文章编号:1001-1455(2009)01-0061-06

有损伤连续梁的瞬态响应

余云燕

(兰州交通大学土木工程学院,甘肃兰州 730070)

摘要:出于局部控制和健康安全监测的需要,为检测结构的损伤提供可能性,应用回传射线矩阵法,对方 波脉冲作用下的有损伤连续梁进行损伤检测研究。连续梁结构的局部损伤用减小单元的杨氏模量来模拟。 结果表明,当方波脉冲斜向作用时,通过结构上接收点处轴向速度波能准确判断损伤存在,确定损伤区域,估 测损伤程度。

关键词:固体力学;瞬态响应;回传射线矩阵法;连续梁;损伤检测;速度波

中图分类号:O343 国标学科代码:130・1510 文献标志码:A

基于振动测试的结构损伤检测技术是当前研究的热点^[1-5],但大量的模型试验和结构的原型测试经验表明,由于结构损伤引起的结构自振频率变化太小,振型及阻尼的精确测量比较困难,所以很难进行准确的损伤检测。弹性波在构件中传播,携带介质变化的各种信息,使结构损伤检测成为可能。目前,运用一维波动理论检测桩身质量已在工程实践中得到广泛应用。

鲍亦兴等^[6-7]提出回传射线矩阵法,用于计算桁架或刚架的初期瞬态响应,而初期瞬态响应信号正是损伤检测的有 用信号,并将其应用到层状介质中^[8]。田家勇等^[9]在回传射线矩阵法的基础上引入节点质量阻尼模型对刚架结构进行 功率流分析。余云燕等^[10-15]利用该方法研究有损伤简支梁和有缺陷框架结构的波动响应,并进一步发展到埋置框架。

本文中应用回传射线矩阵法研究有损伤连续梁接收点的速度波,探讨损伤程度和区域、脉冲荷载作用方向等对速度 波的影响规律,比较有损伤连续梁与无损伤连续梁在这些量上的变化,试图为工程实践提供理论指导。

1 回传射线矩阵法的基本原理

图 1 为有损伤连续梁的结构简图。设连续梁中有损伤与无损伤部分的混凝土泊松比 µ 不变,杨氏模量 E 与剪切模





* 收稿日期: 2007-06-29; 修回日期: 2008-01-02
 基金项目: 甘肃省自然科学基金项目(3ZS061-A25-042);兰州交通大学"青蓝"人才工程基金项目(QL0507A)
 作者简介: 余云燕(1968—),女,副教授,博士,硕士生导师。

量 G 之间的关系满足 E = G/(2(1+μ))。连续梁内部的损伤用减小杆件的杨氏模量(或剪切模量)来模拟。对图 1 所示的连续梁划分单元,并进行结点编号。对每个梁单元 *ij* 分别建立两个局部坐标系(*x*,*y*)_{*ij*} 和(*x*,*y*)_{*jj*} 。局部坐标系下无损单元 12、23、45、56 的轴向波和挠曲波由下列方程描述

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \kappa A G_1 \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 (v_b + v_s)}{\partial t^2} \\ E_1 I \frac{\partial^3 v_b}{\partial x^3} + \kappa A G_1 \frac{\partial v_s}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^3 v_b}{\partial x \partial t^2} \end{cases}$$
(2)

式中:A、 ρ 、I分别为无损伤连续梁的横截面面积、密度和横截面惯性矩; E_1 、 E_2 分别为无损伤和有损伤单元的杨氏模量; G_1 、 G_2 分别为无损伤和有损伤单元的剪切模量; κ 为剪切系数;u为轴向位移; v_b 为弯曲引起的挠曲位移; v_s 为剪切引起的挠曲位移;总的挠曲位移为 $v=v_b+v_s$ 。已知 $c_0 = \sqrt{E_1/\rho}$ 为无损伤单元的纵波波速, $R_z = \sqrt{I/A}$ 为无损伤连续梁各单元的回转半径。

令
$$x = \bar{x}R_x$$
, $t = \bar{t}R_x/c_0$, $v_b = \bar{v}_bR_x$, $v_s = \bar{v}_sR_x$, $u = \bar{u}R_x$, 将方程(1)~(2)量纲一化并进行 Fourier 变换

$$\frac{\mathrm{d}^2 \hat{u}}{\mathrm{d}\overline{x}^2} = -\omega^2 \hat{u} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 \hat{v}_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}\overline{x}^2} = -n\omega^2 (\hat{v}_{\mathrm{b}} + \hat{v}_{\mathrm{s}}) \\ \frac{\mathrm{d}^3 \hat{v}_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}\overline{x}^3} + \frac{1}{n} \frac{\mathrm{d}\hat{v}_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}\overline{x}} = -\omega^2 \frac{\mathrm{d}\hat{v}_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}\overline{x}} \end{cases}$$
(4)

式中: $n = \frac{E_1}{\kappa G_1}$,为无损单元的杨氏模量与修正剪切模量之比。求解上式得

$$\hat{u}(\bar{x},\omega) = a_1(\omega)e^{ik_1x} + d_1(\omega)e^{-ik_1x}$$
(5)

$$\hat{v}_{b}(\bar{x},\omega) = a_{2}(\omega)e^{ik_{2}x} + d_{2}(\omega)e^{-ik_{2}x} + a_{3}(\omega)e^{ik_{3}x} + d_{3}(\omega)e^{-ik_{3}x}$$
(6)

$$\hat{v}_{s}(\bar{x},\omega) = g_{2}a_{2}(\omega)e^{ik_{2}x} + g_{2}d_{2}(\omega)e^{-ik_{2}x} + g_{3}a_{3}(\omega)e^{ik_{3}x} + g_{3}d_{3}(\omega)e^{-ik_{3}x}$$
(7)

式中: $a_1(\omega)$ 、 $a_2(\omega)$ 、 $a_3(\omega)$ 分别为待定入射波波幅; $d_1(\omega)$ 、 $d_2(\omega)$ 、 $d_3(\omega)$ 分别为待定出射波波幅; k_1 、 k_2 、 k_3 为波数,分别为

$$k_1 = \omega, k_{2,3}(\omega) = \sqrt{\frac{(n+1)\omega^2 \pm \sqrt{(n+1)^2 \omega^4 - 4\omega^2 (n\omega^2 - 1)}}{2}}; g_{2,3}(\omega) = n(k_{2,3}^2 - \omega^2).$$

损伤单元 34 的波动方程,需将式(1)中的 c_0 改为 $c_1(c_1 = \sqrt{E_2/\rho}$,为有损伤单元内的纵波波速),将式(2)中的 E_1 、 G_1 改为 E_2 、 G_2 ,并引入损伤程度 $m(m=E_1/E_2=G_1/G_2)$,可进一步求解得到有损伤单元各物理量的频域表达式。

在频域中,对所有结点 j 建立力平衡和位移协调条件,得到节点 j 的局部入射波波幅向量和局部出射波波幅向量的 关系,并将所有节点的局部入射波波幅向量和出射波波幅向量组集到总体矩阵 a 和 d 中,有

$$d = Sa + s \tag{8}$$

每根杆件 *ij* 的入射波波幅向量 a_{ij} 和出射波波幅向量 d_{ij} 之间有相位关系,引入传播矩阵 P_{ij} ,并将 a_{ij} 、 d_{ij} 分别组集到 总体矩阵 a 和 \tilde{d} 中,有 $a = P\tilde{d}$ 。引入置换矩阵 U,得 $\tilde{d} = Ud$ 。则

$$a = PUd \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)中得

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1} \boldsymbol{s} \tag{10}$$

式中:R=SPU称为回传射线矩阵,I为单位矩阵。

求得 a 和 d 后,可求出任意一点的任意物理量。以速度波为例

$$\mathbf{V}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{A}_{V} \mathbf{P} \mathbf{U} + \mathbf{D}_{V}) (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}\omega$$
(11)

式中: A_V 和 D_V 分别为入射波速度波相矩阵和出射波速度波相矩阵。对矩阵(I-R)⁻¹采用 Newmann 级数展开来避开奇 异点

$$\mathbf{V}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{A}_{V} \mathbf{P} \mathbf{U} + \mathbf{D}_{V}) (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^{2} + \dots + \mathbf{R}^{N} + \dots) \mathbf{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}\omega$$
(12)

因瞬态波观察时间有限,在实际计算中,根据瞬态波观察时间将展开式截断,来估计瞬态波的初期瞬态响应。总体 出射波波幅向量 d 由 N 次多项式 d_N近似表示,由于因果关系^[7],总体入射波波幅向量 a 由 N-1 次多项式 a_{N-1}近似表 示,d_N和 a_{N-1}的表达式分别为

$$\mathbf{d}_{N} = (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^{2} + \dots + \mathbf{R}^{N})\mathbf{s}$$

$$\mathbf{d}_{N-1} = \mathbf{PU}\mathbf{d}_{N-1} = \mathbf{PU}(\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^{2} + \dots + \mathbf{R}^{N-1})\mathbf{s}$$

$$N = 1, 2, \dots$$
(13)

式(12)可表示为

$$\boldsymbol{V}_{N}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{A}_{V} \boldsymbol{a}_{N-1} + \boldsymbol{D}_{V} \boldsymbol{d}_{N}) e^{i\omega t} d\omega$$
(14)

2 实例计算与分析

图 1 为有损伤连续梁,距左端支座 l_1 处斜向作用方波脉冲 $f, f = f_0 (H(t) - H(t - t_a))$,脉冲与轴线方向夹角为 $\pi/4$ 。无损单元和有损单元的抗弯刚度分别为 $E_1 I, E_2 I$,各单元的量纲一长度分别为 $\bar{l}_1 = 2, \bar{l}_2 = 9, \bar{l}_3 = 4, \bar{l}_4 = 5, \bar{l}_5 = 10$ 。量纲一脉冲持续时间 $\bar{l}_a = 2,$ 杨氏模量与修正剪切模量之比 n = 3。信号接收点为 B,距结点 2 右侧的量纲一距离为 1 处。

2.1 有损伤连续梁轴向与横向速度波的不同展开项数结果比较

图 2~3 为有损伤连续梁在接收 点 B 的轴向速度波和横向速度波不同 展开项数结果比较。实线表示展开项 数 N=7, 虚线表示 N=1。轴向速度 波具体传播过程如下:结点2为脉冲 作用点,为波源,由波源出射的波到达 接收点 B 的量纲一时间为 1,传播路 径 2→B,为首波;经一个结点(图 1 中 结点 3) 的散射到达接收点 B 的射线 有1条,传播路径 2→B→3→B,到达 B的量纲一时间为17;经两个结点散 射到达接收点 B 的射线有一条,传播 路径 $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow B$,到达 B 的量纲一时 间为5:经3个结点散射到达接收点 B 的射线有 2 条,传播路径分别为 2→1 $\rightarrow 2 \rightarrow B \rightarrow 3 \rightarrow B$ 和 $2 \rightarrow B \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow$ B,到达 B 的量纲一时间分别为 21 和 28.3;传播路径 2→B→3→4→3→B 这 条射线经过缺损处(图 1 中结点 3、结 ≈ 点 4)的反射和透射,因连续梁的局部 损伤用减小杨氏模量来模拟,纵波在 损伤段的传播波速小于其他单元。纵 波在损伤单元 34 传播的量纲一时间 $\bar{t}_{34} = \bar{l}_4 \sqrt{E_1/E_2} = \sqrt{m} \bar{l}_4 = 5.66,$ 延迟 了1.66个量纲一时间。经4个结点 散射到达接收点 B 的射线有 1 条,传 播路径为 $2 \rightarrow B \rightarrow 3 \rightarrow B \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow B$, 到达B的量纲一时间为23;对于横向





the continuous beam at receiving spot B



图 3 连续梁接收点 B 的横向速度波不同展开项数结果比较 Fig. 3 Comparison of different expanded-number transverse velocities of the continuous beam at receiving spot B

速度波,经5个结点散射到达接收点 B 的射线有 4 条,传播路径分别为 2→1→2→B→3→4→3→B、2→B→3→B→2→1 →2→B→3→B、2→B→3→4→3→4→3→B、2→B→3→4→5→4→3→B,到达 B 的量纲一时间分别为 32.3、39、39、6 和 38.3。刚结点不反射轴向速度波,所以经5个结点散射到达接收点 B 的轴向速度波比横向速度波少一条传播路径为 2 →B→3→4→5→4→3→B 的射线。由图可见,轴向速度波中结点反射与透射的信号比横向速度波强烈。横向速度波为 弥散波,在传播过程中的历程曲线是不断变化的,且横向速度波的首波不是方波,后期无法对射线到达时间进行准确的 判断。图中的两条曲线在量纲一时间 5 以前完全重合,5 之后开始分离,这是因为传播路径为 2→1→2→B 这条射线到 达接收点 B,到达时间为 5。图 2 中可看出在量纲一时间 58.3 后有射线到达,而且射线到达信号很强烈,证明当 N=7 时从结点 6 反射回到接收点 B 的射线参与了曲线的叠加。

2.2 有损伤与无损伤连续梁轴向与横向速度波的对比分析

把图1所示有损伤连续梁和其他 条件与它相同的无损伤连续梁接收点 B的轴向速度波及横向速度波进行比 较。图 4~5 分别为有损伤和无损伤 连续梁接收点B的轴向速度波及横向 速度波比较。图中实线表示无损伤, 虚线表示有损伤,损伤程度 m=2,展 开项数 N=7。对于无损伤连续梁,由 结点2出射的速度波分别向接收点 B 和结点1传播,首次到达B的量纲一 时间为1,传播路径为2→B,这是第一 条到达 B 的射线。速度波经传播路径 $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow B$ 到达接收点 B 的量纲一 时间为5,这是第二条到达B的射线, 前两条射线与有损伤连续梁相同。由 于刚结点不反射轴向速度波,所以由 结点2出射的轴向速度波经反射到达 接收点 B 的第三条射线传播路径应为 $2 \rightarrow B \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow B$,到达 B 的量纲一 时间为 55。可见若没有损伤存在,B 点轴向速度波在量纲一时间 5~55 之 间应无其他射线到达。从图 4 可以看 出,有损伤和无损伤轴向速度波曲线 在量纲一时间17开始分离,这是由于 存在损伤,缺损处(图1中的结点3)的 反射回传到接收点 B 的时间为 17,传







播路径 2→B→3→B。若无损伤存在,第3条到达接收点 B 的横向速度波传播路径应为 2→B→5→B,到达 B 的量纲一时间为 35,即在量纲一时间 5~35 内,无其他横向速度波到达。从图 5 可以看出,两条曲线在量纲一时间 17 开始分离, 这是由于存在损伤,缺损处(图 1 结点 3)的反射回传到接收点 B 横向速度波的时间为 17,传播路径 2→B→3→B(图 1)。 对于损伤连续梁,距左支座的损伤位置可根据轴向速度波第一条射线到达接收点 B 的时间和波传播路径算出。若将方 波脉冲作用到刚结点附近,用同样方法可确定损伤距刚结点的位置,从而确定损伤区域。

2.3 损伤程度的影响

图 6 为损伤程度 m 对连续梁接 收点 B 轴向速度波的影响。已知 $E_1/E_2 = G_1/G_2 = m, m$ 反映杨氏模量相 对变化程度, m 越大, $E_1($ 或 G_1)与 E_2 (或 G_2)差别越大, 损伤越严重, m=1 表示无损伤。由图可看出, 损伤程度 对前期波没有影响, m 越大, 损伤越 严重, 从量纲一时间 17 开始由损伤处 (结点 3) 反射回传到接收点 B 的反射 波波幅就越大。因为损伤程度越大, 弹性波在损伤单元传播波速越慢, 所 以在经过损伤段的反射和透射后, 轴 向速度波到达接收点的量纲一时间随 着损伤程度的加大而延时越长。



图 6 损伤程度对有损伤连续梁接收点 B 轴向速度波的影响 Fig. 6 Influence of damaged degree on axial velocity of the damaged beam at receiving spot B

2.4 脉冲作用方向的影响

图 7 为方波脉冲作用方向对接收 点 B 轴向速度波的影响。图中给出了 方波脉冲作用方向与连续梁轴线方向 的夹角分别为 $\pi/2$ 、 $\pi/4$ 、 $\pi/6$ 时的轴 向速度波。由图 7 可看出,当夹角为 $\pi/2$ 时(即脉冲垂直作用在结点 2 上), 轴向速度波波幅最小。随着夹角的减 小,轴向速度波波幅逐渐增大,当夹角 为 $\pi/6$ 时,轴向速度波波幅最大。可 见,在脉冲荷载作用下,竖向分力越 大,其轴向速度波波幅越小;当轴向分 力越大时,其轴向速度波波幅越大。

2.5 损伤区域的影响

如图 1 中的有损伤连续梁,设 \bar{l}_1 =2, \bar{l}_2 =13- \bar{l}_3 , \bar{l}_4 =5, \bar{l}_5 =10,当损伤 区域 \bar{l}_3 =4,6,8 时,得到如图 8 所示脉 冲作用点的轴向速度波。由图可看 出,损伤区域越大,则结点 3 离接收点 B的距离就越小,经传播路径 2→B→ 3→B 这条射线到达接收点 B 的时间 就越早,到达的量纲一时间依次为 17、 13、9。损伤区域越长,由于波速减慢, 轴向速度波在损伤段内传播的延迟时 间就越长。

对多跨连续梁,如果损伤并非一 处,则在连续梁上布置多个信号接收



图 7 脉冲荷载作用方向对有损伤连续梁接收点 B 轴向速度波的影响 Fig. 7 Influence of acting direction of impulsive load on axial velocity of the damaged beam at receiving spot B



点,改变荷载作用点位置,分析轴向速度波的传播路径和到达时间可确定损伤区域和程度。实际检测时,先在连续梁上 布置多个传感器,改变瞬态敲击位置,分析每次敲击后各传感器的记录信号,可判断损伤位置、损伤区域和程度。

3 结 论

研究了方波脉冲斜向作用时,有损伤连续梁接收点处的轴向速度波及横向速度波,通过分析得出以下结论:(1)接收 点轴向速度波信号清晰、易于判断,可用于连续梁的损伤检测。横向速度波为弥散波,无法进行损伤检测。(2)连续梁刚 结点不反射轴向速度波。(3)脉冲作用方向对接收点的轴向速度波影响很大。荷载作用方向与连续梁轴线之间的夹角 越大,接收点的轴向速度波波幅就越小。(4)损伤越严重,轴向速度波经损伤处的反射回传到接收点的波幅就越大,延时 就越长。根据轴向速度波可估计损伤程度。(5)损伤区域越大,轴向速度波在损伤段传播的延迟时间就越长。(6)对于 三跨或三跨以上的连续梁结构,无论有一处或多处损伤,仅增加程序计算的时间,利用接收点的轴向速度波得到准确损 伤信息,并调整荷载作用点和接收点的位置,可判断损伤区域。

参考文献:

- [1] Pandey A K, Biswas M, Samman M M. Damage detection from changes in curvature mode shapes[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991,145(2):321-332.
- [2] Pandey A K, Biswas M. Damage detection in structures using changes in flexibility[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994,169 (1):3-17.
- [3] Koh C G, See L M, Balendra T. Damage detection of buildings: Numerical and experimental studies[J]. Journal of Structural Engineering, 1995,121(8):1155-1160.
- [4] Koh C G, Hoon B, Liaw C Y. Parameter identification of large structural systems in time domain[J]. Journal of Structural Engi-

neering, 2000, 126(8): 957-963.

- [5] Housner G W, Bergman L A, Caughey T K, et al. Structural control: past, present, and future[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1997,123(9):897-971.
- [6] Pao Y H , Keh D C, Howard S M. Dynamic response and wave propagation in plane trusses and frames [J]. AIAA Journal, 1999,37(5):594-603.
- [7] Chen J F, Pao Y H. Effects of causality and joint conditions on method of reverberation-ray matrix[J]. AIAA Journal, 2003,41 (6):1138-1142.
- [8] Su X Y, Tian J Y, Pao Y H. Application of the reverberation-ray matrix to the propagation of elastic waves in a layered solid[J]. International Journal of Solids and Structure, 2002, 39(21-22): 5447-5463.
- [9] 田家勇,苏先樾. 刚架结构的节点质量阻尼减振分析[J]. 固体力学学报,2002,23(1):47-53. TIAN Tian-yong, SU Xian-yue. The vibration suppression of joint mass-damping in frame structures[J]. Acta Mechnica Solida Sinica, 2002,23(1):47-53.
- [10] 谢禹,余云燕. 有损伤简支桥梁的波动分析[J]. 兰州交通大学学报,2006,25(6):74-77.
 XIE Yu, YU Yun-yan. Wave analysis of damaged simple bridge [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2006,25(6):74-77.
- [11] 余云燕,鲍亦兴,陈云敏.有损伤框架结构的波动分析[J].振动工程学报,2004,17(1):20-24.
 YU Yun-yan, BAO Yi-xing, CHEN Yun-min. Wave analysis of damage frame structures[J]. Chinese Journal of Vibration Engineering. 2004,17(1):20-24.
- [12] 余云燕,鲍亦兴,陈云敏.基于回传射线矩阵法框架结构的损伤检测研究[J].土木工程学报,2005,38(3):53-58.
 YU Yun-yan, BAO Yi-xing, CHEN Yun-min. Damage detection of frame structures based on the reverberation matrix method
 [J]. China Civil Engineering Journal, 2005,38(3):53-58.
- [13] 余云燕,鲍亦兴,陈云敏.埋置框架质量检测的探讨[J].力学学报,2006,38(3):339-346.
 YU Yun-yan, BAO Yi-xing, CHEN Yun-min. Discussion on quality testing of frame structure embedded partially in soil [J].
 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006,38(3):339-346.
- [14] 余云燕. 有缺陷埋置框架的波动响应及影响因素研究[J]. 振动工程学报,2007,20(2):194-199.
 YU Yun-yan. Studies on wave response of a defective frame structure embedded partially in soil and influence factors[J]. Chinese Journal of Vibration Engineering, 2007,20(2):194-199.
- [15] 余云燕. 成层地基中变模量埋置框架的波动响应研究[J]. 固体力学学报,2007,28(2):1-8. YU Yun-yan. Study on wave response of variable modulus frame structure embedded partially in layered soil [J]. Acta Mechnica Solida Sinica, 2007,28(2):1-8.

Transient response of a damaged continuous beam

YU Yun-yan*

(College of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: While elastic waves propagates along structures, all kinds of information can be carried, including damage information, which offers possibility for detection of damaged structures. For the sake of carrying on local control and health safety monitoring, a damaged continuous beam by applying square pulses was investigated by the reverberation-ray matrix method. The local damage in the continuous beam was modeled by the decreased Young's modulus. Researched results show that while the square pulse is applied obliquely, the axial velocity wave at the receiving point can be detected, the detected velocity wave can be used to locate the damage position and to estimate the damage degree. **Key words**: solid mechanics; transient response; reverberation-ray matrix method; continuous beam; damage detection; velocity wave

^{*} Corresponding author: YU Yun-yan