

文章编号: 1001-1455(2009)03-0312-06

# 动支座对拱结构抗爆承载力的影响<sup>\*</sup>

宋春明, 王明洋

(解放军理工大学工程兵工程学院, 江苏 南京 210007)

**摘要:** 建立了具有动支座拱的计算模型, 该模型考虑了竖向的弹性支承和阻尼支承、水平向弹性支承和扭转约束等柔性支承形式。基于大变形动力微分方程并利用有限差分方法, 研究了动支座拱在爆炸荷载作用下的动力响应, 并分析动支座对结构承载力的影响。研究表明: 动支座对拱的抗爆承载能力有较大影响, 不同形式的柔性支承对拱承载力的影响截然不同, 竖向弹性支承能够使爆炸荷载作用下拱的弯矩峰值减小, 并且使到达峰值的时间增加, 提高了拱的抗爆或承受瞬态荷载的能力。而水平弹性支承使拱的内力值和相对位移增大, 对结构的承载力不利。

**关键词:** 爆炸力学; 抗爆承载力; 弹性支承; 动支座; 拱; 爆炸荷载

**中图分类号:** O383.2      **国标学科代码:** 130·35      **文献标志码:** A

## 1 引言

拱是工程中常用的结构形式之一, 多数情况下的理论计算都是采用刚性支承, 相应的力学理论也比较成熟完善, 而对具有柔性支承的拱研究较少。许多工程问题都可归结为柔性支承拱结构的动力响应问题, 例如地下拱形结构, 由于支承处地基刚度较低支座发生整体位移, 引起附加惯性力, 对结构产生较大影响。完全刚性支承理论的计算结果与实际已严重不符, 必须考虑动支座对结构的影响。

具有动支座的结构在外部动荷载作用下的动力响应要比刚性支承结构复杂得多, 主要是支座位移引起附加惯性力的影响。对弹性支承梁动力响应的研究表明, 弹性支承不仅影响梁的受力和变形, 而且会改变梁的振动频率。与刚性支承相比, 支承的弹性效应会降低梁的自振频率, 并且使梁在动载作用下的动力系数减小<sup>[1]</sup>。特别是在短作用时间动荷载作用下, 端部的弹性和阻尼支承能够提高有效梁结构的抗力<sup>[2]</sup>。对动支座拱的研究较少, 主要集中在弹性支承拱的内力分析<sup>[3]</sup>和稳定性分析方面<sup>[4-5]</sup>, 因此有必要研究动支座对拱结构抗爆承载力的影响, 这不仅具有重要的理论价值, 而且对提高防护结构的抗爆能力具有实际意义, 为动支座在工程中的应用提供理论依据。

本文中拟建立考虑具有动支座拱的力学模型, 利用有限差分方法离散控制方程, 对爆炸荷载作用下拱的动力响应进行研究, 分析不同形式的动支座对结构承载力的影响, 找出提高拱结构抗爆能力的方法。

## 2 动支座拱的计算模型

### 2.1 运动方程

图1为拱形结构的计算模型, 结构受任意分布动载  $p(s, t)$  作用, 两端柔性嵌固, 两端水平方向的弹性支承刚度分别为  $c_1, c_2$ , 两端垂直方向的弹性支承刚度为  $d_1, d_2$ , 阻尼衰减系数为  $e_1, e_2$ , 扭转约束刚度分别为  $g_1, g_2$ , 支座上刚性块的质量分别为  $m_1, m_2$ , 跨度为  $L$ , 拱高为  $f$ , 根据大变形理论, 拱的动力学方程<sup>[6]</sup>为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}(Q \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial s}(N \sin \theta) - m \ddot{w} + p \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial s}(Q \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial s}(N \cos \theta) + m \ddot{u} + p \sin \theta = 0 \\ Q = \frac{\partial M}{\partial s} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\theta$  为横截面与  $Oz$  轴的夹角, 由截面方向逆时针转到  $z$  轴为正,  $m$  为拱的长度质量,  $u, w$  分别为微段在  $x$  和  $z$  方向的坐标值,  $p(s, t)$  为沿拱分布且与拱轴线垂直的任意载荷,  $M, N, Q$  分别为截面弯矩、轴力和剪力。

\* 收稿日期: 2008-01-19; 修回日期: 2008-03-30

作者简介: 宋春明(1979—), 男, 博士研究生。

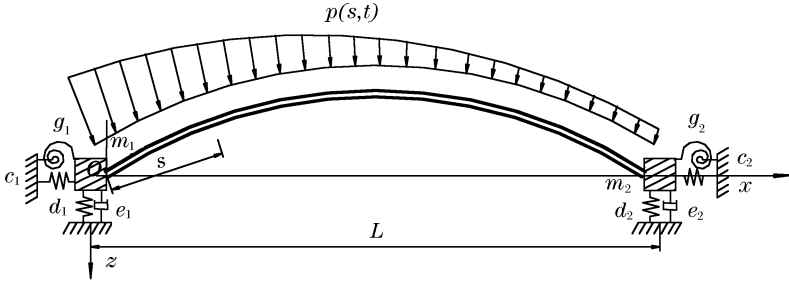


图 1 动支座拱的计算模型

Fig. 1 The mechanics model for an arch with flexible supports

利用微分的有限差分来求解运动方程,将拱沿轴向等分为  $n$  个弧段,每个弧段的长度为  $s_0$ ,共有  $n+1$  个截面,  $k$  表示截面标注号,  $k=0,1,\dots,n$ ,弧形段的标注号与右边截面的标注号相同。变形以后,第  $k$  个弧形段的长度为  $\Delta s_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ )。对于内部微段,利用中心差分格式,当  $k=1,2,\dots,n-1$  时,离散形式的运动控制方程为

$$\begin{cases} \frac{Q_{k+1} \cos\theta_{k+1} - Q_{k-1} \cos\theta_{k-1} - N_{k+1} \sin\theta_{k+1} + N_{k-1} \sin\theta_{k-1}}{\Delta s_{k+1} + \Delta s_k} + p_k \cos\theta_k - m\ddot{w}_k = 0 \\ \frac{Q_{k+1} \sin\theta_{k+1} - Q_{k-1} \sin\theta_{k-1} + N_{k+1} \cos\theta_{k+1} - N_{k-1} \cos\theta_{k-1}}{\Delta s_{k+1} + \Delta s_k} + p_k \sin\theta_k + m\ddot{u}_k = 0 \\ Q_k = \frac{M_{k+1} - M_{k-1}}{\Delta s_{k+1} + \Delta s_k}, \quad Q_0 = \frac{M_1 - M_0}{\Delta s_1}, \quad Q_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{\Delta s_n} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $k$  代表截面的位置,  $p_k$  为  $k$  截面外部荷载的大小。

根据拱两端动支座力的平衡可以得到边界条件,然后将边界条件离散。

$Ox$  方向边界条件为

$$\begin{cases} N_0 \cos\theta_0 + Q_0 \sin\theta_0 + c_1(u_0 - X_0) + m_1\ddot{u}_0 = 0 \\ N_n \cos\theta_n + Q_n \sin\theta_n - c_2(u_n - X_n) - m_2\ddot{u}_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $X_0, X_n$  分别为拱两端点在  $Ox$  方向的初始坐标。

$Oz$  方向边界条件为

$$\begin{cases} Q_0 \cos\theta_0 - N_0 \sin\theta_0 = m_1\ddot{w}_0 + d_1(\omega_0 - Z_0) + e_1\dot{\omega}_0 \\ -Q_n \cos\theta_n + N_n \sin\theta_n = m_2\ddot{w}_n + d_2(\omega_n - Z_n) + e_2\dot{\omega}_n \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $Z_0, Z_n$  分别为拱两端点在  $Oz$  方向的初始坐标。

当拱两端集中质量满足  $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$  时,利用式(3)、(4)对时间离散后得到边界结点的递推公式,可求得下一时刻的位移。但对于两端无集中质量的情况,递推公式就不再实用,因此有必要推导出通用的边界条件。

对于左端标号为 1 的微段,有

$$\frac{Q_1 \cos\theta_1 - Q_0 \cos\theta_0 - N_1 \sin\theta_1 + N_0 \sin\theta_0}{\Delta s_1} + p_0 \cos\theta_0 - m\ddot{w}_0 = 0 \quad (5)$$

由式(5)结合式(4)中的第 1 个方程,可以得到

$$(m_1 + m\Delta s_1)\ddot{w}_0 + e_1\dot{\omega}_0 + d_1\omega_0 - Q_1 \cos\theta_1 + N_1 \sin\theta_1 - p_0 \cos\theta_0 \Delta s_1 - d_1 Z_0 = 0 \quad (6)$$

同理,可以得到右端点横向位移的边界条件,以及  $Ox$  方向端结点的位移边界条件。

## 2.2 几何方程

根据平截面假定,横截面上任意一点的应变

$$\epsilon = \epsilon_0 + \phi y = -\frac{\partial s}{\partial s_0} - \frac{\partial \theta}{\partial s} y \quad (7)$$

式中:  $\epsilon_0$  为压应变,  $\phi$  为曲率,  $y$  为点到截面中性轴的距离。

同样对几何方程进行空间差分离散。

变形后的弧段长度

$$\Delta s_k = \sqrt{(\omega_k - \omega_{k-1})^2 + (u_k - u_{k-1})^2} \quad (8)$$

截面转角方程离散后为

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{u_1 - u_0}\right), \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{u_n - u_{n-1}}\right), \quad \theta_k = \arctan\left(\frac{\omega_{k+1} - \omega_{k-1}}{u_{k+1} - u_{k-1}}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

应变方程为

$$\epsilon_0(0) = -\frac{\Delta s_1 - s_0}{s_0}, \quad \epsilon_0(n) = -\frac{\Delta s_n - s_0}{s_0}, \quad \epsilon_0(k) = -\frac{(\Delta s_{k+1} - s_0) + (\Delta s_k - s_0)}{2s_0} \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (10)$$

曲率方程为

$$\begin{cases} \phi_k = -\frac{(\theta_{k+1} - \Theta_{k+1}) - (\theta_{k-1} - \Theta_{k-1})}{\Delta s_k + \Delta s_{k+1}} & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \phi_0 = -\frac{(\theta_1 - \Theta_1) - (\theta_0 - \Theta_0)}{\Delta s_1}, \quad \phi_n = -\frac{(\theta_n - \Theta_n) - (\theta_{n-1} - \Theta_{n-1})}{\Delta s_n} \end{cases} \quad (11)$$

式中:  $\Theta_k$  为拱各截面的初始角度。

将截面沿高度方向等分为  $q$  层, 用  $j$  表示层号, 则  $-\frac{q}{2} \leq j \leq \frac{q}{2}$ , 离散后任一点的应变

$$\epsilon_{kj} = \epsilon_0(k) + \phi_k y_j \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

弯矩  $M$  和轴力  $N$  的离散求解形式为

$$M_k = \frac{bh}{q} \sum_{j=-q/2}^{q/2} \sigma_{kj} y_k, \quad N_k = \frac{bh}{q} \sum_{j=-q/2}^{q/2} \sigma_{kj} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

### 2.3 数值计算过程

由式(2)求得中间节点的加速度  $\ddot{w}_k$ 、 $\ddot{u}_k$ , 并利用 2 阶中心差分法, 可求得下一时步的位移

$$\begin{cases} w_k^{i+1} = \ddot{w}_k (\Delta t)^2 + 2w_k^i - w_k^{i-1} \\ u_k^{i+1} = \ddot{u}_k (\Delta t)^2 + 2u_k^i - u_k^{i-1} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (14)$$

式中:  $\Delta t$  为数值计算的时间步长,  $i$  表示不同的时间点,  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ 。

对于边界结点, 由边界条件并利用 2 阶中心差分格式和 1 阶中心差分格式, 可求得下一时步的位移。例如左端边界结点的横向位移

$$w_0^{i+1} = \frac{Q_1 \cos \theta_1 - N_1 \sin \theta_1 + p_0 \Delta s_1 \cos \theta_0 - d_1 w_0^i + d_1 Z_0 + (m_1 + m \Delta s_1)(2w_0^i - w_0^{i-1})/\Delta t^2 + e_1 w_0^{i-1}/(2\Delta t)}{(m_1 + m \Delta s_1)/\Delta t^2 + e_1/(2\Delta t)} \quad (15)$$

为保证数值计算的收敛并具有足够的精度, 梯步  $\Delta t$  应满足<sup>[7]</sup>

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\sqrt{E/\rho}} \quad (16)$$

根据上面的公式, 通过计算程序可以求解整个运动过程。由  $i$  时刻位移  $u_k^i$ 、 $w_k^i$  求得  $\Delta s_k^i$ 、 $\epsilon_0^i(k)$ 、 $\theta_k^i$ 、 $\phi_k^i$ 、 $\epsilon_{kj}^i$ , 接着求得应变增量  $\Delta \epsilon_{kj}^i$ 、应力增量  $\Delta \sigma_{kj}^i$ , 计算截面内力  $N_k^i$ 、 $M_k^i$ 、 $Q_k^i$ , 由平衡条件计算各节点加速度  $\ddot{u}_k^i$ 、 $\ddot{w}_k^i$ , 可计算出下一时刻的位移  $u_k^{i+1}$ 、 $w_k^{i+1}$ 。如此重复进行, 可求出拱的响应历史。

### 3 算例及分析

通过算例分析研究动支座对拱形结构抗爆承载力的影响, 为工程中提高防护结构的防爆能力提供理论依据。

拱的跨度  $L=9$  m, 拱高  $h_1=1.25$  m, 两端点连线与水平轴的夹角  $\varphi=0$ , 横截面宽度  $b=1$  m, 高度  $h_2=0.3$  m; 材料密度  $\rho=2.5$  g/cm<sup>3</sup>, 采用理想弹塑材料模型, 弹性模量  $E=524$  MPa, 屈服强度  $\sigma_y=17.2$  MPa。

令拱截面相对于端支座的横向位移为  $x'$ , 有  $x'(k) = w_k - w_0$ 。假定爆炸荷载为突加的短时三角形荷载, 沿拱表面均匀分布, 其数学表达式为

$$p = \begin{cases} p_0(1 - t/t_0) & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $t_0$  为荷载作用时间,  $p_0$  为荷载的峰值。

取荷载作用时间  $t_0=0.05$  s, 作用时间较短, 峰值  $p_0=30$  kN, 计算时取拱轴向微段数为 40, 高度方向截面数为 6, 时间步长  $\Delta t=0.5$   $\mu$ s。

端部仅有竖向弹性支承时, 弹性支承系数  $d_1=d_2=d$ , 分别取  $d=4, 8$  MN/m 和简支( $d=\infty$ ) 3 种情况。图 2 和图 3 是弹性支承拱在爆炸动载作用下的弯矩和相对横向位移时程曲线。

从图 2 可以看出, 在短作用时间爆炸荷载作用下, 具有弹性支承拱的弯矩峰值要比相应简支拱的弯矩峰值小, 当支承刚度由简支变化为  $d=8, 4$  MN/m 时, 弯矩峰值相应地会减小, 说明随着支承刚度  $d$  的减小弯矩峰值减小。另一个显著的特点是, 弹性支承拱弯矩到达峰值的时间与简支拱相比有所增加, 而且随着支承刚度的减小增加的时间就越多。主要原因是支座位移引起的附加惯性力使动荷载减小, 使弯矩峰值和相应的动力系数减小, 同时支座运动又使到达峰值的时间增加。因此, 弹性支承能够提高结构的抗力, 但提高的效果与荷载作用时间的长短密切相关, 荷载作用时间越短提高的效果越显著。

从图 3 可以看出,弹性支承拱在  $x=L/4$  截面处相对横向位移的峰值要比简支拱小,而且随着刚度系数  $d$  的减小位移峰值减小,在  $x=L/2$  截面处的相对横向位移,弹性支承拱与简支拱位移相差不大并略微增加。同样,弹性支承的存在使横向位移到达峰值的时间增加。

通过弯矩和位移分析可知,在爆炸荷载作用下,弹性支承能够有效减小拱结构的弯矩峰值,并且支座的运动会使内力和位移到达峰值的时间增加,从而提高结构的抗力。

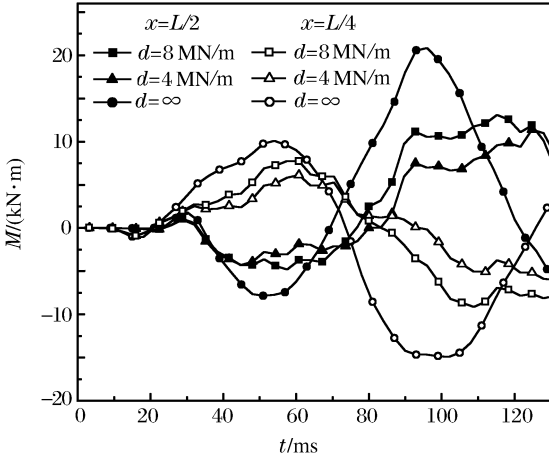


图 2 拱截面弯矩时程曲线(弹性支承)

Fig. 2 Bending moment histories of an arch with elastic supports

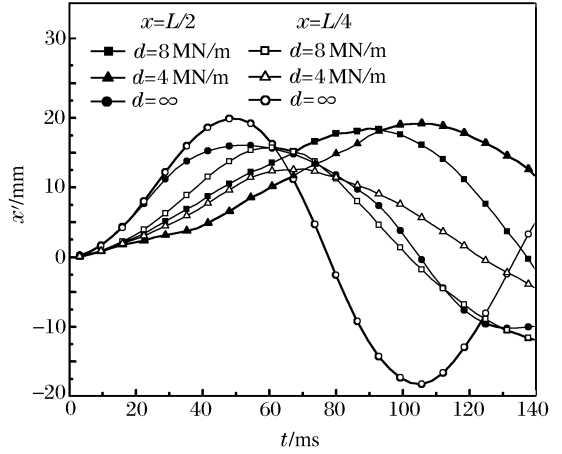


图 3 相对横向位移时程曲线(弹性支承)

Fig. 3 Transversal displacement histories of an arch with elastic supports

同时具有竖向弹性和阻尼支承的情况,取阻尼系数  $e_1=e_2=e=1 \text{ MN} \cdot \text{s}/\text{m}$ 。图 4 和图 5 是弹性和阻尼支承拱在爆炸动载作用下截面弯矩和位移的时程曲线,其中弹性支承系数  $d$  均为  $10 \text{ MN}/\text{m}$ 。

从图 4 中可以看出,在弹性支承和阻尼支承的共同作用下,拱的弯矩峰值反而比仅弹性支承时拱的弯矩峰值大,说明增加阻尼支承并不能增加使结构的内力减小的效果。还可以看出,增加阻尼支承后,弯矩到达峰值的时间与弹性支承拱的峰值时间相同,说明仅弹性支承能够改变内力峰值时间。从图 5 中可以看出,增加阻尼支承并不能使拱的位移峰值减小,也不能改变到达位移峰值的时间。

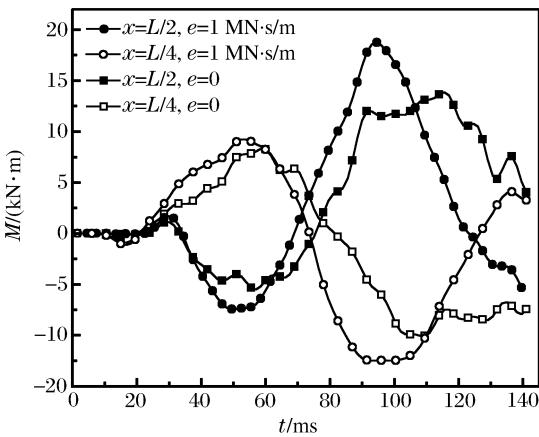


图 4 拱截面弯矩的时程曲线(弹性和阻尼支承)

Fig. 4 Bending moment histories of an arch with elastic and damping supports

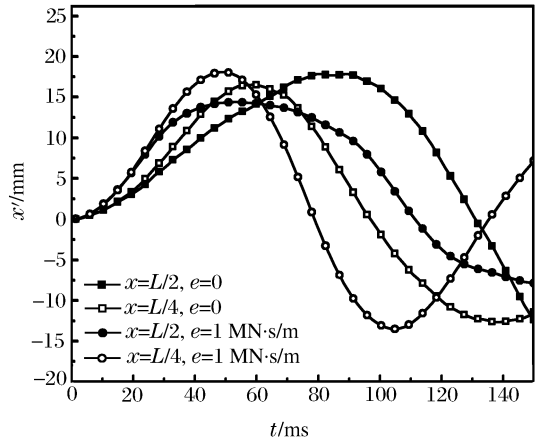


图 5 相对横向位移时程曲线(弹性和阻尼支承)

Fig. 5 Transversal displacement histories of an arch with elastic and damping supports

图 6、7 分别为拱具有水平弹性支承时拱的计算结果。从图 6 可以看出,  $c_1=c_2=c=10 \text{ MN}/\text{m}$  时,水平弹性支承拱 2 个截面的弯矩峰值都明显大于简支拱的相应的弯矩峰值,说明水平弹性支承相对降低了结构的承载力。从图 7 中可以看出,由于水平弹性支承的存在,拱在  $x=L/2、L/4$  处的横向位移最大值比简支拱的大得多。当  $c=100 \text{ MN}/\text{m}$  时,其弯矩和位移峰值介于  $c=10 \text{ MN}/\text{m}$  与简支拱之间,说明弹性支承刚度  $c$  越小,弯矩和横向位移峰值越大,对承载能力越

不利。因此,拱端弹性支承的存在(或支座水平位移)降低了拱结构的抗动载的承载能力,在拱结构施工中应注意克服这点,避免出现拱端支座的水平位移。

图 8、9 分别为拱端有扭转约束时的计算结果。图 8 为弯矩时程曲线,从图中看出,扭转约束  $g_1 = g_2 = g = 1 \text{ MN/m}$  时,拱在  $x=L/2, L/4$  处的弯矩峰值明显小于简支拱峰值,说明端部扭转约束减小了拱的弯矩值。从图 9 可看出,端部扭转约束拱在  $x=L/2$  处的横向位移峰值小于简支拱的位移峰值,但在  $x=L/4$  截面处扭转约束却使横向位移增加。

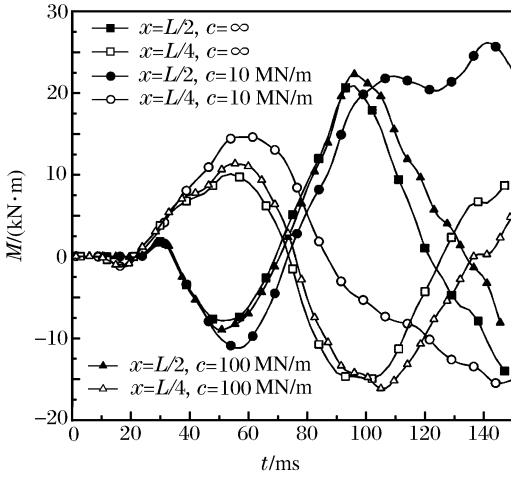


图 6 水平弹性支承时的弯矩时程曲线

Fig. 6 Bending moment histories of an arch with horizontal elastic supports

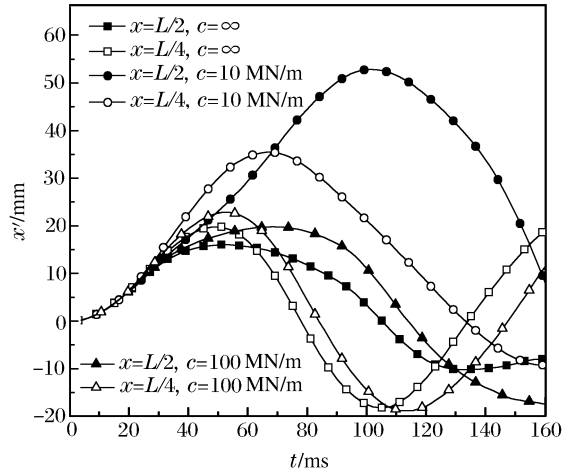


图 7 水平弹性支承时的相对位移时程曲线

Fig. 7 Transversal displacement histories of an arch with horizontal elastic supports

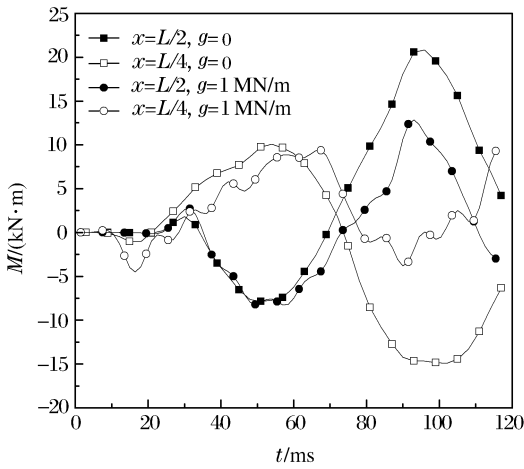


图 8 有扭转约束时的弯矩时程曲线

Fig. 8 Bending moment histories of an arch with rotatable elastic supports

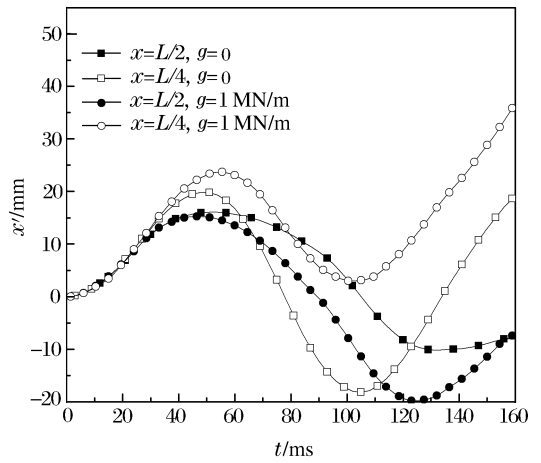


图 9 有扭转约束时的相对位移时程曲线

Fig. 9 Transversal displacement histories of an arch with rotatable elastic supports

## 4 结论

(1) 考虑动支座对拱结构抗爆承载力的影响,建立了具有柔性支承拱的计算模型,利用该模型可对爆炸载荷作用下的拱结构进行动力分析,该模型适用于复杂支承条件拱的动力计算。

(2) 竖向弹性支承能够使爆炸荷载作用下拱结构的弯矩和位移峰值减小,并且使结构到达峰值的时间增加,支承刚度  $d$  越小,弯矩和位移峰值越小,因此竖向弹性支承对抗爆拱结构承载力是有利的,在拱端设置竖向弹性支承可提高结构的抗力。有竖向弹性支承时,再增加阻尼支承并不能增强提高拱抗力的效果。

(3) 拱两端有水平弹性支承,能够使拱中的弯矩值和相对位移值增大,并且弹性支承刚度  $c$  越小,弯矩和横向位移峰值越大,对结构的承载力越不利,因此在工程中应避免出现这种情况。

(4) 端部有弹性扭转约束时,拱中的弯矩峰值与简支拱相比会减小,同样可提高结构的承载力。

## 参考文献:

- [1] 晏麓晖, 曾首义, 陈斌. 弹性支承梁动力响应分析[J]. 工程力学, 2003, 20 增刊: 381-384.  
YAN Lu-hui, ZENG Shou-yi, CHEN Bing. The dynamic responses of an elastic support beam[J]. Engineering Mechanics, 2003, 20 suppl: 381-384.
- [2] 方秦, 杜茂林. 爆炸荷载作用下弹性与阻尼支承梁的动力响应[J]. 力学与实践, 2006, 28(2): 53-56.  
FANG Qin, DU Mao-lin. Dynamic responses of an elastically supported beams with damping subjected to blast loads[J]. Mechanics in Engineering, 2006, 28(2): 53-56.
- [3] 蒋志刚. 弹性支承圆弧梁内力分析[J]. 力学与实践, 1999, 21(4): 50-53.  
JIANG Zhi-gang. Analysis of internal forces in curved beam with spring[J]. Mechanics in Engineering, 1999, 21(4): 50-53.
- [4] XU Jian-xue, HUANG Hong, ZHANG Pei-zhen, et al. Dynamic stability of shallow arch with elastic supports[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2002, 37(4-5): 909-920.
- [5] 周常蓉, 蒋志刚, 谢建军. 水平弹性支承拱的稳定分析[J]. 湖南交通科技, 2001, 27(3): 45-46.  
ZHOU Chang-rong, JIANG Zhi-gang, XIE Jian-jun. Stability analysis of horizontal elastic support arch[J]. Hunan Communication Science and Technology, 2001, 27(3): 45-46.
- [6] Hashmi S J, Al-Hassani S T S, Johnson W. Large deflection elastic-plastic response of certain structures to impulsive loads: Numerical solution and experimental results[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1972, 14(12): 843-860.
- [7] Ni C M, Lee L H N. Dynamic behavior of inelastic cylindrical shells at finite deformation[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1974, 9(3): 193-207.

## Effects of flexible supports on explosion resistant capabilities of arches

SONG Chun-ming<sup>\*</sup>, WANG Ming-yang

(Engineering Institute, PLA University of Science and Technology,  
Nanjing 210007, Jiangsu, China)

**Abstract:** The mechanics models were established for arches with flexible supports at their ends. The flexible supports include vertical elastic and damping supports, horizontal elastic supports, and rotatable elastic supports. Based on the large deformation dynamic differential equations and finite difference method, the dynamic responses of arches subjected to explosive loading were explored, and the effects of flexible supports on explosion resistant capabilities were analyzed. The analysis shows that flexible supports have great effects on explosion resistant capabilities of arches, and different supports have distinctly different influences. Vertical elastic supports can decrease the peak internal forces of arches under explosive loading, postpone the appearance times of the peak internal forces, and improve the bearing capabilities of arches to explosive or transient loading. But horizontal elastic supports can increase the peak internal forces and relative displacements of arches, and weaken the bearing capabilities of arches.

**Key words:** mechanics of explosion; bearing capability; elastic support; flexible support; arch; explosive loading

\* Corresponding author; SONG Chun-ming

E-mail address: chunming1979@163.com

Telephone: 86-25-80821045