

文章编号: 1001-1455(2009)02-0177-05

环形激波绕射、反射和聚焦流场的间断有限元模拟*

陈二云¹, 马大为¹, 乐贵高¹, 赵改平², 朱孙科¹

(1. 南京理工大学机械工程学院, 江苏 南京 210094;

2. 上海理工大学医疗器械学院, 上海 200093)

摘要: 采用间断有限元方法对环形激波在圆柱形激波管内绕射、反射和聚焦流场进行了数值模拟。将二维守恒方程的间断有限元方法发展到轴对称 Euler 方程, 并对环形激波绕后台阶流动进行了数值计算。计算结果表明, 采用间断有限元方法能够有效地捕捉运动激波在圆柱形激波管内传播的复杂流场结构; 在聚焦点附近, 数值解具有较大的梯度变化, 表明该方法对间断解具有较强的捕捉能力, 在聚焦点附近不会产生振荡或抹平间断现象。

关键词: 爆炸力学; 激波绕射; 间断有限元方法; 环形激波; 聚焦; 反射

中图分类号: O354.4 **国标学科代码:** 130 · 3520 **文献标志码:** A

1 引言

激波聚焦是指在一定条件下激波在其传播方向上发生收敛的行为, 由于激波聚焦可以在流场内产生瞬态的高温高压脉冲, 近年来已被广泛应用到某些工业和医学领域^[1], 因此开展与之相关的研究工作具有重要的理论和实际意义。

激波聚焦的一种简单实现方法是让平面入射激波在凹形壁面(如半圆形、抛物形)反射, 实现聚焦效果。滕宏辉等^[2]的研究表明, 环形激波会聚不需要反射物面, 具有三维会聚的特点, 能产生更好的聚焦效果。S. H. R. Hamid 等^[3]利用无膜激波管研究了马赫数为 1.5 时环形激波在激波管内聚焦的情况, 得到了流场中不同时刻的全息干涉条纹和壁面不同点的压力时程曲线。由于实验测试手段具有局限性, 并且费用高昂, 人们努力发展经济性好、鲁棒性强, 且具有高分辨率、高精度的数值预测方法。

目前, 对于此类流动的数值模拟方法主要有 DCD 格式^[4]、FVM 格式^[5]和 WENO 格式^[6], 能够较好地模拟激波聚焦过程中的复杂流场结构。B. Cockburn 等^[7-11]提出了一种 Runge-Kutta 间断有限元方法, 实质上是时间和空间一致高阶精度的高分辨率格式。与其他数值格式相比, 该方法最大的优点是无需扩大节点模板即可提高解的精度, 便于程序的编制和计算, 并且在间断位置不会降低解的精度。

本文中在 B. Cockburn 等^[7-11]工作的基础上, 将二维双曲守恒方程的间断有限元方法推广到轴对称 Euler 方程的求解, 并对环形激波在圆柱形激波管内绕射、反射和聚焦流场进行数值模拟。

2 间断有限元方法

2.1 控制方程

在忽略粘性和热传导效应的假设下, 轴对称流动的 Euler 方程组表示为

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F} / \partial x + \partial \mathbf{G} / \partial y = \mathbf{S} \quad \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T$, $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (E + p)u]^T$, $\mathbf{G} = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (E + p)v]^T$, $\mathbf{S} = (-\rho v / y)[1, u, v, (E + p)\rho]^T$, $\Omega \in \mathbf{R}^2$, T 是时间变量, ρ 是密度, u 和 v 分别对应于 x 和 y 方向的速度分量, p 是压强, E 是体积的总能量。对于气体动力学方程, 有 $E = \rho e + \rho(u^2 + v^2) / 2$, e 是质量内能; 对于理想气体, 状态方程为 $p = (\gamma - 1)\rho e$, γ 是比热比。

2.2 DG 空间离散

数值模拟中, 对方程(1)的空间离散形式采用间断有限元格式。设 Γ_h 是区域 Ω 的一个有限部分, 单元 $K \in \Gamma_h$, e 表示单元 K 的边界, $\mathbf{n}_{e,K}$ 表示单元 K 边界的外法线向量。 $V(K)$ 是 K 上的局部有限元空间, 取作 P^k 次多项式的集合 ($k \geq 0$)。

* 收稿日期: 2007-11-02; 修回日期: 2008-09-09

基金项目: 上海市重点学科建设基金项目(J50501)

作者简介: 陈二云(1977—), 男, 博士研究生。

$\forall t \in [0, T]$, 在间断有限元空间 $V_h = \{v_h \in L^\infty(\Omega) : v_h|_K \in V(K), \forall K \in \Gamma_h\}$ 中寻找近似解 $U_h(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} = (x, y)$ 。

首先在单元 K 上用连续函数 v 乘方程(1)的两端, 并用它的近似解 $U_h(\mathbf{X}, t) \in v_h$ 代替方程(1)的精确解 $U(\mathbf{X}, t)$, 用 $v_h \in V_h$ 代替测试函数 v , 由 Green 公式, 得

$$\frac{d}{dt} \int_K U_h(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Omega + \sum_{e \in \partial K} \int_e \mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,K} v_h(\mathbf{X}) d\Gamma - \int_K \mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}) d\Omega = \int_K \mathbf{S}(U_h(\mathbf{X}, t)) v_h(\mathbf{X}) d\Omega \quad (2)$$

式中: $\mathbf{f}(U(\mathbf{X}, t)) = (\mathbf{F}(U(\mathbf{X}, t)), \mathbf{G}(U(\mathbf{X}, t)))$, 对式(2), 用数值通量函数 $h_{e,K}(u, v)$ 代替通量 $\mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,K}$, 得

$$\frac{d}{dt} \int_K U_h(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Omega + \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K}(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Gamma - \int_K \mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}) d\Omega = \int_K \mathbf{S}(U_h(\mathbf{X}, t)) v_h(\mathbf{X}) d\Omega \quad (3)$$

数值通量函数 $h_{e,K}(u, v)$ 在单元边界 (\mathbf{X}, t) 上的值依赖于近似解在 (\mathbf{X}, t) 上的 2 个值, 1 个是从单元 K 内部求得, 即 $U_h(\mathbf{X}_{\text{int}(K)}, t) = \lim_{y \rightarrow x, y \in K} U_h(y, t)$, 另 1 个是从单元 K 的外部求得, 即

$$U_h(\mathbf{X}_{\text{ext}(K)}, t) = \begin{cases} \gamma_h(\mathbf{X}, t) & \mathbf{X} \in \partial\Omega \\ \lim_{y \rightarrow x, y \in K'} U_h(y, t) & \mathbf{X} \notin \partial\Omega \end{cases}$$

定义数值通量函数 $h_{e,K}(\mathbf{X}, t) = h_{e,K}(U_h(\mathbf{X}_{\text{int}(K)}, t), U_h(\mathbf{X}_{\text{ext}(K)}, t))$, 是 Riemann 解算器, 满足如下条件: (1) 相容性, $h_{e,K}(u, u) = \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}_{e,K}$; (2) 单调性, $h_{e,K}(u, v)$ 对 u 是非减, 对 v 是非增; (3) 全局两点 Lipschitz 连续性; (4) 守恒性

$$h_{e,K}(U_h(\mathbf{X}_{\text{int}(K)}, t), U_h(\mathbf{X}_{\text{ext}(K)}, t)) = -h_{e,K'}(U_h(\mathbf{X}_{\text{int}(K')}, t), U_h(\mathbf{X}_{\text{ext}(K')}, t)) \quad K \cap K' = e$$

在计算中数值通量取局部 Lax-Friedrichs 通量

$$h_{e,K}(a, b) = [\mathbf{f}(a) \cdot \mathbf{n}_{e,K} + \mathbf{f}(b) \cdot \mathbf{n}_{e,K} - \alpha_{e,K}(b - a)]/2 \quad (4)$$

式中: $\alpha_{e,K}$ 是 Jacobi 矩阵 $(\partial/\partial \mathbf{U})\mathbf{F}(U_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,K}$ 在边界上最大特征值的估计。式(3)中的积分用下面的数值积分代替

$$\int_e h_{e,K}(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Gamma \approx \sum_{l=1}^L \omega_l h_{e,K}(\mathbf{X}_{el}, t) v_h(\mathbf{X}_{el}) |e| \quad (5)$$

$$\int_K \mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}) d\Omega \approx \sum_{m=1}^M \underline{\omega}_m \mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}_{Km}, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}_{Km}) |K| \quad (6)$$

$$\int_K \mathbf{S}(U_h(\mathbf{X}, t)) v_h(\mathbf{X}) d\Omega \approx \sum_{m=1}^M \underline{\omega}_m \mathbf{S}(U_h(\mathbf{X}_{Km}, t)) v_h(\mathbf{X}_{Km}) |K| \quad (7)$$

将式(5)~(7)代入式(3), 最后得到弱表达式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K U_h(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Omega + \sum_{e \in \partial K} \sum_{l=1}^L \omega_l h_{e,K}(\mathbf{X}_{el}, t) v_h(\mathbf{X}_{el}) |e| - \sum_{m=1}^M \underline{\omega}_m \mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}_{Km}, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}_{Km}) |K| = \\ \sum_{m=1}^M \underline{\omega}_m \mathbf{S}(U_h(\mathbf{X}_{Km}, t)) v_h(\mathbf{X}_{Km}) |K| \end{aligned} \quad (8)$$

为了方便计算, 在单元 K 中取正交基函数(如勒让得多项式) $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_J\}$, 则质量矩阵成为分块对角矩阵, 故有限元解可以表示为

$$U_h(\mathbf{X}, t) = \sum_j U_j(t) \phi_j(\mathbf{X}) \quad (9)$$

在式(8)中令 $v_h = \phi_i$, 得

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial U_j}{\partial t} \int_K \phi_j(\mathbf{X}) \phi_i(\mathbf{X}) d\Omega + \sum_{e \in \partial K} \sum_{l=1}^L \omega_l h_{e,K}(\mathbf{X}_{el}, t) \phi_i(\mathbf{X}_{el}) |e| - \sum_{m=1}^M \underline{\omega}_m \mathbf{f}(U_h(\mathbf{X}_{Km}, t)) \cdot \nabla \phi_i |K| = \\ \sum_{m=1}^M \underline{\omega}_m \mathbf{S}(U_h(\mathbf{X}_{Km}, t)) \phi_i |K| \end{aligned} \quad (10)$$

设 \mathbf{M}_K 为单元 K 的质量矩阵, 则 $\forall v_h \in V_h, \forall K \in \Gamma_h$, 方程(10)可写成 ODEs 形式

$$\mathbf{M}_K dU_h(t)/dt = L_h(U_h(t), \gamma_h) \quad (11)$$

2.3 Runge-Kutta 时间离散

对上面所得到的 ODEs 形式, 采用二阶 Runge-Kutta 时间离散形式, 具体步骤如下。

(1) 令 $U_h^0 = P_{V_h}(U_0)$, P_{V_h} 为 L_2 投影算子。

(2) 对 $n=0, \dots, N-1$, 计算 U_h^{n+1} 。首先, 令 $U_h^n = U_h^n$; 其次, 对 $i=1, \dots, k+1$, 计算中间函数

$$U_h^{(i)} = \left[\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} U_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(U_h^{(l)}, \gamma_h(t^n + d_l \Delta t^n)) \right] \quad \Delta t^n = t^{n+1} - t^n$$

最后, 令 $U_h^{(n+1)} = U_h^{(k+1)}$ 。关于 α_{il}, β_{il} 和 d_l 的具体取值可参考文献[10]。

2.4 斜率限制器

在高阶情况下,为了提高方法的稳定性,在时间方向的迭代格式中需引入局部斜率限制器,其思路是限制一阶斜率^[9],表达式为

$$\bar{m}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} a_1 & |a_1| \leq M\Delta x^2 \\ s \min |a_i| & s = \text{sgn}(a_l) = \dots = \text{sgn}(a_m) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

对常数 M 取值的详细说明可参考文献[10]。

3 计算结果与分析

环形激波会聚问题如图 1 所示,其中 $R/r=5/4$ 。激波马赫数 Ma 分别为 2.0、3.0、4.0 和 5.0 的环形激波从环形管道中向圆柱形管道传播,初始时刻,波前气体处于静止状态,圆柱形管道的半径和环形激波的外半径相同。

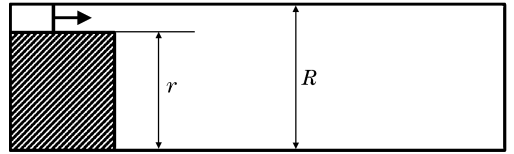


图 1 计算区域

Fig. 1 Computational domain

图 2 给出了马赫数为 4.0 的环形激波从环形管道中向圆柱形管道传播过程的密度等值线。从图 2(a)中可以看出,当激波进入圆柱形管道后,由于传播截面突然增大,激波将向中心发生绕射,绕射波在台阶拐角处产生一很强的漩涡,并且在漩涡附近出现了二次激波。此外,在环形管道出口形成的反射膨胀波几乎落在拐角处而难以向上游传播。当绕射激波到达对称轴时,激波聚焦在对称轴上,在聚焦点附近形成局部的高温高压区域,而且对称轴附近的反射激波由规则反射转变为马赫反射,见图 2(b)。激波在对称轴上发生马赫反射后,马赫杆受到激波聚焦诱发的强射流冲击作用,再次发生马赫反射,使马赫杆向前凸起呈半球面形状,并且与原马赫杆相交位置形成三波交点,激波传播区域逐渐缩小,见图 2(c)。随着时间的发展,对称轴附近的球面状马赫杆继续扩大,其前端已经超越了壁面附近的激波,其后方有一个明显的半球形接触间断及漩涡,见图 2(d),这种激波结构又被称为球面双马赫反射^[4]。这些流动特征与滕宏辉等^[4]得到的结论是一致的,表明本文的模拟结果是有效、可信的。

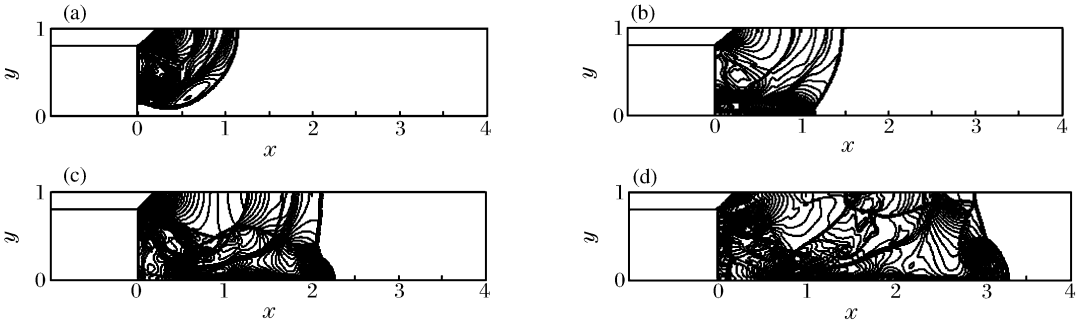


图 2 马赫数为 4.0 的环形激波流动的密度等值线

Fig. 2 Density contours of toroidal shock waves for $Ma=4.0$

图 3 给出了马赫数分别为 2.0、3.0、4.0 和 5.0 时,激波在对称轴上聚焦后的密度等值线。从图中可以看出,马赫数为 2.0 时,绕射激波经对称轴聚焦以后,其波前很快趋向于平面,并未出现球面双马赫反射;随着马赫数的升高,逐渐开始出现球面双马赫反射,半球形马赫杆弧线越来越长,波后漩涡的尺寸逐渐增大,而且对波前的扰动效果也更明显。

图 4(a)给出了马赫数为 5.0 的环形激波在整个流动过程中轴线上各点所能达到的最大压力曲线。图中 p/p_0 代表轴线各点最大压力 p 与波前压力 p_0 的比,实线和点线分别代表间断有限元方法和二阶 DCD 格式^[4]的计算结果。从图中可以看出,除了后台阶到聚焦点附近区域外,二者符合较好。二者的主要差别在于采用间断有限元方法得到的 2 个有效聚焦点的 p/p_0 分别为 304.6 和 266.4,采用 DCD 方法得到的 2 个有效聚焦点的 p/p_0 分别为 228 和 178。滕宏辉等^[2]在相同的计算模型下对该类问题进行模拟时指出,马赫数为 4.8 的环形激波在聚焦过程中 2 个有效聚焦点的 p/p_0 分别为 290.4 和 208.6。同时,滕宏辉等^[4]指出,在其他条件相同的情况下,马赫数的提高可以使聚焦压力以更高的比例提高,但计算得到的 2 个有效聚焦点的压力值偏低。由此可知,本文中采用间断有限元方法得到的 2 个有效聚焦点的压力值是值得信赖的。

图 4(b)给出了马赫数分别为 2.0、3.0、4.0 和 5.0 的环形激波在聚焦后某一时刻轴线各点压力变化曲线,从图中可以看出,在聚焦点附近,压力变化梯度很大,表明该方法对间断解具有很强的捕捉能力。图 4(c)和 4(d)分别给出了在整

个流动过程中轴线各点所能达到的最大压力和最大温度的分布曲线。从图中可以看出,轴对称流动的压力和温度的最大值是一个极值点,这一点两侧的压力和温度以较大的梯度增加和衰减。此外,当马赫数大于等于 3.0 时,在后台阶面上还观察到了另一个极值点,而且马赫数越高,激波会聚时产生的压力越大。这些结果可以为实际的工程应用提供理论参考。

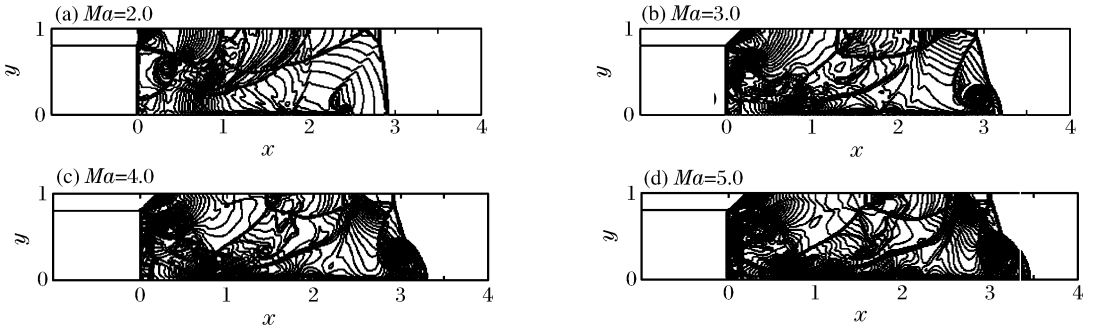


图 3 不同马赫数下环形激波流动的密度等值线

Fig. 3 Density contours of toroidal shock waves for $Ma=2.0, 3.0, 4.0, 5.0$

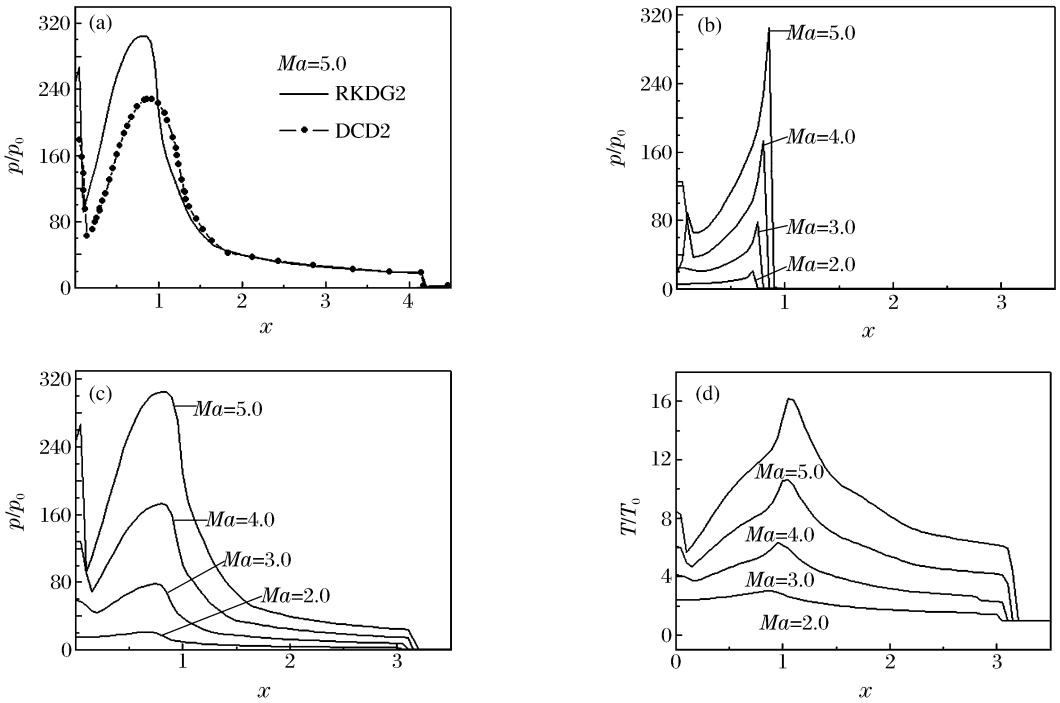


图 4 轴线上各点压力和温度分布曲线

Fig. 4 Distributions of pressure and temperature along the axis

4 结 论

本文将二维间断有限元方法发展到轴对称 Euler 方程组的数值求解,并对环形激波在圆柱形激波管内绕射、反射和聚焦流场进行了数值模拟。模拟结果表明,该方法不仅能够较准确地捕捉到激波会聚过程中轴线上不同点的最大压力,而且在聚焦点不会产生振荡或抹平间断现象。该方法具有较高的分辨率,在激波聚焦流场的数值模拟中具有广阔的应用前景,值得进一步深入研究。

参考文献:

[1] Takayama K, Saito T. Shock wave/geophysical and medicine applications[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2004, 36: 347-379.

- [2] 滕宏辉, 姜宗林. 环形激波和爆轰波会聚过程的气体动力学特性[J]. 中国科学:G, 2006, 36(2):189-198.
- [3] Hosseini S H R, Takayama K. Study of shock wave focusing and reflection over symmetrical axis of a compact vertical co-axial diaphragmless shock tube[C]//Proceedings of ISSW23, 2001:1550-1557.
- [4] 滕宏辉, 姜宗林, 韩肇元. 环形激波绕射、反射和聚焦的数值模拟研究[J]. 力学学报, 2004, 36(1):9-15.
TENG Hong-hui, JIANG Zong-lin, HAN Zhao-yuan. Numerical investigation of diffraction, focusing and reflection of toroidal shock waves[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(1):9-15.
- [5] 滕宏辉, 张德良, 李辉煌, 等. 用环形激波聚焦实现爆轰波直接起爆的数值模拟[J]. 爆炸与冲击, 2005, 25(6):512-518.
TENG Hong-hui, ZHANG De-liang, LI Hui-huang, et al. Numerical investigation of diffraction direct initiation induced by toroidal shock wave focusing[J]. Explosion and Shock Waves, 2005, 25(6):512-518.
- [6] Liang S M, Wu L N, Hsu R L. Numerical investigation of axisymmetric shock wave focusing over paraboloidal reflectors[J]. Shock Waves, 1999, 9:367-379.
- [7] Cockburn B, Shu C W. The Runge-Kutta local projection P1-discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation law[J]. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1991, 337:337-361.
- [8] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II: General framework[J]. Mathematics of Computational, 1989, 52:411-435.
- [9] Cockburn B, Lin S Y, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. III: One-dimensional systems[J]. Journal of Computational Physics, 1989, 84: 90-113.
- [10] Cockburn B, Hou S C, Shu C W. TVB Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV: The multidimensional case[J]. Journal of Computational Physics, 1990, 54:545-581.
- [11] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws. V: Multidimensional systems[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 144:199-224.

Diffraction, reflection and focusing of toroidal shock waves

CHEN Er-yun^{1*}, MA Da-wei¹, LE Gui-gao¹, ZHAO Gai-ping², ZHU Sun-ke¹

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing 210094, Jiangsu, China;

2. School of Medical Instrument, Shanghai University of Science and Technology,
Shanghai 200093, China)

Abstract: A numerical simulation of the toroidal shock wave motion in a cylindrical shock tube was carried out using the discontinuous finite element method, which was developed to solve the axisymmetric Euler equations based on two-dimensional conservation laws. The computed results show the complicated flow field, which is formed by shock propagating in the cylindrical shock tube, can be captured efficiently using the discontinuous finite element method. The numerical solutions with steep gradients near the focusing point indicate the discontinuous finite element method has high resolution and there can not lie numerical oscillation and artificial viscosity near the discontinuous point.

Key words: mechanics of explosion; shock diffraction; discontinuous finite element method; toroidal shock wave; focusing; reflection

* Corresponding author: CHEN Er-yun

E-mail address: ce_y168@yahoo.com.cn