

文章编号: 1001-1455(2009)06-0601-06

二维会聚波在气体内传播不稳定性的数值模拟*

刘金宏, 谭多望, 张旭, 邹立勇, 黄文斌

(中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理国防科技重点实验室, 四川 绵阳 621900)

摘要: 利用 CE/SE (conservation element and solution element) 格式研究了柱面会聚波在气体中传播时间断面的不稳定问题和波阵面的演变问题, 并利用 level set 函数追踪了驱动气体与低压气体间断面的发展过程。得到了间断面的 Rayleigh-Taylor (R-T) 和 Richtmyer-Meshkov (R-M) 不稳定性发展成典型的“尖钉”和“气泡”结构的图像, 初始正弦扰动下的会聚波产生“尖角”和“尖瓣”结构。结果表明, CE/SE 格式在涉及会聚波的数值计算中是可行的。

关键词: 流体力学; Rayleigh-Taylor 不稳定性; CE/SE 方法; 会聚波; level set 方程

中图分类号: O357.5 **国标学科代码:** 130·25 **文献标志码:** A

1 引言

柱面或球面会聚冲击波和爆轰波是获得动态超高压的主要手段之一, 在兵器技术、材料合成与人工热核反应方面有重要的应用。特别是在惯性约束聚变实验中, 为了提出对靶丸加工质量和加载手段的技术要求, 必须了解会聚强冲击波传播过程中的对称性和畸变。如果初始阵面发生畸变, 聚心过程将如何发展。理想的柱、球面冲击波属于一维几何情形, 但其扰动运动属于二维或三维的流体动力学问题, 只能用近似解析或数值研究方法^[1]。在伴随发生会聚作用的运动中常常会出现接触界面不稳定性。CE/SE 方法由 S. C. Chang^[2] 提出, 是基于空间通量与时间通量的守恒性原理推导出来的。与其他方法相比, 该方法具有如下独特的优点: (1) 将时间通量与空间通量统一处理, 有别于有限体积方法采用输运定理处理空间通量; (2) 由于该方法基于守恒元上的积分方程推导出来, 并且不同求解元之间的物理量可以不连续, 所以形式上是差分方程, 实际上是根据时空通量的积分方程推出来的; (3) 精度高, 目前时空通量在求解元上用一阶泰勒展开, 这样其精度在时空上都是二阶; (4) 与其他的迎风格式 (如 TVD 格式) 相比无需黎曼分解; (5) CE/SE 方法是真正的多维格式, 在计算空间通量时无需方向分裂求解^[4]。CE/SE 方法的优点是求解可压缩守恒律方程, 在求解多维 Euler 和 Navier-Stokes 方程时得到了很好的验证。此方法已经成功应用到平面以及变截面激波管流、激波马赫反射、气相爆轰胞格结构、非正常爆轰和气体绕流等问题^[3-8], 且具有计算精度高、激波分辨率高等特点。

本文中应用 CE/SE 数值方法对二维正弦扰动柱面会聚波在空气中传播的问题进行模拟, 得到会聚波运动过程的压力等值线分布图、后期中心膨胀区域的速度分布情况以及间断面由于流体动力学不稳定性而发展成为“尖钉”和“气泡”结构。利用 level Set 函数追踪驱动气体与低压气体间断面运动过程, 得到其发展图像。

2 数值方法简介

2.1 Euler 方程的 CE/SE 格式离散

CE/SE 方法把时间与空间作为统一的坐标进行处理, 对守恒律方程在每个守恒元内保证守恒, 这

* 收稿日期: 2008-06-27; 修回日期: 2008-08-31

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10772166); 国防科技工业技术基础质量与可靠性科研项目 (Z112009B004); 中国工程物理研究院科学技术发展基金项目 (2008B0202011)

作者简介: 刘金宏 (1980—), 男, 硕士, 研究实习员。

样整个求解域同样满足守恒条件。图 1(a)为时空节点分布图,定义点 (j, n) 的守恒元为图 1(b)中的 $ABCD$ 所围区域,求解元为 $AEDF$ 所围区域。以一维 Euler 方程为例,介绍 CE/SE 格式的离散方法。

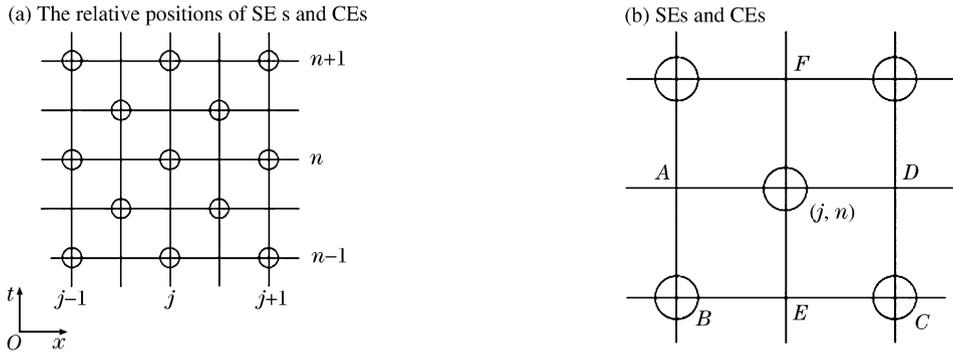


图 1 CE/SE 分布图

Fig. 1 The relative positions of SEs and CEs

一维平面、轴对称以及球对称 Euler 控制方程可统一写成如下形式

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial F_m}{\partial x} = \alpha Q_m \quad m = 1, 2, 3 \quad (1)$$

式中: $U_1 = \rho, U_2 = \rho u, U_3 = p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2$; $F_1 = U_2, F_2 = (\gamma - 1)U_3 + (3 - \gamma)U_2^2/(2U_1), F_3 = \gamma U_2 U_3/U_1 - (\gamma - 1)U_2^3/(2U_1^2)$; $Q_1 = -\frac{U_2}{x}, Q_2 = -\frac{U_2^2}{xU_1}, Q_3 = -\frac{F_3}{x}$ 。其中 ρ 为流场密度, u 为流场速度, p 为流场压力, γ 为绝热系数。 $\alpha = 0, 1, 2$ 分别对应一维平面、轴对称和球对称问题。

令 $h_m = (F_m, U_m)$, 由高斯散度定理可得

$$\oint_{s(V)} h_m ds = \int_V \alpha Q_m dV \quad (2)$$

式中: $s(V)$ 为图 1(a) 所示任一区域 V 的边界。如图 1(a) 所示, 把求解空间划分为点集 (j, n) , 其中 $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, n = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ 。对 U_m, F_m 在 (j, n) 点一阶泰勒展开, Q_m 零阶展开, 通过适当整理就可得到 U_m 的离散方程

$$(U_m)_j^n - \alpha(Q_m)_j^n \Delta t/2 = [(U_m)_{j-1/2}^{n-1/2} + (U_m)_{j+1/2}^{n-1/2} + (S_m)_{j-1/2}^{n-1/2} - (S_m)_{j+1/2}^{n-1/2}]/2 \quad (3)$$

式中: $(S_m)_j^n = (\Delta x/4)(U_{mx})_j^n + (\Delta t/\Delta x)(F_m)_j^n + (\Delta t^2/(4\Delta x))(F_{mt})_j^n$ 。

对于有间断的问题, 为了抑制非物理振荡, 采用加强平均函数 $W(a, b, \beta)$ 对 U_{mx} 求解

$$(U_{mx})_j^n = W[(U_{mx}^+)]_j^n, (U_{mx}^-)]_j^n, \beta] \quad (4)$$

式中:

$$W(a, b, \beta) = \begin{cases} 0 & |a|^\beta + |b|^\beta = 0 \\ (|a|^\beta b + |b|^\beta a) / (|a|^\beta + |b|^\beta) & |a|^\beta + |b|^\beta \neq 0 \end{cases}$$

$$(U_{mx}^\pm)_j^n = \pm [(\bar{U}_m)_{j\pm 1/2}^n - (U_m)_j^n] / (\Delta x/2), (\bar{U}_m)_{j\pm 1/2}^n = (U_m)_{j\pm 1/2}^{n-1/2} + (\Delta t/2)(U_{mt})_{j\pm 1/2}^{n-1/2}.$$

方程(3)、(4)就构成了一维 CE/SE 离散格式。而由于式(3)是非线性方程组, 采用牛顿迭代法可以求解。式(3)右半部分为前一时间点的值, 为已知值, 令其为 U_h , 这样式(3)为

$$(U_m)_j^n - \alpha(Q_m)_j^n \Delta t/2 - U_h = 0 \quad (5)$$

由牛顿迭代法可知

$$U^{i+1} = U^i - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)^{-1} \Big|_{U=U^i} \Phi(U^i) \quad (6)$$

式中: $\Phi(U) = (U_m)_j^n - \alpha(Q_m)_j^n \Delta t/2 - U_h$ 。

将 $(U_m)_j^{n-1/2}$ 作为 U^i 的初值, 迭代 5~10 步就可满足精度要求。

2.2 level set 函数的求解

level set 方法把随时间运动的物质界面看做某个函数的零等值面, 只要求出函数的值, 就可以知道

等值面的位置,也就是所求的界面位置。构造函数 $\Gamma(t)$,使得任意时刻运动界面恰是函数 $\varphi(x, 0)$ 的零等值面,即

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega; \varphi(x, t) = 0\} \tag{7}$$

式中: Ω 为函数 φ 求解区间,初值 $\varphi(x, 0)$ 一般取 x 点到界面 $\Gamma(0)$ 的符号距离

$$\varphi(x, 0) = \begin{cases} d(x, \Gamma(0)) & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \in \Gamma(0) \\ -d(x, \Gamma(0)) & x \in \Omega_2 \end{cases} \tag{8}$$

式中: $d(x \in \Gamma(0))$ 表示 x 点到界面 $\Gamma(0)$ 的距离, $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma(0) \cup \Omega_2$, Ω_1, Ω_2 分别表示界面 $\Gamma(0)$ 两侧的区域。

二维界面追踪函数 level set 方程为

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0 \tag{9}$$

式中: u, v 分别为流场 x, y 方向的速度。只要求出 $\varphi(x, t)$ 的值,然后求出 $\varphi(x, t)$ 的等值面就可以确定追踪界面的运动位置。为保证 $\varphi(x, t)$ 在界面附近为距离函数,还需对其初始化。令 $\varphi_0 = \varphi(x, t), \varphi$ 为初始化前的函数值。

求解初始化方程 $\varphi_t = \text{sgn}\varphi_0(1 - |\nabla\varphi|)$,使其收敛于定常态。式中 τ 为虚时间。

3 物理求解

3.1 一维情况

如图 2 所示,高压段与低压段的静止气体由膜片相隔。假定膜片是瞬间完全破碎,这样在高压与低压分界面产生 2 道波,一道是向低压段传播的冲击波,另一道是向高压段传播的稀疏波。向内传播的冲击波由于波阵面的收缩而压力增高,在中心产生极高的压力。量纲一初始条件如下,高压段: $\rho = 20.0; p = 20.0$; 低压段: $\rho = 1.0, p = 1.0, \gamma = 1.4$ 。激波运动到中心处速度为无穷大,很难给出中心点的数值解,假定中心为具有半径为 r_1 的“硬点”,即空间计算区域为 $r_1 < r < R_2$, $r_1 = R_1/80$,其中 $R_1 = 0.12, R_2 = 0.2$ 。高压外端边界采用无反射边界条件,在 r_1 处采用固壁边界条件。

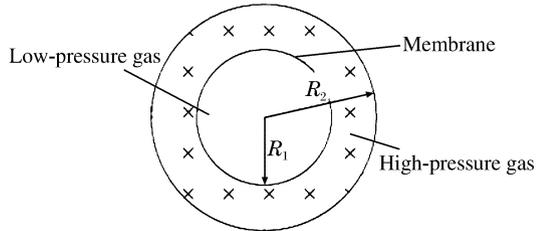


图 2 物理模型简图

Fig. 2 Scheme of the physical model

$\rho = 1.0, p = 1.0$ 分别对应标准大气压下空气的密度和压力,这样对时间可以转换为有量纲量(下同)。图 3(a)、(b)、(c)中曲线 1~8 分别为 23.7~189.7 μs 时刻的压力、密度和速度分布图。由图 3 可见,此计算格式对激波强间断具有较好的分辨率。

图 3(a)、(b)、(c)中曲线 1~8 分别为 23.7~189.7 μs 时刻的压力、密度和速度分布图。由图 3 可见,此计算格式对激波强间断具有较好的分辨率。

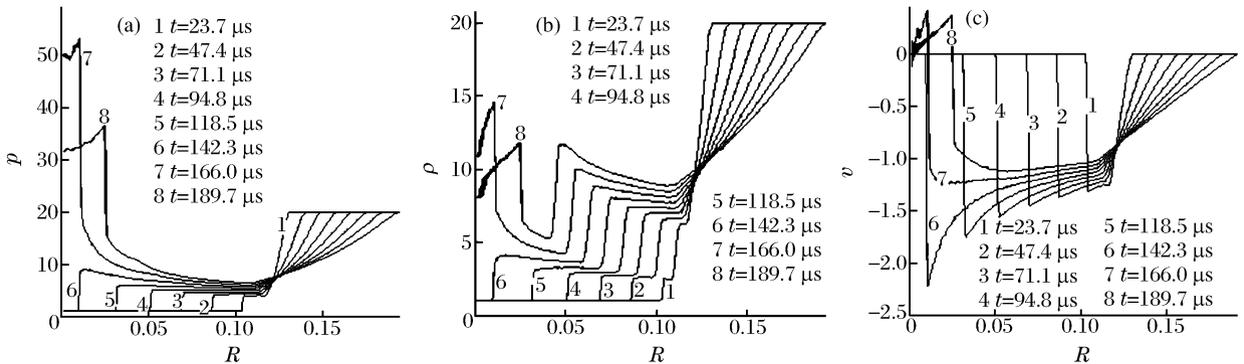


图 3 不同时刻的压力、密度和速度分布图

Fig. 3 Pressure, density and velocity distributions at different times

3.2 二维情况

如图 4 所示, 高压静止气体 A 与低压静止气体 B 由理想的无质量、无厚度的膜相隔, 膜在瞬间完全破裂, 由于压力差, 高压气体就像运动的“活塞”压缩低压气体聚心运动, 并向低压气体传播冲击波, 而向高压气体传播稀疏波。

气体 A 与气体 B 接触界面为 $r = r_0 + \xi \cos(8\theta)$ 。其中 $r_0 = 0.12, \xi/r_0 = 0.05, 0 \leq \theta < 2\pi$ 。气体 A 量纲—初始条件 $\rho = 10.0, p = 10.0$; 气体 B 量纲—初始条件 $\rho = 1.0, p = 1.0$, 绝热系数 $\gamma = 1.4$ 。

由对称性, 取物理模型的 1/4 为计算区域。由 level set 函数追踪界面的运动过程。高压气体与低压气体接触界面密度和温度是间断的, 压力和速度是连续的。由图 3(b) 可以清楚地看出在接触界面处, 高压区气体密度高于低压区气体, 接触界面先加速, 后减速运动。接触界面处由于高压气体密度高于低压气体密度, 在减速阶段界面是 R-T 不稳定的。图 5 是不同时刻接触间断面聚心运动过程的发展图像。由图 5 可见, 开始时刻间断面是稳定的, 后期由于界面不稳定性发展成“尖钉”和“气泡”结构。当冲击波传到中心时, 中心压力远高于周围压力而膨胀。这样, 膨胀气体与会聚气体发生碰撞时, 由于切向速度差而产生漩涡。如图 6(b) 所示, 在间断面的 A、B、C、D 处产生涡流, 图中粗线部分为间断面。图 7 是 448、544 μs 时刻中心区域的密度分布图。图 8(图中粗线为间断面) 是不同时刻的压力等值线分布图。具有正弦扰动的聚合波产生了尖角结构, 聚心过程波阵面逐渐出现尖瓣形状, 并伴有冲击波相互作用现象。

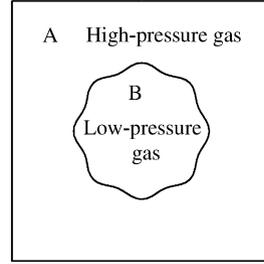


图 4 物理模型

Fig. 4 Scheme of physical model

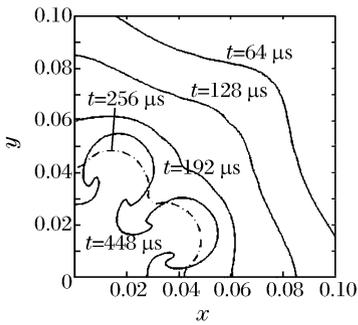


图 5 不同时刻的界面图

Fig. 5 Interfaces at different times

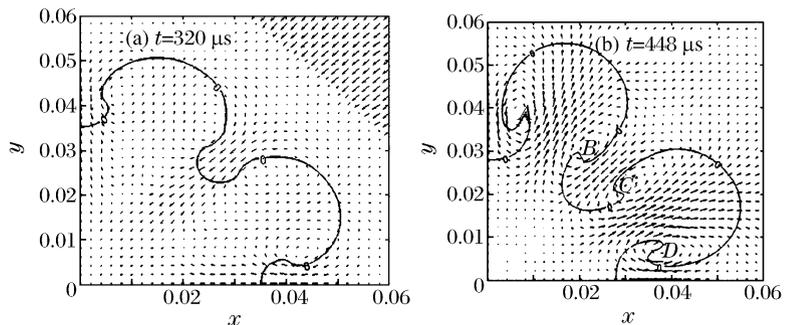


图 6 中心区速度分布图

Fig. 6 Distribution of velocity in the central area

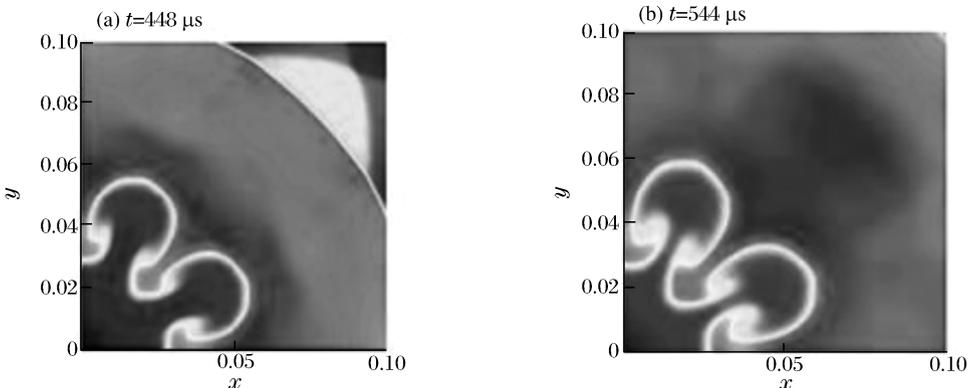
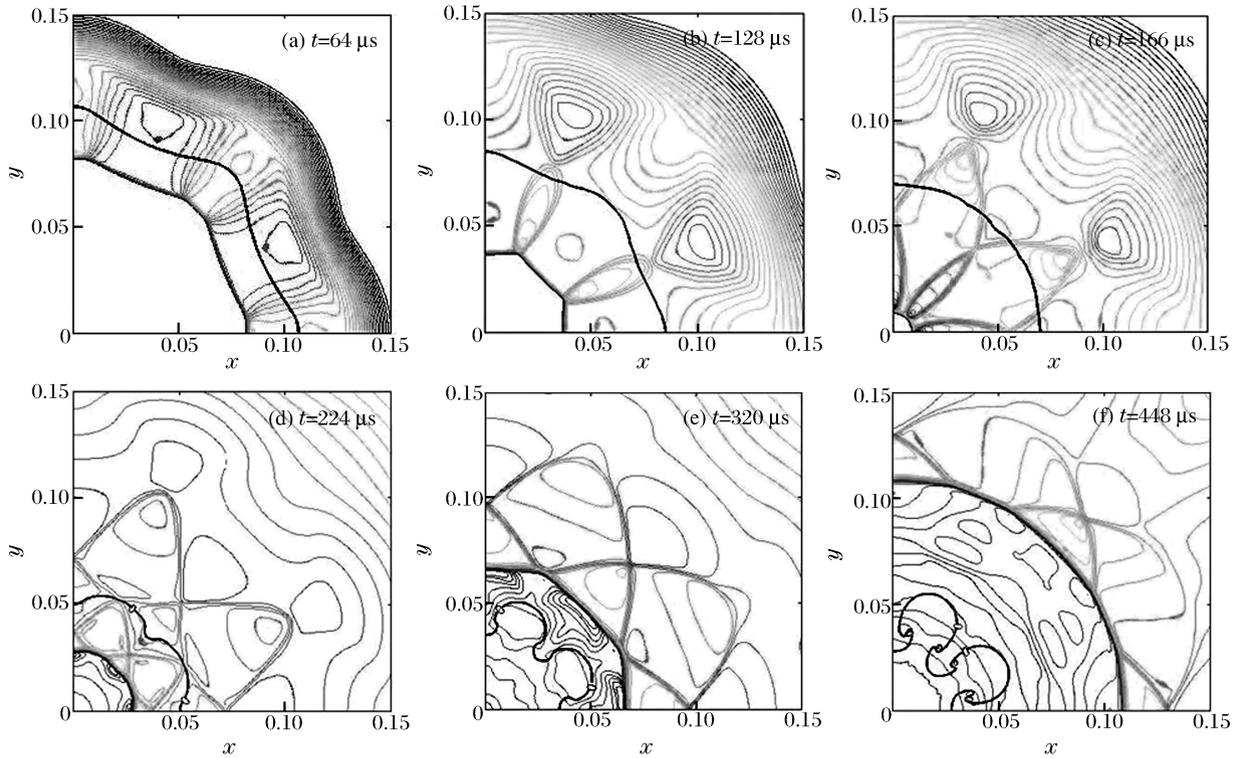


图 7 中心区密度分布图

Fig. 7 Distribution of density in the central area

图 8 64、128、166、224、320、448 μs 时刻的压力等值线分布图Fig. 8 Pressure contours at different times 64, 128, 166, 224, 320 and 448 μs

4 结论

利用 CE/SE 对具有初始正弦扰动的柱形会聚波进行了计算, 得到正弦扰动下会聚波发展成尖角结构, 由于冲击波的相互作用, 波阵面产生尖瓣, 并随会聚波向中心传播的过程增多。驱动气体与低压气体由于密度接触间断, 接触界面聚心运动过程是流体动力学不稳定的, 间断面发展成为“尖钉”和“气泡”结构。会聚波运动到中心后反弹, 膨胀波与间断面作用时界面是 $R-M$ 不稳定的, 间断面减加速运动过程中是 $R-T$ 不稳定的, 并在间断面产生涡流。CE/SE 格式在二维会聚波问题的数值计算是成功的, 此格式可推广聚合波作用下到多介质可压缩流体的界面不稳定性的研究中来。

参考文献:

- [1] 孙承伟, 卫玉章, 周之奎. 理论爆轰物理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 130-138.
- [2] Chang S C. The method of space-time conservation element and solution element — A new approach for solving the Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 1995, 191: 295-324.
- [3] Wang X Y, Chow C Y, Chang S C. Application of the space-time conservation element and solution element method to shock-tube problem[R]. NASA TM-1068086, 1994: 1-35.
- [4] 翁生, Gore T P. CE/SE 方法在非定常爆轰计算中的应用[J]. 空气动力学报, 2003, 21(3): 301-304.
WENG Chun-sheng, Gore T P. Apply the CE/SE method to the simulation of unsteady detonation[J]. Acta Aerodynamic Sinica, 2003, 21(3): 301-304.
- [5] 张德良, 谢巍, 郭长铭. 气相爆轰胞格结构和马赫反射数值模拟[J]. 爆炸与冲击, 2001, 21(3): 161-167.
ZHANG De-liang, XIE Wei, GUO Chang-ming. Numerical simulation of cellular structures and mach reflection of gaseous detonation waves[J]. Explosion and Shock Waves, 2001, 21(3): 161-167.
- [6] ZHANG Zeng-chan, HE Hao, Chang S C, et al. Direct calculations of two- and three- dimensional detonations by an extended CE/SE method[R]. AIAA 2001-0476, 2001: 1-5.
- [7] Tseng T I, Yang R J. Simulation of the Mach reflection in supersonic flows by the CE/SE method[J]. Shock

Waves, 2005, 14(4):307-311.

- [8] 张增产, 沈孟育. 用时空守恒方法求带源项及刚性源项的守恒律方程[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1998, 38(11):87-90.
ZHANG Zeng-chan, SHEN Meng-yu. Applications of space-time conservation schemes to conservation laws with stiff source terms[J]. Journal of Tsinghua University (Science & Technology), 1998, 38(11):87-90.
- [9] Ching Y L, Zaman K B M Q. Numerical investigation of ‘transonic resonance’ with a convergent-divergent nozzle [R]. AIAA 2002-0077, 2002:1-13.
- [10] CHANG S C, YU S T. Robust and simple non-reflecting boundary conditions for the Euler equations — A new approach based on the space-time CE/SE Method[R]. NASA/TM-2003-212495, 2003:1-40.

Numerical simulation of instability of two-dimensional convergent shock wave propagating in gas

LIU Jin-hong^{*}, TAN Duo-wang, ZHANG Xu, ZOU Li-yong, HUANG Wen-bin
(National Key Laboratory of Shock Wave and Detonation Physics, Institute of Fluid Physics,
China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, Sichuan, China)

Abstract: The discontinuity instability and wave front evolution of a cylindrical convergent shock wave propagating in gas were simulated by the CE/SE scheme. The evolution of the interface between the high-pressure driving gas and the low-pressure driven gas was revealed by the level set method. Both the typical “spire” and “bubble” discontinuity patterns due to Rayleigh-Taylor (RT) and Richtmyer-Meshkov (RM) instability, and the “polygon” and “petal” patterns developed from the initial sine convergent shock wave were obtained. Results demonstrate that the CE/SE scheme is feasible in numerical simulation involving convergent shock wave propagation.

Key words: fluid mechanics; Rayleigh-Taylor instability; CE/SE scheme; convergent shock wave; level set equation

* Corresponding author: LIU Jin-hong
Telephone: 86-816-2490590

E-mail address: ljh292@163.com