

文章编号: 1001-1455(2009)05-0509-07

# 粘性金属中的正激波稳定性问题<sup>\*</sup>

于 明<sup>1</sup>, 刘福生<sup>2</sup>, 李英雷<sup>3</sup>

(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;

2. 西南交通大学高压物理实验室, 四川 成都 610031;

3. 中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621900)

**摘要:** G. H. Miller 等把高压金属中的粘性激波作为强间断面处理, 解析推论出: 在大粘性系数条件下小扰动激波是不稳定的, 物质粘性是导致失稳的因素。本文中针对平面正激波, 认为高压金属中的粘性激波的物理量是连续变化的, 利用线性稳定性理论, 用数值解推论出: 在有粘性条件下小扰动激波都是稳定的, 物质粘性是致稳的因素。指出 G. H. Miller 等获得错误结论的原因在于: 从无粘流动解推出的小扰动边界条件导致粘性激波小扰动增长。给出实验确定的小扰动速度梯度的边界条件, 这样既可以把粘性正激波作为强间断面处理, 也能够保证粘性正激波的稳定性。

**关键词:** 爆炸力学; 激波稳定性; 线性稳定性理论; 粘性金属; 物质粘性; 广义 Rankine-Hugoniot 条件

**中图分类号:** O382.3

**国标学科代码:** 130 · 3520

**文献标志码:** A

## 1 引 言

高温高压条件下的金属粘性对金属冲击行为的影响在近年受到越来越多的关注。目前测量金属粘性系数广泛采用小扰动激波衰减方法<sup>[1-2]</sup>, 它是测量具有一定初始形状的小扰动激波随空间的振幅衰减过程, 与理论分析结果相对照, 从而确定某压力条件下的金属粘性系数。这种小扰动激波衰减问题在流体力学中属激波稳定性问题。G. H. Miller 等<sup>[1]</sup>把高压金属中的粘性激波作为强间断面处理, 运用间断面上的广义 Rankine-Hugoniot 条件, 解析推论出: 在小雷诺数(或大粘性系数)条件下小扰动激波是不稳定的, 物质粘性是导致运动失稳的因素。理论结果<sup>[1]</sup>与众多实验观察到的结果<sup>[2]</sup>相反, 这便引出一个问题: 由理论结果<sup>[1]</sup>导出的粘性金属中小扰动激波是不稳定的结论<sup>[1]</sup>是否正确? 本文中力图解决粘性金属中的激波稳定性问题。这里主要考察平面一维的正激波, 并且仍然使用线性稳定性理论。

首先认为高压金属中的粘性激波的物理量是连续变化的来分析小扰动激波的稳定性, 这种方式被称为连续解分析法。把激波看作连续的流动时, 激波阵面没有严格的起止点, 激波上的物理量在整个区域  $-\infty < x < +\infty$  内连续分布。激波的基本流场是一个行波解, 其物理量的梯度除了在  $x \rightarrow \pm\infty$  外均不为 0。在此基本流场上叠加一个小扰动, 可得到关于扰动物理量的变系数线性常微分方程组, 它具有无穷域上的齐次边界条件。线性稳定性理论经坐标变换成为有限域上的、可由高精度有限差分格式来离散求解的特征值问题。对通常考察的关于时间模式的稳定性, 求解的特征值是复数频率。从高压金属铝中的激波小扰动分析结果看, 粘性金属中的正激波运动是稳定的, 并且物质粘性有致稳作用。

然后采用文献<sup>[1]</sup>的思路, 把高压金属中的粘性激波作为强间断面处理来分析小扰动激波的稳定性, 这种方式被称为间断解分析法。把激波看作一个强间断面, 物理量在间断面上有“突跃”。激波基本流场可以视为间断面前面是常数, 间断面后面也是常数, 该间断面以一定速度运动。在此基本流场上叠加一个小扰动, 便得到关于扰动物理量的常系数线性偏微分方程组, 其边界条件由考虑粘性应力的广义 Rankine-Hugoniot 跳跃关系式推出, 边界条件包含激波阵面本身的小扰动。文献<sup>[1]</sup>中只考虑了质量和

\* 收稿日期: 2008-04-17; 修回日期: 2008-07-26

基金项目: 中国工程物理研究院 NSAF 基金项目(10576025)

作者简介: 于 明(1971—), 男, 博士, 副研究员。

动量的间断,本文中考虑了质量、动量和总能量的间断,并且线性稳定性理论可通过 Laplace 变换求解。按文献[1]的思路:由无粘流动的解给出小扰动边界条件,再求解粘性流动方程,从解的结果可以看出激波小扰动随时间增长,从而得出粘性激波是不稳定的结论。

最后改进了间断解分析法,给出实验确定的小扰动速度梯度的边界条件,这样既可以把粘性正激波作为强间断面处理,也能够保证粘性正激波的稳定性。

## 2 主要假设

(1)不考虑高温高压条件下金属中的弹塑性及可能出现的相变,激波运动由可压缩非定常粘性流动的 Navier-Stokes 方程控制。

(2)金属的状态方程采用刚性气体状态方程形式

$$p = (\gamma - 1)\rho e + (\rho - \rho_0)c_0^2$$

式中: $p$  是压力,  $\rho$  是密度,  $e$  是内能,  $\gamma$  是比热比,  $\rho_0$  和  $c_0$  是标准状态下的密度和声速。大量的实验及数值计算<sup>[3]</sup>表明,该状态方程能够充分反映凝聚介质的压缩特性。

## 3 连续解分析法

### 3.1 激波运动基本流场控制方程

在一维空间下,若不计热传导和外力的影响,且假设物质粘性系数  $\mu$  为常数,并取随激波一起运动的流场坐标  $x$ 。并考虑激波流场有如下形式的解

$$f(x, t) = \bar{f}(x) + \tilde{f}(x, t)$$

式中:函数  $f$  代表物理量  $\rho, u, p$ , 而  $\bar{f}$  表示基本流场的解,  $\tilde{f}$  表示小扰动的解。则在忽略高阶小扰动的条件下,有如下考虑了基本流场和小扰动的激波运动控制方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\bar{u})}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}^2)}{\partial x} + 2\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\bar{u}^2)}{\partial x} + \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\bar{p} - (\bar{\rho} - \rho_0)c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{\tilde{p} - \tilde{\rho}c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{\rho}\bar{u}\tilde{u} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\bar{u}^2\right] + \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\bar{p} - (\bar{\rho} - \rho_0)c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{\tilde{p} - \tilde{\rho}c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{\rho}\bar{u}\tilde{u} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\bar{u}^2\right]\bar{u} + \frac{\partial(\bar{p}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{p}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{p}\bar{u})}{\partial x} + \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\bar{p} - (\bar{\rho} - \rho_0)c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{u}^2\right]\tilde{u} = \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\bar{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (1)$$

基本流场的解被认为是上述流动控制方程组在定常状态时的行波解,并假设激波速度大小为  $D$ ,  $x$  坐标负向为波前,则有基本流场解为

$$\begin{cases} \frac{d(\bar{\rho}\bar{u})}{dx} = 0 \\ \frac{d(\bar{\rho}\bar{u}^2)}{dx} + \frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{4}{3}\mu\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{\bar{p} - (\bar{\rho} - \rho_0)c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{\bar{\rho}\bar{u}^2}{2}\right]\bar{u} + \frac{d(\bar{p}\bar{u})}{dx} = \frac{4}{3}\mu\frac{d}{dx}\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dx} \end{cases} \quad (2)$$

积分方程组(2),并用下标“0”表示波前  $x \rightarrow -\infty$  的状态,可得激波基本流场的速度分布

$$\frac{(D - \bar{u})^a}{(\bar{u} - u_w)^b} = \exp\left[\frac{3(\gamma + 1)\rho_0 D}{8\mu} x\right] \tag{3}$$

式中： $a = \frac{(\gamma + 1)D^2}{2(D^2 - c_s^2)}$ ， $b = \frac{(\gamma - 1)D^2 + 2c_s^2}{2(D^2 - c_s^2)}$ ， $u_w = \frac{(\gamma - 1)D^2 + 2c_s^2}{(\gamma + 1)D}$ ， $c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} + c_0^2$ 。相应的密度和压力分布也可以求出。

### 3.2 激波运动小扰动场控制方程

由方程组(1)并考虑到成立方程组(2)，则有如下小扰动方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\bar{u})}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\bar{u})}{\partial t} + 2\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{p} - \tilde{\rho}c_0^2}{\gamma - 1} + \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\bar{u}^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{p} - \tilde{\rho}c_0^2}{\gamma - 1} + \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\bar{u}^2\right)\bar{u} + \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{p} - (\bar{\rho} - \rho_0)c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{u}^2\right)\tilde{u} + \frac{\partial(\bar{p}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{p}\bar{u})}{\partial x} = \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{4}$$

考虑时间模式的稳定性，小扰动量有指数形式的行波解

$$\tilde{f}(x, t) = \hat{f}(x) \exp(-i\omega t)$$

式中： $\omega = \omega_r + i\omega_i$  是复数频率，并被认为是常数，且  $\hat{f}(x)$  通常也是复数。复数频率  $\omega$  的实部  $\omega_r$  代表扰动频率，虚部  $\omega_i$  代表时间上的放大率。显然，只有当该复数频率的虚部小于 0 时，小扰动能被衰减掉，从而流动是稳定的。

把指数形式的行波解代入方程式(4)，有如下常微分方程组及其边界条件

$$\begin{cases} \bar{u}\frac{d\hat{\rho}(x)}{dx} + \bar{\rho}\frac{d\hat{u}(x)}{dx} + \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - i\omega\right)\hat{\rho}(x) + \frac{d\bar{\rho}}{dx}\hat{u}(x) = 0 \\ \bar{\rho}\bar{u}\frac{d\hat{u}(x)}{dx} + \frac{d\hat{p}(x)}{dx} + \bar{u}\frac{d\bar{u}}{dx}\hat{\rho}(x) + \bar{\rho}\left(\frac{d\bar{u}}{dx} - i\omega\right)\hat{u}(x) - \frac{4}{3}\mu\frac{d^2\hat{u}(x)}{dx^2} = 0 \\ \left[\gamma\bar{p} + \rho_0 c_0^2 - \frac{8\mu}{3}(\gamma - 1)\frac{d\bar{u}}{dx}\right]\frac{d\hat{u}(x)}{dx} + \bar{u}\frac{d\hat{p}(x)}{dx} + \frac{d\bar{p}}{dx}\hat{u}(x) + \left(\gamma\frac{d\bar{u}}{dx} - i\omega\right)\hat{p}(x) = 0 \\ \hat{\rho}(x, t) = 0, \quad \hat{u}(x, t) = 0, \quad \hat{p}(x, t) = 0 \quad x \rightarrow \pm\infty \end{cases} \tag{5}$$

该变系数线性常微分方程组(5)连同齐次边界条件(6)，构成一个特征值问题。解析分析该特征值问题是困难的，必须采取数值求解的办法。

### 3.3 小扰动方程组的数值方法

#### 3.3.1 计算域的坐标变换

为了方便数值求解，这里使用一个坐标变换，将边界条件(6)中的无限的计算区域变成有限的计算区域。下面的反正切函数形式的坐标变换是合适的

$$\xi = 2\arctan(x)/\pi \tag{7}$$

常微分方程组(7)则变成如下矩阵-矢量形式

$$\mathbf{A}(\xi, \mu, D) \frac{d^2\mathbf{q}}{d\xi^2} + \mathbf{B}(\xi, \mu, D) \frac{d\mathbf{q}}{d\xi} + \mathbf{C}(\xi, \mu, D)\mathbf{q} = \frac{i\omega}{h}\mathbf{q} \tag{8}$$

式中：矢量变量  $\mathbf{q} = [\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{p}]^T$ ，系数矩阵的表达式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\mu h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{u} + \frac{4\mu g}{3h} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & a & \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} d\bar{u}/d\xi & d\bar{\rho}/d\xi & 0 \\ \frac{\bar{u}}{\rho} \frac{d\bar{u}}{d\xi} & d\bar{u}/d\xi & 0 \\ 0 & d\bar{\rho}/d\xi & \gamma d\bar{u}/d\xi \end{bmatrix}$$

$$\text{且 } a = \gamma \bar{p} + \rho_0 c_0^2 - \frac{8\mu}{3}(\gamma - 1)h \frac{d\bar{u}}{d\xi}, \quad h = \frac{2}{\pi} \left( 1 + \tan^2 \frac{\pi\xi}{2} \right)^{-1}, \quad g = \frac{4}{\pi} \tan \frac{\pi\xi}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{\pi\xi}{2} \right)^{-2}.$$

而边界条件(6)相应变成:在  $\xi \rightarrow \pm 1$  时,  $\hat{\rho}(\xi, t) = 0, \hat{u}(\xi, t) = 0, \hat{p}(\xi, t) = 0$ 。

### 3.3.2 有限差分格式

这里采用一个四阶有限差分格式,把区域  $[-1, 1]$  分为网格宽度为  $\Delta l$  的  $N$  个均匀结点。对第  $i$  点 ( $3 \leq i \leq N-2$ ) 的物理量,可以有

$$\begin{cases} \left. \frac{d^2 \mathbf{q}}{d\xi^2} \right|_i = \frac{1}{12(\Delta l)^2} (-\mathbf{q}_{i+2} + 16\mathbf{q}_{i+1} - 30\mathbf{q}_i + 16\mathbf{q}_{i-1} - \mathbf{q}_{i-2}) \\ \left. \frac{d\mathbf{q}}{d\xi} \right|_i = \frac{1}{12\Delta l} (-\mathbf{q}_{i+2} + 8\mathbf{q}_{i+1} - 8\mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{q}_{i-2}) \end{cases} \quad (9)$$

对第  $i=2$  点和第  $i=N-1$  点可以有相应离散格式。以上离散结点连同边界条件,产生如下形式的矩阵特征值问题

$$\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{q}} = \lambda(\omega) \bar{\mathbf{q}} \quad (10)$$

式中:  $\lambda(\omega)$  是包含复数频率的特征值,  $\bar{\mathbf{q}} = [(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{p})_2, \dots, (\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{p})_i, \dots, (\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{p})_{N-1}]^T$  是离散网格结点上的特征矢量,  $\bar{\mathbf{A}}$  是对应离散网格结点上的  $[3(N-2)] \times [3(N-2)]$  矩阵。

特征值问题(10)可通过 QR 方法求解,从而获得网格结点上的  $[3(N-2)]$  个特征值  $\omega$ 。

### 3.4 算例及分析

这里分析高压条件下金属铝中的正激波稳定性,铝的状态方程参数见文献[3]。

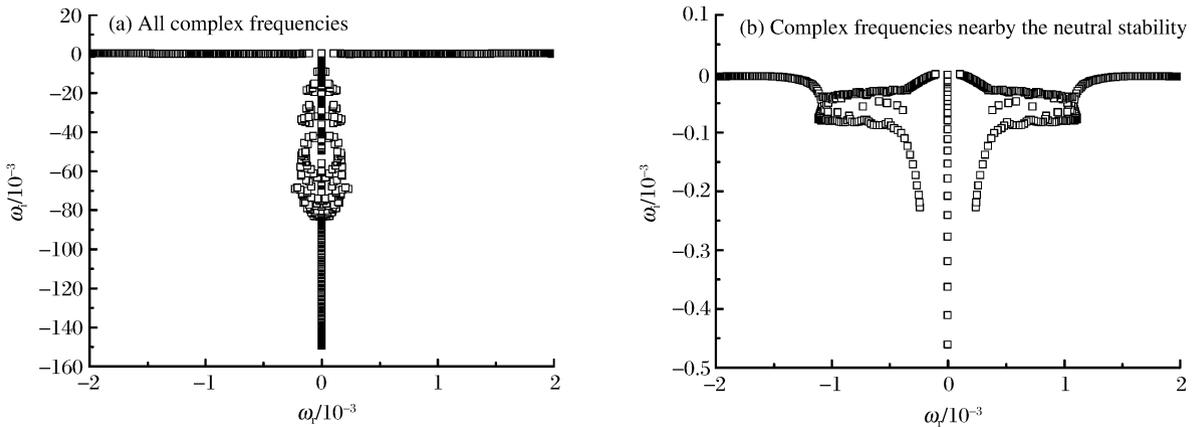


图 1 复数频率的实部、虚部的分布

Fig. 1 Real and imaginary parts of complex frequencies

首先考察激波稳定性的一些主要性质。假设物质粘性系数  $\mu = 5.0 \text{ kPa} \cdot \text{s}$ , 并取一个中等强度的激波速度,  $Ma = 3$ 。计算出的复数频率的实部-虚部的分布如图 1 所示,从图中可以看出,这些复数频率在实数轴下方呈“T”形分布,并且所有复数频率的虚部都有  $\omega_i \leq 0$ 。对  $\omega_r = 0$ , 流动被认为是中性稳定的;对  $\omega_r < 0$ , 流动被认为是绝对稳定的。因此这里可以认为激波运动是稳定的。

再考察物质粘性系数对稳定性的影响。取上述激波速度,计算获得不同物质粘性系数下的复数频率的虚部的空间变化关系,见图 2。由图可知,物质粘性系数对波前流场的衰减有显著影响,而对波后流场的衰减影响不大,并且随粘性系数增大,激波流场的小扰动量的衰减加快,因此粘性有致稳作用。

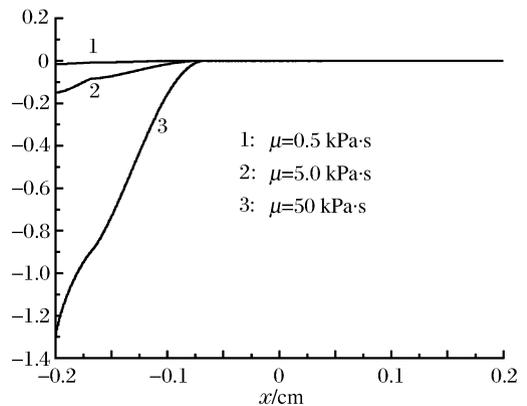


图 2 复数频率的虚部随粘性系数的变化

Fig. 2 Effect of viscosity on the imaginary part of the complex frequency

## 4 间断解分析法

### 4.1 激波阵面上的边界条件

把激波看作强间断面, 设有小扰动的激波阵面的位置为:  $x = Dt - g(t)$ , 其中  $g(t)$  为小扰动振幅。用  $\tau$  表示粘性应力, 则有考虑粘性应力的广义 Rankine-Hugoniot 条件

$$\begin{cases} \Delta(\rho u) = 0 \\ \Delta(\rho u)u + \Delta(p - \tau) = 0 \\ \Delta(\rho u)(e + u^2/2) + \Delta(p - \tau)u = 0 \end{cases} \quad (11)$$

对基本流场, 激波阵面前后均匀分布, Rankine-Hugoniot 条件为

$$\begin{cases} \rho_0 D = \bar{\rho}(D - \bar{u}) \\ \bar{p} = \rho_0 D \bar{u} \\ \bar{e} = \bar{p}(1/\rho_0 - 1/\bar{\rho})/2 \end{cases} \quad (12)$$

对有小扰动的激波阵面, 考虑到激波流场解和状态方程后, Rankine-Hugoniot 条件为

$$\begin{cases} \rho_0(D - \dot{g}) = (\bar{\rho} + \tilde{\rho})(D - \dot{g} - \bar{u} - \tilde{u}) \\ \bar{p} + \tilde{p} - \tilde{\tau} = \rho_0(D - \dot{g})(\bar{u} + \tilde{u}) \\ \bar{p} + \tilde{p} - (\bar{\rho} + \tilde{\rho} - \rho_0)c_0^2 = \frac{\gamma - 1}{2}(\bar{p} + \tilde{p} - \tilde{\tau})\left(\frac{\bar{\rho} + \tilde{\rho}}{\rho_0} - 1\right) \end{cases} \quad (13)$$

把式(12)代入式(13), 可得激波阵面上的小扰动物理量表达式, 其中速度为

$$\tilde{u}(x, t) = \alpha_1 \dot{g}(t) - \beta_1 \partial \tilde{u}(x, t) / \partial x \quad (14)$$

式中:  $\alpha_1 = \frac{(\bar{\rho} - \rho_0)B + \rho_0 \bar{u}(D - \bar{u})A}{\rho_0 D(D - \bar{u})A - \bar{\rho}B}$ ,  $\beta_1 = \frac{4\mu}{3} \frac{(D - u)(A + C)}{\rho_0 D(D - \bar{u})A - \bar{\rho}B}$ ,  $A = \frac{\gamma + 1}{2} \rho_0 - \frac{\gamma - 1}{2} \bar{\rho}$ ,  $B = \frac{\gamma - 1}{2} \bar{p} + \rho_0 c_0^2$ ,  $C = \frac{\gamma - 1}{2} (\bar{\rho} - \rho_0)$ 。

### 4.2 波后流场控制方程

仍假设基本流场均匀, 并采用文献[1]中的推导结果, 则有如下常系数线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{4\mu}{3\bar{\rho}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + (\gamma \bar{p} + \rho_0 c_0^2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

耦合求解该方程组后 2 式, 设  $\gamma \bar{p} + \rho_0 c_0^2 = \bar{\rho} \bar{c}^2$ , 对自变量  $x$  进行复变量  $s$  的 Laplace 变换:  $L[\tilde{u}(x, t)] = U(s, t)$ ,  $L[\tilde{p}(x, t)] = P(s, t)$ , 则有如下常系数线性常微分方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\mu}{3\bar{\rho}} s^2 - \bar{u}s & -\frac{s}{\bar{\rho}} \\ -\bar{\rho} \bar{c}^2 s & -\bar{u}s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\bar{u} - \frac{4\mu}{3\bar{\rho}} s\right) \tilde{u}(0, t) + \frac{\tilde{p}(0, t)}{\bar{\rho}} - \frac{4\mu}{3\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{u}(0, t)}{\partial x} \\ \bar{\rho} \bar{c}^2 \tilde{u}(0, t) + \bar{u} \tilde{p}(0, t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

式(16)的特征方程的特征根为:  $\lambda_{1,2} = -\bar{u}s + \frac{2\mu}{3\bar{\rho}} s^2 \mp \sqrt{(\bar{c}s)^2 + \left(\frac{2\mu}{3\bar{\rho}} s^2\right)^2}$ ,  $\lambda_2$  不能保证  $U(s, t)$  和  $P(s, t)$  的有界性须舍去。又不失一般性地假设边界条件  $\dot{g}(0) = 0$ , 则有

$$U(s, t) = ae^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} \frac{\beta - \alpha H}{G - H} \int \frac{\partial \tilde{u}(0, t)}{\partial x} e^{-\lambda_1 t} dt \quad (17)$$

式中:  $a$  与初始条件有关,  $\alpha = \frac{4\mu\beta_1}{3\bar{\rho}}s - \frac{3\bar{\rho}\bar{u}\beta_1 + 3\beta_2 + 4\mu}{3\bar{\rho}}, \beta = -(\bar{\rho}\bar{c}^2\beta_1 + \bar{u}\beta_2), G = \frac{2\mu}{3}s +$

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu}{3}\right)^2 + (\bar{\rho}\bar{c})^2}, H = \frac{2\mu}{3}s - \sqrt{\left(\frac{2\mu}{3}\right)^2 + (\bar{\rho}\bar{c})^2}, \beta_2 \text{ 类似(14) 中的 } \beta_1.$$

由式(17)经过 Laplace 反变换,则有

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ a + \frac{\beta - \alpha H}{G - H} \int \frac{\partial \tilde{u}(0, t)}{\partial x} e^{-\lambda_1 t} dt \right] e^{\lambda_1 t + xs} ds \tag{18}$$

从小扰动速度的解析解式(18)可以看出,在边界  $x=0$  处,小扰动速度的梯度  $\partial \tilde{u}(0, t)/\partial x$  的取值不合理,可能存在导致小扰动增长的解。

由文献[1]的思路,求出无粘流动的解,则可推出小扰动速度梯度的边界条件

$$\frac{\partial \tilde{u}(0, t)}{\partial x} = QL^{-1} \left\{ \frac{s \left( 1 + \frac{s}{\bar{u}} \sqrt{\frac{s^2 - \bar{u}^2}{\bar{c}^2} + 1} \right)}{\left[ \left( \frac{s}{\bar{u}} \right)^2 - 1 \right] \left[ (1 + \delta) \left( \frac{s}{\bar{u}} \right)^2 + \frac{2s}{\bar{u}} \sqrt{\frac{s^2 - \bar{u}^2}{\bar{c}^2} + 1} \right] + \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} (1 - \delta)} \right\} \tag{19}$$

式中:  $Q = -g(0)(\bar{u} + \bar{c})(\bar{\rho}/\rho_0 - 1), \delta = 2\rho_0 c_0 D(\bar{\rho}/\rho_0)^2 / [(\gamma - 1)\bar{p} + 2\rho_0 c_0^2]$ 。

把式(19)代入式(18)中,式(19)中的 Laplace 反变换和式(18)中的 Laplace 变换均数值求解,取图 2 中的条件计算得小扰动速度与粘性系数的变化关系,如图 3 中曲线 1、2、3 所示,图中

$$u^* = \tilde{u}/W, \quad W = \frac{\omega(\bar{u} + \bar{c})(\bar{\rho}\bar{c}\beta + \beta)}{2\bar{\rho}\bar{c}}$$

且设  $g(0)/\omega = 1$ 。从计算结果看,当粘性增大时在激波阵面  $x = Dt$  处的小扰动衰减变小。故把粘性激波作为强间断面处理时,若给出不合理的边界条件,会得到粘性激波是不稳定的结论。

### 5 改进的间断解分析法

从上面的分析看出,把粘性激波作为强间断面处理时,必须给定合理的边界处的小扰动速度梯度  $\partial \tilde{u}(0, t)/\partial x$ 。这里假设小扰动速度梯度的边界条件有如下形式的表达式

$$\partial \tilde{u}(0, t)/\partial x = \omega e^{-nt} \tag{20}$$

该表达式可由实验结果拟合而成,其中  $\omega$  和  $n$  是与实验条件相关的常数。

把式(20)代入式(18),也取图 2 中的条件,获得小扰动速度与粘性系数的变化关系,如图 3 中曲线 a、b、c 所示。从计算结果看出,小扰动速度是衰减的,且随粘性增大衰减更快。此规律与测量金属铝的高压粘性系数的化爆实验观察到的现象<sup>[2]</sup>一致。这说明给定合理的边界处的小扰动速度梯度后,把粘性激波作为强间断面处理所得到的激波是稳定的。

### 6 结 论

通过线性稳定性理论分析后指出,粘性金属中的正激波是稳定的,但如果把粘性激波作为强间断面处理可能会出现不稳定性,其原因在于控制小扰动激波运动的微分方程组没有合理的小扰动边界条件。如果给出实验确定的在边界处的小扰动速度的梯度值,这样既可以把粘性正激波作为强间断面处理,也能够保证粘性正激波的稳定性。

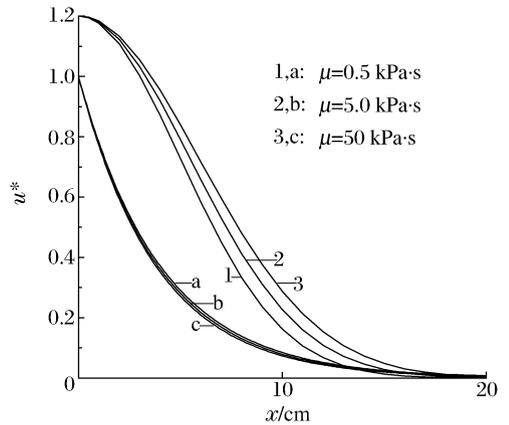


图 3 不同小扰动边界条件下小扰动速度与粘性系数的变化

Fig. 3 Perturbation velocities under different viscosity coefficients with different boundary conditions

**参考文献:**

- [1] Miller G H, Ahrens T J. Shock-wave viscosity measurement[J]. *Review of Modern Physics*, 1991, 63(4):919-948.
- [2] 张树华,李曾昆. 激波上小扰动衰减测量 LY-12 铝的高压粘性系数[J]. *爆炸与冲击*, 1987, 7(2):159-163.  
ZHANG Shu-hua, LI Zeng-kun. Measurement of the viscosity efficient of LY-12Al under high pressure using disturbance method[J]. *Explosion and Shock Waves*, 1987, 7(2):159-163.
- [3] 李维新. 一维不定常流与冲击波[M]. 北京:国防工业出版社, 2003.

**Stability of normal shock waves in a viscous metal**YU Ming<sup>1\*</sup>, LIU Fu-sheng<sup>2</sup>, LI Ying-lei<sup>3</sup>(1. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China;*2. *Southwest Jiaotong University, Laboratory of High Pressure Physics, Sichuan 6140031, Chengdu, China;*3. *Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, Sichuan, China)*

**Abstract:** Regarding a viscous shock wave in a high pressure metal as a strong discontinuity, Miller G H, et al pointed out that a little perturbation shock was unstable under little Reynolds number or large viscosity, and material viscosity was a destabilized factor. Aimed at the conclusion by Miller G H, et al, the linear stability theory was adopted to discuss the stability of normal shock waves in a viscous metal. Regarding a viscous normal shock wave in a high-pressure metal as a continuous profile, this paper points out that any little perturbation shock is stable under any Reynolds number, and material viscosity is a stabilized factor. The error by Miller G H, et al was demonstrated that the boundary conditions from inviscid solutions could lead to the increase of a little perturbation shock. An experimental boundary condition was given to guarantee the stability of a viscous normal shock wave. So a viscous normal shock wave can be regarded as a strong discontinuity, and its stability can be guaranteed.

**Key words:** mechanics of explosion; stability of shock waves; linear stability theory; viscous metal; material viscosity; generalized Rankine-Hugoniot condition

\* Corresponding author; YU Ming

E-mail address: yuming99991@sina.com.cn

(责任编辑 张凌云)