

文章编号: 1001-1455(2009)06-0669-04

基于虚拟样本的火工品可靠性评估*

洪东跑¹, 赵宇¹, 温玉全²

(1. 北京航空航天大学工程系统工程系, 北京 100191;

2. 北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081)

摘要: 为了提高小样本下火工品可靠性评估的精度, 研究了升降法实验及其数据分析方法。结合火工品升降法实验数据的特点, 给出了一种数据填充方法, 把二元成败型数据转化为虚拟完全样本数据。模拟结果表明, 与基于二元成败型数据的估计相比, 基于虚拟完全样本数据的位置参数估计基本一致, 而刻度参数估计具有更优的统计性质。利用该虚拟样本数据, 结合信仰推断方法, 给出了火工品可靠性评估方法。最后将该方法应用于某产品的可靠性评估, 并与大样本评估方法进行了比较, 表明该方法可以在较小样本下实现对高可靠性火工品的可靠性评估。

关键词: 爆炸力学; 可靠性评估; 数据填充; 火工品; 虚拟样本

中图分类号: O389; TJ450; TB114.3

国标学科代码: 130·35

文献标志码: A

1 引言

火工品属于敏感性产品, 一般假设每个产品均存在一个临界刺激量, 当外界施加的刺激量大于临界刺激量时, 该产品“响应”, 否则“不响应”^[1]。火工品的临界刺激量是不能直接测量的, 实验所获得的只是二元成败型数据^[2], 即施加的刺激量和相应的“响应”或“不响应”数, 而不是临界刺激量。传统的方法一般利用二元成败型数据对火工品进行可靠性评估, 主要分为参数法和非参数法。非常参数法是指在某一固定刺激量处实验, 利用经典方法评估其可靠性^[3]。由于火工品可靠性往往很高, 利用该方法, 需要非常大的样本量, 不仅工作量大而且实验费用昂贵。工程中通常利用参数法, 假定感度服从某分布, 按照一定的方法在不同的刺激量点进行实验, 一般采用升降法^[4]进行实验。由实验数据可得感度分布参数的极大似然估计, 然而刻度参数的估计往往有较大的偏差^[5], 从而导致分位点估计或可靠度估计偏差较大。

本文中结合升降法实验数据的特点, 给出一种数据填充方法, 把二元成败型数据转化为虚拟完全样本数据。并利用信仰推断对该数据进行分析, 给出火工品可靠性评估小样本方法。

2 基于升降法实验的虚拟样本

对升降法实验^[1]数据进行统计分析, 按刺激量的升序排列, 可表示成如下形式

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_k \\ n_1, n_2, \dots, n_k \\ m_1, m_2, \dots, m_k \end{cases} \quad (1)$$

式中: k 为刺激量个数, $x_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为实验刺激量, m_i 为在 x_i 实验的失效数, n_i 为在 x_i 实验的响应数, 记总的实验样本量为 N 。通常假设火工品的感度分布为位置-刻度分布族 $F(x; \mu, \sigma)$ (如正态分布和 Logistic 分布)。由式(1)的实验数据可得感度分布参数的极大似然估计 $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, 当数据存在“混合区”(最大不响应刺激量要大于最小响应刺激量)时, 极大似然估计唯一^[6]。

由于实验获得的是二元成败型数据, 为了提高参数估计的精度, 给出一种数据填充方法, 把二元成败型数据填充为虚拟完全样本。数据填充算法步骤如下:

(1) 如果数据有混合区, 利用数值方法求解参数极大似然估计得 $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, 否则, 取 $\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (n_i + m_i) x_i, \hat{\sigma} =$

* 收稿日期: 2008-09-01; 修回日期: 2008-11-23

作者简介: 洪东跑(1983—), 男, 博士研究生。

$$\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k (n_i + m_i) (x_i - \hat{\mu})^2}.$$

(2) 如果样本在 $x_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 处实验, 结果响应, 则填充可得其虚拟完全样本为

$$x_{ij}^* = F^{-1}(q_{ij} | \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (2)$$

式中: $F^{-1}(q_{ij} | \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ 为分布 $F(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ 的 q_{ij} 分位点, 其中

$$q_{ij} = F(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) - [\rho + j(1 - \rho)/(n_i + 1)][F(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) - F(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma})]$$

(3) 如果样本在 $x_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 处实验, 结果不响应, 则填充可得其虚拟完全样本为

$$x_{ij}^* = F^{-1}(q'_{ij} | \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \quad j = 1, 2, \dots, m_i \quad (3)$$

式中: $q'_{ij} = [\rho + j(1 - \rho)/(m_i + 1)][F(x_k; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) - F(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma})] + F(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma})$.

(4) 由此可得虚拟的完全样本 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$, 利用该数据可得分布参数极大似然估计 (μ^*, σ^*) 。

参数估计 (μ^*, σ^*) 是关于 p 的函数, 因此需要选择合适的 p 使虚拟完全样本尽可能地接近真实的完全样本, 从而获得较精确的估计 (μ^*, σ^*) 。由于 μ^* 受 p 的影响较小, 本文中主要考虑 p 对 σ^* 的影响。利用优化方法通过使 σ^* 的均方误差最小来确定 p , 此时估计量 σ^* 具有较优的统计性质。

3 数值模拟

利用蒙特卡罗方法模拟升降法实验, 对基于虚拟完全样本的参数估计与传统的基于二元成败型数据的参数估计进行比较。以正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 为例(如果不是正态的, 对感度刺激量进行相应的变换可变为正态分布), 取 $N(10, 1)$, $x_0 = 10$, 步长 $d = h\sigma$, 选择不同的实验方案 (n, h) 进行模拟实验, 直到各自有效的实验次数为 10 000。记基于二元成败型数据 σ 的估计为 $\hat{\sigma}$, 计算其期望 $E(\hat{\sigma})$ 和均方误差 $MSE(\hat{\sigma})$, 模拟结果如表 1 所示。把实验数据填充为虚拟数据, 记基于该数据的参数 σ 的估计为 σ^* , 计算其期望 $E(\sigma^*)$ 和均方差 $MSE(\sigma^*)$, 模拟结果见表 1。

表 1 基于二元成败型数据和基于虚拟样本的参数估计模拟结果

Table 1 Simulation results of the estimates from binary and virtual data

h	n	基于二元成败型数据的参数估计			基于虚拟样本的参数估计		
		$E(\hat{\sigma})$	$ E(\hat{\sigma}) - \sigma $	$MSE(\hat{\sigma})$	$E(\sigma^*)$	$ E(\sigma^*) - \sigma $	$MSE(\sigma^*)$
0.6	30	0.861 0	0.139 0	0.148 6	1.005 8	0.005 8	0.057 4
0.8	30	0.905 6	0.094 4	0.120 1	0.999 7	0.000 3	0.062 1
1.0	30	0.937 2	0.062 8	0.103 4	1.005 4	0.005 4	0.063 4
1.2	30	0.981 8	0.018 2	0.085 8	1.005 3	0.005 3	0.061 3
1.4	30	1.044 9	0.044 9	0.072 1	0.998 9	0.001 1	0.051 8
0.6	40	0.890 0	0.110 0	0.121 4	1.003 3	0.003 3	0.050 6
0.8	40	0.913 6	0.086 4	0.095 4	0.999 5	0.000 5	0.052 7
1.0	40	0.946 7	0.053 3	0.087 0	0.997 8	0.002 2	0.057 1
1.2	40	0.966 3	0.033 7	0.070 0	0.999 7	0.000 3	0.055 7
1.4	40	1.009 6	0.009 6	0.057 8	1.006 1	0.006 1	0.050 1
0.6	50	0.895 9	0.104 1	0.096 4	0.994 4	0.005 6	0.042 9
0.8	50	0.930 7	0.069 3	0.079 5	0.999 0	0.001 0	0.049 1
1.0	50	0.948 3	0.051 7	0.070 6	0.998 9	0.001 1	0.048 5
1.2	50	0.963 4	0.036 6	0.059 8	0.999 7	0.000 3	0.049 4
1.4	50	0.993 5	0.006 5	0.046 0	1.001 0	0.001 0	0.048 0
0.6	60	0.919 1	0.080 9	0.084 6	1.004 3	0.004 3	0.038 6
0.8	60	0.944 5	0.055 5	0.066 4	0.995 8	0.004 2	0.041 1
1.0	60	0.946 2	0.053 8	0.064 9	1.006 0	0.006 0	0.042 2
1.2	60	0.964 6	0.035 4	0.053 5	0.998 2	0.001 8	0.044 4
1.4	60	0.979 5	0.020 5	0.045 7	0.999 1	0.000 9	0.045 2

结合升降法的特点, 对表 1 中的数据分析可得:

(1) 当样本量 n 固定时, $E(\hat{\sigma})$ 随 h 递增, $MSE(\hat{\sigma})$ 随 h 递减; 当 h 固定时, $E(\hat{\sigma})$ 随 n 的不同而变化, $MSE(\hat{\sigma})$ 随样本

量 n 单调递减。

(2) 当样本量 n 固定时, $E(\sigma^*)$ 随 h 没有明显的变化, 且 $|E(\sigma^*) - \sigma|$ 较小, 同时 $MSE(\sigma^*)$ 随 h 变化较小; 当 h 固定时, $E(\sigma^*)$ 随 n 没有明显的变化, 同时 $MSE(\sigma^*)$ 随样本量 n 单调递减。在不同的实验方案下 $E(\sigma^*)$ 都接近于均值, 由此可知估计量 σ^* 受 h 影响较小。

(3) 对表 1 中的数据进行对比分析可知, 在相同的实验方案下, $MSE(\sigma^*) < MSE(\hat{\sigma})$, 并且随着 n 的增加, $MSE(\sigma^*)$ 与 $MSE(\hat{\sigma})$ 趋于一致。

综上所述可知, 基于虚拟完全样本的刻度参数估计要优于基于二元成败型数据。

4 基于虚拟样本的可靠性评估

假设火工品感度为正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 虚拟样本 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ 为 X 的独立同分布样本。对于给定的刺激量水平 x , 火工品的发火可靠度

$$R(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (4)$$

式中: Φ 为正态分布函数。利用文献[7]的信仰推断方法对式(4)进行变换可得

$$R(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s} \sqrt{\nu} + \bar{y}\right) \quad (5)$$

式中: \bar{x} 和 s 为虚拟样本 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ 的均值和标准差 ($\bar{x} = \mu^*, s = \sigma^*$), \bar{y} 和 ν^2 为具有已知分布的随机变量; \bar{y} 服从标准正态分布, ν^2 服从自由度为 $N-1$ 的 χ^2 分布, 且 \bar{y} 和 ν^2 独立, 一般把式(5)称为 $R(x)$ 的信仰分布。由于 $R(x)$ 的分布已知, 在给定置信水平下可得可靠度下限 $R_L(x)$ 。

5 实例

某撞击火帽可靠性指标为: $\gamma = 0.90, R \geq 0.999$, 发火刺激量为: 落锤质量 388 ± 1 g, 落高 $x = 10$ cm。

根据火工品感度分布模型研究结果, 其感度分布服从对数正态分布, 把对数正态分布变换为正态分布, 因其感度分布参数未知, 取 50 个样本进行升降法实验, 实验结果为刺激量 $x = 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5$ cm, 响应数 $n = 0, 1, 3, 10, 11$, 不响应数 $m = 1, 3, 10, 11, 0$ 。把实验数据转化为虚拟样本, 可得参数极大似然估计为 $\mu^* = 1.540, \sigma^* = 0.155$ 。利用信仰推断可得该火工品的置信水平为 $\gamma = 0.90$ 的可靠性下限 $R_{1L} = 0.99999$ 。

由于步进法实验样本量较大, 其参数估计较为稳定, 将本文中给出的方法评估结果与步进法进行对比, 以验证本文方法的合理性, 该撞击火帽的步进法实验数据如表 2 所示。

对实验数据进行统计分析得 $\hat{\mu} = 1.575, \hat{\sigma} = 0.165$, 可靠性下限 $R_{1L} = 0.99998$ 。对上述 2 种方法的评估结果进行对比分析可知, 本文的方法与步进法所得的结果基本相同。故本文的方法是可行的, 可以利用较小样本量实现对高可靠性要求的火工品可靠性评估。

6 结论

升降法能较好地估计位置参数, 但通常估计刻度参数的效果较差, 为此给出了升降法实验数据的填充方法, 把二元成败型数据转化为虚拟完全样本。模拟结果表明, 与传统基于二元成败型数据的估计相比, 基于虚拟完全样本的刻度参数估计具有更优的统计性质, 而且克服了由于数据没有混合区难以获得唯一极大似然估计的不足。以某撞击火帽为例, 将基于虚拟样本的可靠性评估方法与大样本步进法进行了对比实验, 结果表明 2 种方法评估结果基本相同, 本文中的方法可以在小样本量下实现对高可靠性产品的可靠性评估, 但由于样本量远远少于步进法, 评估结果没有步进法稳定。

表 2 撞击火帽步进法实验数据

Table 2 The data of sensitivity test for a primer cap by the run-down method

x/cm	样品总数	响应数	响应比例
3.0	400	1	0.0025
3.5	200	4	0.0200
4.0	200	34	0.1700
4.5	200	59	0.2450
5.0	200	103	0.5150
5.5	200	166	0.8300
6.0	200	185	0.9250
6.5	200	192	0.9600
7.0	200	198	0.9900
7.5	400	397	0.9925

参考文献:

- [1] Dixon W J, Mood H M. A method for obtaining and analyzing sensitivity data[J]. Journal of the American Statistical Association, 1948,43(241):109-126.
- [2] Neyner B T. A D-optimality-based sensitivity test[J]. Technometrics, 1994,36(1):61-70.
- [3] Buchler, R. J. Confidence interval for the product of two binomial parameters[J]. Journal of America Statistical Association, 1957,52(280):482-493.
- [4] 温玉全,洪东跑,王玮. 基于试验熵的火工品可靠性评估理论与方法研究[J]. 爆炸与冲击,2007,27(6):553-556.
WEN Yu-quan, HONG Dong-pao, WANG Wei. Study on theory and method of reliability assessment of explosive initiator based on testing entropy[J]. Explosion and Shock Waves, 2007,27(6):553-556.
- [5] Chao M T, Fuh C D. Bootstrap method for the up and down test on pyrotechnology sensitivity analysis[J]. Statistica Sinica, 2001,11:1-21.
- [6] Wu J. Efficient sequential designs with binary data[J]. Journal of American Statistical Association, 1985,80(392):974-984.
- [7] 杨军,赵宇,李学京,等. 复杂系统平均剩余寿命综合评估方法[J]. 航空学报,2007,28(6):1351-1354.
YANG Jun, ZHAO Yu, LI Xue-jing, et al. Comprehensive evaluation of mean residual life of complex system[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007,28(6):1351-1354.

Reliability assessment for explosive initiator using virtual samples

HONG Dong-pao^{1*}, ZHAO Yu¹, WEN Yu-quan²

- (1. Department of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In order to improve the reliability assessment of an explosive initiator with small samples, the up-down test was studied. And a new arithmetic was put forward to transform the binary data into virtual complete samples. The simulation result shows that the estimate of the scale parameter from the virtual samples is better than that from the binary data while the estimates of the location parameters are approximately the same. Then using the estimates, a reliability assessment method for explosive initiator based on fiducial inference was proposed. The method was used for the reliability assessment of one explosive initiator, and was compared with the run-down method.

Key words: mechanics of explosion; reliability assessment; data filling; explosive initiator; virtual samples

* Corresponding author: HONG Dong-pao
Telephone: 86-10-82316074-88

E-mail address: hloving@163.com