

文章编号: 1001-1455(2009)02-0189-05

# 弹性空腔膨胀中边界条件的转换方法\*

唐 廷, 王明洋, 赵跃堂

(解放军理工大学工程兵工程学院, 江苏 南京 210007)

**摘要:** 以弹性空腔膨胀为研究对象, 利用速度和应力 2 种边界条件下运动场势函数相等的原理, 运用 Laplace 变换及其卷积定理, 得到了两种边界条件的相互转换关系, 建立了球面波运动场中速度场与应力场的转换关系。以双指数应力时程和正弦指数衰减速度时程为例, 研究了球面波运动场转换的特点。结果表明, 球面波上的应力和速度之间不是简单的线性关系, 与平面波相比, 球面波上的质点速度较小。而影响这种差异大小的主要因素是波的传播距离和介质中波的传播速度, 波传播距离越近, 传播速度越快, 这种差异越大。

**关键词:** 爆炸力学; 边界条件; Laplace 变换; 空腔膨胀; 地下爆炸

**中图分类号:** O382.1; TD235

**国标学科代码:** 135 · 3520

**文献标志码:** A

## 1 引 言

在研究球形装药地下爆炸产生的爆炸地震效应时, 根据等效荷载理论可将整个非弹性变形区看成引起弹性区震动的震动源<sup>[1]</sup>, 把地下爆炸简化为一个弹性空腔内的膨胀问题, 在此基础上可进行地震效应的理论、数值和试验研究。在进行有限元数值分析时, 因为速度加载是施加在节点上的矢量, 在球腔内要进行 3 个方向上的加载, 且各个方向上的值不一样; 而压力加载直接施加在单元上, 只有法向 1 个方向, 比速度加载简单得多, 所以把速度加载转换为压力加载可降低研究难度。在岩石介质的地下爆炸试验研究过程中, 因为岩石界面上的不平整性, 压力传感器测量的应力场数据误差较大, 而由粒子速度测量数据转换得到的应力峰值误差远小于应力直接测量的误差<sup>[2]</sup>, 大部分的试验研究以测量速度场为主<sup>[3-4]</sup>, 再利用应力与速度之间的转换关系得到相对准确的应力场数据。

在经典的弹性波理论中, 应力场和速度场存在简单的线性转换关系,  $\sigma = \rho c_p v$ , 其中  $\sigma$  是应力,  $\rho$  是介质密度,  $c_p$  是纵波的传播速度,  $v$  是粒子运动速度。但这种关系的成立建立在一维平面波的假设上, 对于球面波, 应力场与速度场之间则有更复杂的关系。通常的处理方法均依赖于复杂的计算, 且缺乏通用性, 建立通用的球面波运动场中质点与速度转换关系式对地下爆炸的地震效应研究有重要的意义。本文中拟对速度场和应力场之间的联系进行讨论, 以期得到二者的相互转换公式。

## 2 基本理论

如图 1 所示, 根据爆炸等效荷载理论和空腔膨胀理论<sup>[5]</sup>, 地下爆炸的爆炸源等效为一个半径为  $R_0$  的空腔。图 1 中  $\lambda, \mu$  表示周围介质的 Lamé 常数,  $\rho$  表示密度,  $\nu$  表示泊松比; 纵波速度  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ , 横波速度  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ ;  $f(t)$  代表用速度表示的膨胀荷载,  $g(t)$  代表用压力表示的膨胀荷载。

### 2.1 应力时程边界条件

设球腔上的边界条件用应力时程表示为

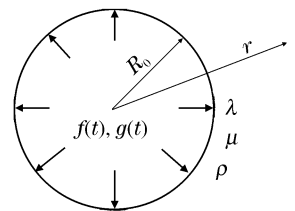


图 1 弹性介质中的空腔膨胀

Fig. 1 Expansion of a spherical cavity in elastic medium

\* 收稿日期: 2007-11-30; 修回日期: 2008-05-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(50878208); 国家杰出青年科学基金项目(50825403)

作者简介: 唐 廷(1980—), 男, 博士, 工程师。

$$\sigma(t) \Big|_{r=R_0} = g(t) \quad t \geq 0 \quad (1)$$

在式(1)的边界条件和零初始条件下,径向位移的势函数在球坐标系下可以表示为<sup>[6]</sup>

$$\varphi(r, \xi) = -\frac{R_0}{\rho} \frac{1}{\beta} \frac{1}{r} \int_0^\xi g(\xi - \tau) e^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau) d\tau \quad (2)$$

式中:  $\xi = t - \frac{r-R_0}{c_p}$ ,  $\alpha = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{c_p}{R_0}$ ,  $\beta^2 = \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \frac{c_p^2}{R_0^2}$ 。

## 2.2 速度时程边界条件

设球腔上的边界条件用速度时程表示为

$$v(t) \Big|_{r=R_0} = f(t) \quad t \geq 0 \quad (3)$$

在式(3)的边界条件和零初始条件下,径向位移的势函数在球坐标系下可表示为<sup>[7]</sup>

$$\varphi(r, \xi) = -\frac{R_0^2}{r} \int_0^\xi f(\xi - \tau) (1 - e^{-\tau c_p/R_0}) d\tau \quad (4)$$

## 2.3 条件转换

作为同一爆炸源,采用速度边界或应力边界输入在相同的空间内具有相同的运动特征,所以令式(2)和式(4)的右边相等,有

$$-\frac{R_0}{\rho} \frac{1}{\beta} \frac{1}{r} \int_0^\xi g(\xi - \tau) e^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau) d\tau = -\frac{R_0^2}{r} \int_0^\xi f(\xi - \tau) (1 - e^{-\tau c_p/R_0}) d\tau \quad (5)$$

进行化简,可得

$$\int_0^\xi g(\xi - \tau) e^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau) d\tau = \rho\beta R_0 \int_0^\xi f(\xi - \tau) (1 - e^{-\tau c_p/R_0}) d\tau \quad (6)$$

式(6)两边均为卷积的形式,分别进行 Laplace 变换,有

$$L(g(\xi))L(e^{-\alpha\xi} \sin(\beta\xi)) = \rho\beta R_0 L(f(\xi))(1 - e^{-\xi c_p/R_0}) \quad (7)$$

式中:L 代表 Laplace 变换。根据 Laplace 变换的定义,可得到

$$L(e^{-\alpha\xi} \sin(\beta\xi)) = \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (8)$$

$$L(1 - e^{-\xi c_p/R_0}) = \frac{1}{p} - \frac{R_0}{pR_0 + c_p} = \frac{c_p}{p(pR_0 + c_p)} \quad (9)$$

式中:p 为复参变量,再把式(8)和式(9)代入式(7),化简后有

$$L(f(\xi)) = \frac{p(pR_0 + c_p)}{((p + \alpha)^2 + \beta^2)\rho R_0 c_p} L(g(\xi)) \quad (10)$$

又设

$$L(h_1(\xi)) = \frac{p(pR_0 + c_p)}{((p + \alpha)^2 + \beta^2)\rho R_0 c_p} \quad (11)$$

则式(11)的原函数为

$$h_1(\xi) = \frac{1}{\rho R_0 c_p} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{p(pR_0 + c_p)}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} e^{p\xi} dp \quad (12)$$

运用留数定理进行计算有<sup>[8]</sup>

$$h_1(\xi) = \frac{1}{\rho c_p R_0 \beta} \{R_0 \text{Dirac}(\xi)\beta - [(R_0\beta^2 + \alpha c_p - R_0\alpha^2) \sin(\beta\xi) + \beta(2R_0\alpha - c_p) \cos(\beta\xi)] e^{-\alpha\xi}\}$$

化简后为

$$h_1(\xi) = \frac{\text{Dirac}(\xi)}{\alpha_p} - \frac{A \sin(\beta\xi + B)}{\rho c_p R_0 \beta} e^{-\alpha\xi} \quad (13)$$

式中:  $A = \sqrt{(R_0\alpha^2 - \alpha c_p - R_0\beta^2)^2 + \beta^2(c_p - 2R_0\alpha)^2} = \frac{2}{R_0\rho} \sqrt{\mu(\lambda + 2\mu)}$ ,

$$B = \arctan\left(\frac{\beta(c_p - 2R_0\alpha)}{R_0\alpha^2 - \alpha c_p - R_0\beta^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\mu - \lambda}{2\mu + 3\lambda} \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\mu}}\right)$$

设 
$$h_2(\xi) = \frac{A \sin(\beta\xi + B)}{\rho c_p R_0 \beta} e^{-\alpha\xi} \tag{14}$$

根据卷积定理,有

$$f(t) = \frac{g(t)}{\rho c_p} - \int_0^t h_2(t - \tau) g(\tau) d\tau \tag{15}$$

由式(13)~(14)即可完成应力边界条件到速度边界条件的转换。同理也可以得到由速度边界条件到应力边界条件的转换

$$L(g(\xi)) = \frac{((p + \alpha)^2 + \beta^2) \rho R_0 c_p L(f(\xi))}{p(pR_0 + c_p)} \tag{16}$$

设

$$h_3(\xi) = \rho R_0 c_p \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(p + \alpha)^2 + \beta^2}{p(pR_0 + c_p)} e^{p\xi} dp =$$

$$\rho c_p \text{Dirac}(\xi) - \rho \left( \frac{c_p^2}{R_0} + R_0 \beta^2 - 2\alpha c_p + R_0 \alpha^2 \right) e^{-c_p \xi / R_0} + \rho R_0 (\alpha^2 + \beta^2) =$$

$$\rho c_p \text{Dirac}(\xi) - \frac{\rho c_p^2}{R_0} e^{-c_p \xi / R_0} + \frac{4\rho c_s^2}{R_0^2} \tag{17}$$

$$h_4(\xi) = -\frac{c_p^2}{R_0} e^{-c_p \xi / R_0} + \frac{4c_s^2}{R_0^2} \tag{18}$$

根据卷积定理,有 
$$g(t) = \rho c_p f(t) + \int_0^t h_4(t - \tau) f(\tau) d\tau \tag{19}$$

### 3 计算比较

下面是一些典型荷载之间的转换,计算参数为:空腔半径  $R_0 = 1.265 \text{ m}$ ,介质密度  $\rho = 2.7 \text{ t/m}^3$ ,泊松比  $\nu = 0.25$ ,纵波速度  $c_p = 4.500 \text{ km/s}$ ,横波速度  $c_s = 2.598 \text{ km/s}$ 。

#### 3.1 双指数应力边界条件

取应力边界条件为双指数函数和形式,双指数函数<sup>[9]</sup>的数学表达式如下

$$g(t) = k p_0 (e^{-at} - e^{-bt}) \tag{20}$$

式中: $k$ 为峰值修正因数, $p_0$ 为脉冲峰值, $a$ 和 $b$ 的值影响脉冲峰值、前沿、半宽等参数,取 $a = 1\ 279, b = 12\ 792, k = 1.435$ 时,可以得到一个升压时间为 $2 \times 10^{-4} \text{ s}$ 、峰值压力为 $100 \text{ MPa}$ 的脉冲荷载。

将以上参数代入式(20)得

$$g(t) = 1.435 \times 10^8 (e^{-1\ 279t} - e^{-12\ 792t}) \tag{21}$$

式中: $g(t)$ 的单位为 $\text{MPa}$ , $t$ 的单位为 $\text{s}$ 。式(21)表示的脉冲荷载波形如图 2 所示。

再把式(21)代入式(15)可得速度边界条件为

$$f(t) = 2.766e^{-1\ 279t} + 11.64e^{-12\ 792t} - 15.34\sin(3\ 354t + 1.22)e^{-2\ 372t} \tag{22}$$

式中: $f(t)$ 的单位为 $\text{m/s}$ , $t$ 的单位为 $\text{s}$ 。式(22)表示的脉冲荷载波形见图 3。由图 2~3 可以看出,速度

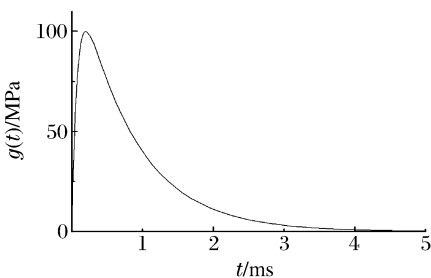


图 2 双指数衰减的压力边界条件

Fig. 2 Boundary conditions for a double-exponential decay of stress

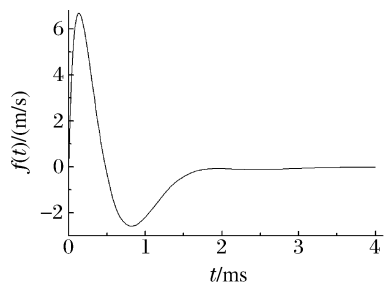


图 3 压力边界条件对应的速度边界条件

Fig. 3 Boundary conditions of velocity corresponding to boundary conditions of stress

条件的升压时间小于应力条件的升压时间,与平面波阵面上的关系式  $\sigma = \rho c_p v$  相比,球面波阵面上的最大质点速度小约 30%。

### 3.2 正弦指数衰减速度边界条件

正弦指数衰减速度边界条件的表达式为

$$f(t) = v_0 e^{-ct} \sin(\omega t) \quad (23)$$

式中:  $v_0$  为速度量纲常数,  $c$  为衰减因数,  $\omega$  为振动频率。取  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ ,  $c = 1\,600$ ,  $\omega = 5\,000$ , 有

$$f(t) = 10e^{-1\,600t} \sin(5\,000t) \quad (24)$$

式中:  $f(t)$  的单位为  $\text{m/s}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ 。式(24)表示的图形如图 4 所示。

把式(23)代入式(19)可以得到

$$g(t) = 5.87 \times 10^7 e^{-1\,600t} \sin(5\,000t) - 2.96 \times 10^7 e^{-1\,600t} \cos(5\,000t) - 7.5 \times 10^7 e^{-3\,557t} + 10.5 \times 10^7 \quad (25)$$

式中:  $g(t)$  的单位为  $\text{MPa}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ 。图 5 为式(25)的计算结果,从中可以看出,对应于正弦指数衰减的速度边界条件,其应力的波动周期与速度波动周期相等。随着时间的发展,应力趋于一极限值,考虑到爆炸近区的特点,可以理解为残余应力。与平面波相比,相同速度的情况下球面波上的应力较大。从式(18)可以看出,传播距离  $R_0$  和介质中的应力波传播速度是影响差异大小的主要因素。传播的距离  $R_0$  越大,差异越小,当  $R_0 \rightarrow \infty$  时,即简化为平面波。波速越快,差异越大。

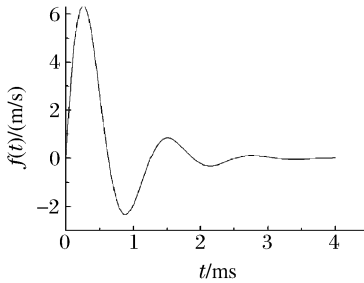


图 4 正弦指数衰减的速度边界条件

Fig. 4 Boundary conditions for a sine exponential decay of velocity

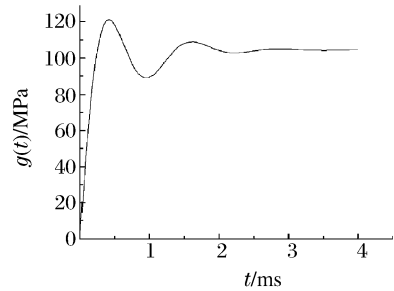


图 5 速度边界条件对应的压力边界条件

Fig. 5 Boundary conditions of stress corresponding to boundary conditions of velocity

## 4 结 论

利用 Laplace 变换得到了弹性球面波运动场中速度与应力的转换关系式:(1)应力边界条件到速度边界条件的转化关系式,  $f(t) = g(t)/(\rho c_p) - \int_0^t h_2(t-\tau)g(\tau)d\tau$ ; (2)速度边界条件到应力边界条件的转化关系式,  $g(t) = \rho c_p f(t) + \int_0^t h_4(t-\tau)f(\tau)d\tau$ 。相对于平面波运动场中  $\sigma = \rho c_p v$  关系,在球面波运动场中速度与应力关系更复杂;与平面波相比,球面波运动场中速度场的幅值较小,传播距离和介质中的应力波传播速度是影响差异大小的主要因素。波传播距离越小,传播速度越大,差异越大。

## 参考文献:

- [1] 丁桦,郑哲敏. 爆破震动等效载荷模型[J]. 中国科学: E, 2003, 33(1): 82-90.  
DING Hua, ZHENG Zhe-min. Model of equivalent loading for blasting vibration[J]. Science in China: E, 2003, 33(1): 82-90.
- [2] 王占江,李孝兰,戈琳,等. 花岗岩中化爆的自由场应力波传播规律分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(11): 1827-1831.  
WANG Zhang-jiang, LI Xiao-lan, GE Lin, et al. Free-field stress wave propagation induced by underground chemical explosion in granite[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(11): 1827-1831.

- [3] 李新平, 张成良, 陈先仿, 等. 复杂地下洞室群爆破地震波传播的现场试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24增1: 4700-4704.  
LI Xin-ping, ZHANG Cheng-liang, CHEN Xian-fang, et al. In-situ experimental study on transmission of blasting vibration wave in groups of tunnels under complicated conditions[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24suppl 1: 4700-4704.
- [4] 郭学彬, 肖正学, 张继春, 等. 论爆破地震波在传播过程中的衰减特性[J]. 中国矿业, 2006, 15(3): 51-53.  
GUO Xue-bin, XIAO Zheng-xue, ZHANG Ji-chun, et al. On attenuating characteristic of blasting seismic waves in propagating process[J]. China Mining Magazine, 2006, 15(3): 51-53.
- [5] 唐廷, 尤峰, 葛涛, 等. 爆炸荷载简化形式对弹性区应力场的影响[J]. 爆破, 2007, 24(2): 7-10.  
TANG Ting, YOU Feng, GE Tao, et al. The effects of simplified forms of explosion load to stress field of elastic zone during explosion[J]. Blasting, 2007, 24(2): 7-10.
- [6] Achenbach J D. Wave propagation in elastic solids[M]. Amsterdam, London: North Holland Publishing Company, 1973: 129-131.
- [7] Онцсько Н И, Шемякцн Е И, Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве[J]. ПМТФ, 1961, 4: 82-93.
- [8] 管平, 计国君, 黄骏. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 39-45.
- [9] 毛从光, 郭晓强, 周辉, 等. 高空核电磁脉冲模拟波形的双指数函数拟合法[J]. 强激光与粒子束, 2004, 16(3): 336-340.  
MAO Cong-guang, GUO Xiao-qiang, ZHOU Hui, et al. Fitting method of the simulated HEMP waveform by the double-exponential function[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2004, 16(3): 336-340.

## Transformation of boundary conditions of cavity expansion in an elastic medium

TANG Ting\*, WANG Ming-yang, ZHAO Yue-tang

(Engineering Institute, PLA University of Science and Technology,  
Nanjing 210007, Jiangsu, China)

**Abstract:** Taking cavity expansion in an elastic medium as the object of study, using the theory that movement fields on the boundary conditions of velocity and stress have the same potential, applying Laplace transformation and it's convolution theorem, transformation between two boundary conditions was obtained, and transformation between velocity field and stress field of the spherical wave was got. Taking a double-exponential decay of dynamic stress and a sine exponential decay of velocity for examples, characteristics of the movement field in the spherical wave were analyzed. Results show that there does not lie a simply linear relationship between the stress and velocity in the spherical wave. Compared with the plane wave, the particle velocity in the spherical wave is smaller. Critical factors resulting in these differences are the wave propagation distance and wave velocity in media, the smaller the wave propagation distance is and the bigger wave velocity in media is, the more distinct these differences are.

**Key words:** mechanics of explosion; boundary condition; Laplace transformation; cavity expansion; underground explosion

\* Corresponding author; TANG Ting  
Telephone: 86-25-80821695

E-mail address: kublai@126.com