说明本文中提出的计算方法的有效性,下面用一个算例对本文方法和 ABAQUS 有限元数值方法的计算结果进行比较。

3.1 超弹性材料模型

ABAQUS有限元软件中的超弹性材料模型^[19]具有如下特点:(1)材料行为是弹性的;(2)材料行为是各向异性的; (3)考虑几何非线性效应。本文中选取的 ABAQUS/explicit 处理方法认为材料是接近不可压缩的(取泊松比为 0.475)。 ABAQUS 应用应变势能 U 来表达材料的应力应变关系。有几种不同的应变势能的模型:多项式模型、Ogden 模型、Arruda-Boycy 模型、Marlow 模型和 van der Waals 模型等,其中有代表性的多项式模型有 Mooney-Revilin 模型、neo-Hookean 模型、简缩多项式模型和 Yeoh 模型等。多项式形式的应变能是常用的形式之一,可以表达为

$$U = \sum_{i+j=1}^{N} C_{ij} (\bar{I}_{1} - 3)^{i} (\bar{I}_{2} - 3)^{j} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{D_{i}} (J_{e1} - 1)^{2}$$

式中:U是应变势能, J_{el} 是弹性体积比, I_{1} 和 I_{2} 是材料中的扭曲度量,N、 C_{ij} 和 D_{i} 是材料参数。

定义超弹性材料的一种方法是向 ABAQUS 提供实验数据。ABAQUS 应用最小二乘法拟合计算材料常数。本文中

选用以单轴拉伸实验数据为基础的材料模型,详见式(4)。

3.2 计算结果及讨论

设梁跨长 L=1 m,梁截面宽 B=0.1 m,梁截面高 H=0.1 m,材料密度 $\rho = 800$ kg/m³;式(4)材料模型中材料参数 a=50 MPa,b=1.2。有限元模型如图 3 所示。

表1为静、动载作用下用本文方法和ABAQUS有限元计算结果的对比,其中ρ。为荷载峰值,δ,为用本文方法计算

Table 1 Analytical results of midspan displacements										
p_0/MPa	δ_1/mm			δ_2 /mm			$(\delta_1 - \delta_2)/\delta_2/\%$			
	$t_{\rm d} = 0.50 \ {\rm s}$	$t_{\rm d} = 0.01 {\rm s}$	静载	$t_{\rm d} = 0.50$	s $t_{\rm d} = 0.01$ s	静载	$t_{\rm d} = 0.50 \ {\rm s}$	$t_{\rm d} = 0.01 {\rm s}$	静载	
0.01	13.9	5.0	7.2	9	5.0	5.3	54.0	0.0	34	
0.10	77.7	44.4	45.8	66	36.9	39.7	18.0	20.0	16	
0.50	162.0	128.0	99.5	153	120.0	93.4	6.0	7.0	7	
1.00	216.0	180.0	133.0	206	172.0	126.0	5.0	5.0	5	
5.00	442.0	387.0	260.0	440	387.0	259.0	0.5	0.0	0	
10.00	725 0	590 0	370 0	678	585 0	393 0	7 0	0.9	-6	

表 1 跨中位移的计算结果

图 3 梁的有限元模型

Fig. 3 The finite element model for the beam

的跨中位移, δ_2 为用 ABAQUS 有限元计算的跨中位移。由表 1 可见,无论是静载作用下还是动载作用下,当 $p_0 \ge 0.5$ MPa 时,本文方法的跨中最大位移计算结果与 ABAQUS 有限元方法的计算结果的误差都不超过 7%;在变形较小的情况下,本文方法与有限元方法的差别较大的原因是端部的应力集中在小变形情况下不可忽略。当 $p_0 < 0.5$ MPa 时,若采用梁单元,有限元与本文方法误差很小,但梁单元在变形较大时无法计算。

4 典型爆炸荷载作用下的计算结果

4.1 跨中位移和载荷之间的关系

定义梁的伸长率为梁中轴线的最大伸长量与中轴线原长之 比,即 $\bar{\epsilon} = (L - L_0)/L_0$, L_0 为梁中轴线原长, L为梁在最大变形位 置时中轴线的长度。静、动荷载峰值与跨中位移最大值之间关系 的计算结果见图 4, 其中参数 a = 50 MPa, 密度 $\rho = 800$ kg/m³。由 图 4 可知, 在静荷载作用下, 跨中位移峰值先随荷载峰值的增加 而增加, 达到峰值后保持一个较长的平台, 然后在伸长率接近 1 时出现硬化现象。在两种典型的动荷载作用下, 在伸长率小于 1 时, 荷载峰值随跨中位移峰值的增加而增加。

4.2 动力放大因数

定义结构动力放大因数 K_d 为跨中最大动位移 y_m 与最大静位 移 y_{sm} 之比(静载荷集度与动载荷峰值相同)。图 5 为结构的动力 放大因数 K_d 与载荷峰值 p_0 的关系曲线,其中参数 a=50 MPa,密 度 $\rho=800 \text{ kg/m}^3$ 。图 5 中动力放大因数 K_d 的最小值对应于 $p_0 =$ 0.5 MPa,最大值对应于 $\epsilon = 1$ 。由图 5 可见,在实用范围($p_0 >$ 0.5 MPa, $\epsilon < 1$)内,随载荷的增大,结构的动力放大因数也增大; 短作用时间载荷的动力放大因数由 $p_0 = 0.5$ MPa 时的 1.28 增加 到 $p_0 = 13$ MPa 时的 1.69,而长时间载荷的结构的动力放大因数 由 $p_0 = 0.5$ MPa 时的 1.63 增加到 $p_0 = 10$ MPa 时的 1.96。

4.3 材料常数 a 和密度 ρ 对动力放大因数的影响

图 6(a)给出了材料常数 a 对载荷峰值 p_0 与动力放大因数 K_d 关系曲线的影响规律。由图 6(a)可见,在实用范围 ($p_0 > 0.5$

MPa, $\bar{\epsilon} < 1$)内,材料常数 *a* 对短作用时间荷载的动力放大因数影响较小,而对长作用时间荷载的动力放大因数影响较大,且在相同峰值荷载作用下, K_d 随 *a* 的增大而减小。图 6(b)给出了材料密度 ρ 对载荷峰值 p_0 与动力放大因数 K_d 关系曲线的影响规律。由该图 6(b)可见, ρ 对 $K_d - p_0$ 关系曲线影响很小。



Fig. 6 Effects of the material constant a and the material density ρ on the relationship between K_d and p_0

4.4 典型跨中位移时程曲线

图 7 是典型的跨中位移时程曲线,其中参数参数 a=50 MPa,密度 $\rho=800$ kg/m³。从图可知,在两种典型的爆炸荷载作用下结构位移首先达到最大值,然后随着载荷的减小而减小,在载荷作用结束后进入自由振动。反弹最大位移与正向最大动力放大因数约为 0.6。



图 4 跨中位移和载荷峰值之间的关系

Fig. 4 Relation of midspan displacement and peak value of the load



图 5 动力放大因数和载荷峰值之间的关系 Fig. 5 Relation of dynamic magnification factor and peak value of the load



图 7 典型跨中位移时程曲线 Fig. 7 Typical midspan displacement-time curves

5 结 论

基于等效体系的分析原理,将两端固定铰支梁的横向和纵向 位移表示为三角级数形式,应用第二类 Lagrange 方程建立了非线 性大变形材料梁非线性分析方法,同时应用 ABAQUS 有限元软 件中的超弹性材料模型进行了验证,并进一步分析了材料性质、 伸长率以及结构动力放大因数与抗力之间的关系,主要结论有: (1)有限元数值分析结果表明,所提出的非线性弹性大变形材料 梁的等效结构体系分析方法能有效地反映结构的动态响应。(2) 静动力荷载作用下,结构抗力都随结构伸长率的增大而显著提 高。(3)实用范围($p_0 > 0.5$ MPa, $\overline{e} < 1$)内,动力放大因数随载荷 峰值增大而增大。(4)材料密度对动力放大因数等动态特性影响 不大;材料常数 a 对短作用时间荷载的动力放大因数影响较小, 而对长作用时间荷载的动力放大因数影响较大,且在相同峰值荷 载作用下,动力放大因数随常数 a 的增大而减小。(5)与线弹性 小变形材料相比,非线性弹性大变形材料具有优良的抗爆特性。

参考文献:

- [1] 方秦,杜茂林.爆炸荷载作用下弹性与阻尼支承梁的动力响应[J].力学与实践,2006,28(2):53-56.
 FANG Qin, DU Mao-lin. Dynamic responses of elastically and damply supported beams under blast loads[J]. Mechanics in Engineering, 2006,28(2):53-56.
- [2] 方秦,陈力,杜茂林.端部设置弹簧和阻尼器提高防护门抗力的理论与数值分析[J].工程力学,2008,25(3):194-199.

FANG Qin, CHEN Li, DU Mao-lin. Theoretical and numerical analysis of improvement of blast doors[J]. Engineering Mechanics, 2008,25(3):194-199.

- [3] 曾首义,陈斌.一种分析圆钢管吸能机理的工程方法及其在防护设备中的应用[J].防护工程,1992(2):43-48.
 ZENG Shou-yi, CHEN Bin. Engineering method for energy absorption of steel tubes and its application in defense equipments[J]. Protective Engineering, 1992(2):43-48.
- [4] 方秦,姜锡权,王年桥,等.横向受压钢管吸能特性分析[C]//第三届全国工程结构安全防护学术会议论文集.中国 力学学会,2000.
- [5] 姜锡权,顾文彬,方秦.有关参数对横向受压钢管特性的影响[C]//第三届全国工程结构安全防护会议论文集.中国 力学学会,2000:203-208.
- [6] 李明瑞.梁板壳的几何大变形一从近似的非线性理论到有限变形理论[J]. 力学与实践,2003,25(3):1-8.
 LI Ming-rui. The geometric large deformation of beam, plate and shell—From the approximate non-linear theory to the finite deformation theory[J]. Mechanics in Engineering, 2003,25(3):1-8.
- [7] Arregui I, Destuynder P, Salaün M. An Eulerian approach for large displacements of thin shells including geometrical non-linearities[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1979,140(3):361-381.
- [8] Crisfield M A. Co-rotational beam element for two and three dimensional nonlinear analysis [C] // Kuhn G, Mang H. IUTAM/IACN Symposium on Discretization Methods in Structural Mechanics, Vienna, Austria, 1989:115-124.
- [9] Hsiao K M, Horng H J, Chen Y R. A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures
 [J]. Computers and Structures, 1987,27(66):769-781.
- [10] Crivellil L A, Felippa C A. A three-dimensional nonlinear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993,21:3647-3673.
- [11] Rankin C C, Nour-Omid B. The use of projectors to improve finite element performance[J]. Computers and Structures, 1988, 30:257-267.
- [12] Nour-Omid B, Rankin C C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors[J]. Computer

Methods in Applied Mechanics Engineering, 1991,93:353-384.

- [13] LI Ming-rui. The finite deformation theory for beam, plate and shell: Part Ⅲ—The three-dimensional beam theory and the FE formulation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1998,162:287-300.
- [14] LI Ming-rui. The finite deformation theory for beam, plate and shell: Part IV—The FE formulation of Mindlin plate and shell based on Green-Lagrangian strain[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 2000, 182:187-203.
- [15] LI Ming-rui. The finite deformation theory for beam, plate and shell: Part V—The shell element with drilling degree of freedom based on Biot strain[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 2000,189:741-759.
- [16] 钱七虎.防护结构计算原理[M].南京:工程兵工程学院,1981.
- [17] Rao G V, Raju K K. Large amplitude free vibrations of beams: An energy approach[J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2003,83(7):493-498.
- [18] Lacarbonara W, Yabuno H. Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions: Theory and experiment[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006,43(17):5066-5084.
- [19] 张茁,张帆,岑松. ABAQUS 非线性有限元分析与实例[M]. 北京:科学出版社,2005.

Blast-resistant properties of beams consisting of nonlinear elastic large deformation materials

FANG Qin*, DU Mao-ling, CHEN Li

(Engineering Institute of Engineer Corps, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, Jiangsu, China)

Abstract. Materials such as steel and reinforced concrete are frequently used in blast-resistant structures. However, analytical procedures for those structures are limited to elastic or elastic-plastic small deformations. This paper aims to discuss the feasibility of the application of nonlinear elastic large deformation materials to blast-resistant structures theoretically. Based on the principle of the equivalent structural system and the representation of the transverse and longitudinal displacements of the beam supported with immovable pinned ends by triangular series, a simplified nonlinear analytical method is derived for the beam consisting of nonlinear elastic large deformation materials by Lagrange's equations of the second kind. The effectiveness of the proposed analytical method is verified by ABAQUS finite element code, in which the nonlinear elastic large deformation materials are simulated by the hyperelastic model. The blast-resistant properties of the beams consisting of the nonlinear elastic material subjected to the typical blast loads are analyzed, and the discussions about the relationships among the dynamic magnification factor, material property, and the blast load are given. The analytical results show that the blast resistance of the beam consisting of nonlinear elastic large deformation materials is much better than that of the beam consisting of linear elastic small deformation materials, and the structural blast-resistance increases greatly with the increasing of the structural deformation. Key words: mechanics of explosion; nonlinear analytical method; blast load; beam; nonlinear elastic material; large deformation

 Corresponding author: FANG Qin Telephone: 86-25-80820103