

文章编号: 1001-1455(2010)04-0419-05

# 可压缩多介质流动的间断有限元方法<sup>\*</sup>

陈二云<sup>1</sup>, 赵改平<sup>2</sup>, 戴 韧<sup>1</sup>, 马大为<sup>3</sup>

- (1. 上海理工大学能源与动力工程学院, 上海 200093;
2. 上海理工大学医疗器械与食品学院, 上海 200093;
3. 南京理工大学机械工程学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 采用间断有限元方法、LS 方法和通量装配技术相结合, 建立了一种计算可压缩多介质流动的有效方法。计算中以光滑 Heaviside 函数构造流体比热比和重新初始化方程中的符号距离函数, 并采用通量装配技术抑制界面附近的非物理振荡。为解决可压缩多介质流动提供一种新的手段。

**关键词:** 流体力学; 运动界面; 间断有限元方法; 多介质流体; LS 方法

**中图分类号:** O354      **国标学科代码:** 130 · 2517      **文献标志码:** A

多介质流动的数值模拟是当今计算流体力学领域重要的研究课题之一, 涉及流体力学、材料科学、核科学、天体力学、化学以及生物工程等研究领域, 如气泡的变形与塌陷、水下爆炸、超高速发射和惯性约束聚变(ICF)等。因此, 多介质流动的研究对理解许多物理现象具有重大的实际意义<sup>[1]</sup>。

多介质流动数值模拟研究的重点是运用高精度的计算格式精确地追踪运动界面的位置和构造稳健的界面边界条件。目前, 多介质流体界面运动的模拟方法主要分为 2 类<sup>[2]</sup>: 界面追踪法和界面捕捉法。前者是用界面质点表征界面并随流体运动, 跟踪界面运动, 因而能够准确地模拟界面位置的变化, 界面间断处理无数值耗散, 但不容易处理界面拓扑结构的变化; 后者易于处理界面拓扑结构的变化, 但有数值耗散。理想的鲁棒性强的方法是结合 2 种方法的优点。

针对多介质流动的特性, 已经有许多有效的处理方法。尤其是 R. P. Fedkiw 等<sup>[3]</sup>提出的虚拟流体方法, 引起了广泛关注。该方法在处理弱激波与界面的相互作用等问题时取得了非常满意的效果, 但在解决强间断问题时会引起非物理振荡。后来, R. P. Fedkiw<sup>[4-6]</sup>改进了虚拟流体的构造方法, 针对气-液两相高密度比流动问题, 用气体的状态确定界面的压力, 液体的流动状态确定界面的速度; 根据守恒性构造虚拟流体, 能够较好地模拟爆轰和爆燃等强间断问题运动界面的演化发展。

本文中, 在已有研究的基础上, 采用间断有限元方法、LS 方法和通量装配技术相结合, 建立一种计算可压缩多介质流动的方法。计算中采用光滑 Heaviside 函数构造流体比热比和符号距离函数, 采用通量装配技术抑制界面附近的非物理振荡, 拟为解决可压缩多介质流动提供一种新的手段。

## 1 数学模型

### 1.1 控制方程

忽略粘性影响的条件下, 二维 Euler 方程的守恒形式为

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T, \quad \mathbf{F}_x = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (E + p)u)^T, \quad \mathbf{F}_y = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (E + p)v)^T$$

式中:  $\rho$  是密度,  $u$  和  $v$  分别对应于  $x$  和  $y$  方向的速度分量,  $p$  是压强,  $E$  是体积总能量,  $E = \rho e + \rho(u^2 + v^2)/2$ ,  $e$  是质量内能,  $\gamma$  是比热比, 对于理想气体, 状态方程为  $p = (\gamma - 1)\rho e$ 。

### 1.2 Level Set 方程

采用 Level Set 方法捕捉界面  $\Sigma$  的运动, 要求引入 Level Set 函数  $\varphi$ , 满足

$$\partial \varphi / \partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (2)$$

\* 收稿日期: 2009-06-15; 修回日期: 2009-09-09

基金项目: 上海市重点学科建设项目(J50501); 上海市优秀青年基金项目(slg09003)

作者简介: 陈二云(1977—), 男, 讲师。

$$\varphi(x, y, 0) = \begin{cases} d_{\min} & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \in \Sigma \\ -d_{\min} & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

式中:  $\Omega$  是  $\Sigma$  包围的区域(不包含  $\Sigma$  本身),  $d_{\min}$  是点  $(x, y)$  到界面  $\Sigma$  的最小距离。

### 1.3 重新初始化方程

用 Level Set 方程求解流体界面最突出的问题是距离特性的保持。当方程以恰当的速度移动零位标, 离散求解的  $\varphi$  可能不再是一个距离函数, 因此需要求解一个校正常方程使得  $\varphi$  始终保持距离函数性质。在  $t_0$  时刻, 校正值  $\varphi$  满足

$$\partial\varphi(x, y, \tau)/\partial\tau + S(\varphi_0)(|\nabla\varphi| - 1) = 0 \quad (3)$$

式中:  $S(\varphi_0)$  表示符号距离函数,  $\tau$  为演化变量。当  $\tau$  趋于无穷时,  $\varphi$  相对于初值  $\varphi(x, y, t_0)$  中 Level Set 函数值为 0 的面保持距离函数性质, 即  $|\nabla\varphi| = 1$ 。

## 2 数值方法

### 2.1 欧拉方程的离散

在数值模拟中, 对式(1)采用间断有限元格式进行空间离散。设  $\Gamma_h$  是区域  $\Omega$  的一个有限剖分, 单元  $K \in \Gamma_h$ ,  $\mathbf{n}_K$  表示单元  $K$  边界的外法向。  $V(K)$  是  $K$  上的局部有限元空间, 取作  $P^k$  次多项式的集合 ( $k \geq 0$ )。为了寻找近似解  $\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t)$  (其中  $\mathbf{X} = (x, y)$ ), 在单元  $K$  上用连续函数  $v$  乘方程(1)的两端, 并用它的近似解  $\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t) \in V(K)$  代替方程(1)的精确解  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ , 用  $v_h \in V(K)$  代替测试函数  $v$ 。由 Green 公式, 得

$$\frac{d}{dt} \int_K \mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Omega + \int_{\partial K} \mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{n}_K v_h(\mathbf{X}) d\Gamma - \int_K \mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}) d\Omega = 0 \quad (4)$$

用数值通量函数  $\mathbf{h}_K(\mathbf{X}, t)$  代替  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{n}_K$ , 得

$$\frac{d}{dt} \int_K \mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Omega + \int_{\partial K} \mathbf{h}_K(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Gamma - \int_K \mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}) d\Omega = 0 \quad (5)$$

数值通量是 Riemann 问题型的, 依赖于单元边界两端的流体状态, 且满足相容性、单调性、全局 2 点 Lipschitz 连续性和守恒性。符合上述特点的数值通量有多种表达形式, 在计算中取局部 Lax-Friedrichs 通量。方程(5)中的区域积分和表面积分可以采用高斯积分公式<sup>[7]</sup>进行计算, 最后得到弱表达式

$$\frac{d}{dt} \int_K \mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t) v_h(\mathbf{X}) d\Omega + \sum_{\partial K} \sum_{l=1}^L \omega_l \mathbf{h}_K(\mathbf{X}_l, t) v_h(\mathbf{X}_l) |\partial K| - \sum_{m=1}^M \omega_m \mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathbf{X}_m, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{X}_m) |K| = 0 \quad (6)$$

此外, 为了方便计算, 在单元  $K$  中取正交基函数, 则质量矩阵成为分块对角矩阵, 故有限元解可以表示为

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^M \mathbf{U}_j(t) \phi_j \quad (7)$$

在式(6)中, 令  $v_h = \phi_i$ , 得

$$\sum_j \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} \int_K \phi_j(\mathbf{X}) \phi_i(\mathbf{X}) d\Omega + \sum_{\partial K} \sum_{l=1}^L \omega_l \mathbf{h}_K(\mathbf{X}_l, t) \phi_i |\partial K| - \sum_{m=1}^M \omega_m \mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathbf{X}_m, t)) \cdot \nabla \phi_i |K| = 0 \quad (8)$$

设  $\mathbf{M}_K$  为单元  $K$  的质量矩阵, 则  $\forall v_h \in V_h, \forall K \in \Gamma_h$ , 方程(8)可写成 ODEs 形式

$$\mathbf{M}_K d\mathbf{U}_h(\mathbf{K}, t)/dt = \mathbf{L}_h(\mathbf{U}_h(\mathbf{K}, t)) \quad (9)$$

对上面所得到的常微分方程组的时间离散采用带限制器的 3 阶 Runge-Kutta 方法<sup>[7]</sup>。

### 2.2 Level Set 方程的求解

对 Level Set 方程, 采用 Superbee TVD 格式进行求解, 则方程(2)的离散格式为

$$\begin{aligned} \varphi_i^{n+1} = & \varphi_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \max(0, V)(\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta x} \delta x \max(0, V)(c-1)(S_i^n - S_{i-1}^n) - \\ & \frac{\delta t}{\delta x} \min(0, V)(\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) + \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta x} \delta x \min(0, V)(c+1)(S_{i+1}^n - S_i^n) \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $\delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $\delta t = t^n - t^{n-1}$ ,  $c = V\delta t/\delta x$ ,  $S_i^n = \partial\varphi_i^n/\partial x$ 。

为了保证上述格式的单调性, 并防止在间断处产生伪振荡, 需要对梯度  $S_i^n$  加以限制<sup>[8]</sup>。方程(10)是 Superbee-TVD 格式的基本表达式。对于二维情形, 可采用分步法进行计算。前半个时间步计算  $x$  方向的变化, 得到中间值  $\varphi_i^{n+1/2}$ , 以此为初值, 在后半个时间步内求解  $y$  方向的变化, 即得  $n+1$  时刻的  $\varphi_i^{n+1}$ 。

对于重新初始化的 Level Set 方程(3), 用修正的 Godunov 方法求解。用 WENO 方法分别构造左侧和右侧的导数离散值  $\varphi_x^+, \varphi_x^-$ , 用同样的方法处理  $\varphi_y$ 。时间导数的离散用 3 阶 TVD Runge-Kutta 法。

### 3 界面处理

通常情况下,运动界面与网格单元的边界不会完全重合,在 1 个单元内可能会包含 2 种不同的流体。在数值求解过程中,采用的是离散单元中心所代表的那种流体的流动变量,这就相当于将运动界面拉到单元边界,使原本是任意曲线形状的交界面拉成“台阶”式的直角线(如图 1,其中实线代表实际运动界面,圆圈代表抹平后的运动界面,圆点代表单元中心),出现一定程度的抹平。而且在计算单元边界处的数值通量时,由于界面两边不同的流体比热比,使数值格式失去守恒性,进而导致界面处的数值振荡。因此,按照文献[9]的方法,采用光滑后的 Heaviside 函数确定含运动界面网格单元内的流体比热比

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1 & \varphi < -\epsilon \\ 0.5(1 + \varphi/\epsilon + \sin(\pi\varphi/\epsilon)/\pi) & -\epsilon \leq \varphi \leq \epsilon \\ \gamma_2 & \varphi > \epsilon \end{cases} \quad (11)$$

流体比热比混合模型的建立要求对传统的 LS 符号距离函数进行修正,保证运动界面轮廓的精确和锐利。因此,方程(3)修改为

$$\partial\varphi/\partial\tau = S_\epsilon(\varphi)(1 - |\nabla\varphi|) \quad (12)$$

符号距离函数

$$S_\epsilon(\varphi) = \begin{cases} -1 & \varphi < -\epsilon \\ \varphi/\epsilon + \sin(\pi\varphi/\epsilon)/\pi & -\epsilon \leq \varphi \leq \epsilon \\ 1 & \varphi > \epsilon \end{cases}$$

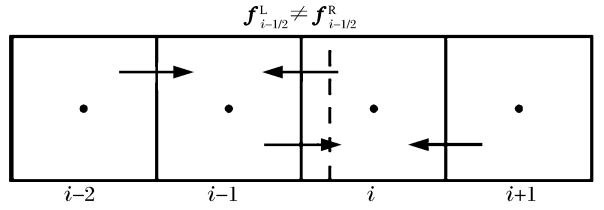


图 2 通量装配技术示意图

Fig. 2 The simple fix sketch by numerical fluxes

此外,为了抑制界面附近的非物理振荡,采用文献[10]的通量装配技术。如图 2 所示,设某时刻运动界面位于第  $i$  个单元内,在网格界面  $i-1/2$  位置放弃格式的守恒性,采用第  $i$  个单元内的数值通量更新  $f_{i-1/2}^R$ ,采用第  $i-1$  个单元内的数值通量更新  $f_{i-1/2}^L$ ,即  $f_{i-1/2}^R = f(\gamma_R), f_{i-1/2}^L = f(\gamma_L)$ 。

### 4 数值结果与结论

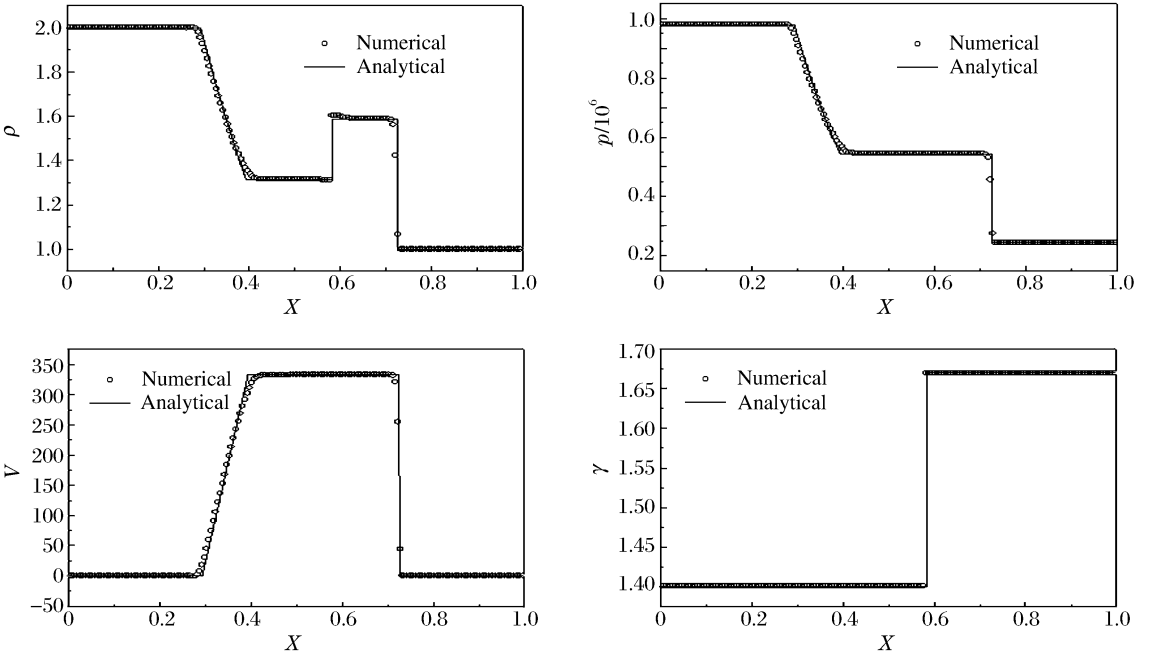


图 3  $t=0.00025$  时密度、压力、速度和比热比的分布

Fig. 3 Distributions of density, pressure, velocity and ratio of specific heats at  $t=0.00025$

为了验证本文方法的有效性,对有解析解的激波管两相流动问题进行计算。计算区域为  $x \in (0, 1), y \in (0, 0.25)$ , 计算网格数为  $200 \times 50$ 。初始间断位于  $x = 0.5$  处,对应于2种初始条件<sup>[2,11]</sup>

$$(\rho_L, u_L, v_L, p_L, \gamma_L) = (2, 0, 0, 9.8 \times 10^5, 1.4), \quad (\rho_R, u_R, v_R, p_R, \gamma_R) = (1, 0, 0, 2.45 \times 10^5, 1.67);$$

$$(\rho_L, u_L, v_L, p_L, \gamma_L) = (1, 0, 0, 1, 1.4), \quad (\rho_R, u_R, v_R, p_R, \gamma_R) = (0.125, 0, 0, 0.1, 1.2)$$

计算结果如图3~4所示,其中圆圈代表数值解,实线代表解析解。从模拟结果可以看出,二者吻合较好,在接触间断和激波位置均未出现明显的压力振荡,且实现简单,是一种求解两相流动的有效方法。

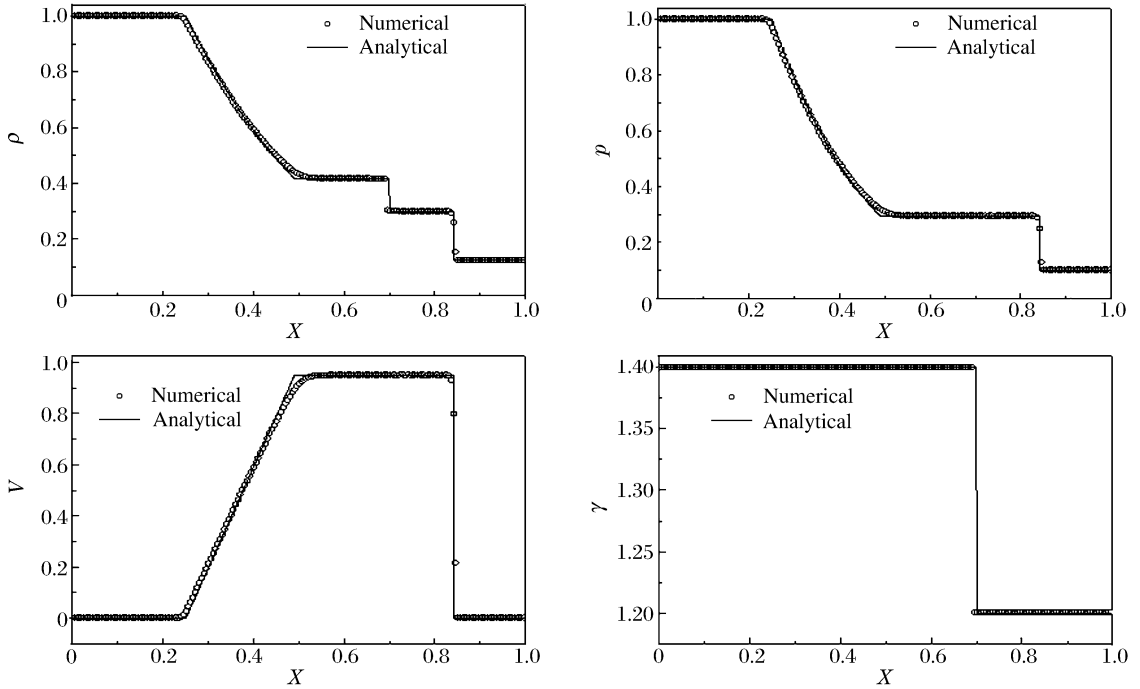


图4  $t=0.21$  时密度、压力、速度和比热比的分布

Fig. 4 Distributions of density, pressure, velocity and ratio of specific heats at  $t=0.21$

## 参考文献:

- [1] 刘儒勋, 刘晓平, 张磊, 等. 运动界面的追踪和重构方法[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(3): 279-290.  
LIU Ru-xun, LIU Xiao-ping, ZHANG Lei, et al. Tracking and reconstruction methods for moving-interfaces[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(3): 279-290.
- [2] 张学莹, 赵宁, 王春武. 多介质流动数值计算中的界面处理方法[J]. 高压物理学报, 2006, 20(3): 249-256.  
ZHANG Xue-ying, ZHAO Ning, WANG Chun-wu. Interface treatment method for multi-component fluids numerical simulation[J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2006, 20(3): 249-256.
- [3] Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 152(2): 457-492.
- [4] Fedkiw R P. Coupling an Eulerian fluid calculation to a Lagrangian solid calculation with the ghost fluid method[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 175(1): 200-224.
- [5] Caiden R, Fedkiw R P, Anderson C. A numerical method for two-phase flow consisting of separate compressible and incompressible regions[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 166(1): 1-27.
- [6] Fedkiw R P, Aslam T, XU Shao-jie, et al. The ghost fluid method for deflagration and detonation discontinuities [J]. Journal of Computational Physics, 1999, 154(2): 393-427.
- [7] Cockburn B, Shu C W. Runge-Kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2001, 16(3): 173-261.
- [8] 李会雄, 邓晟, 赵建福, 等. Level Set 输运方程的求解方法及其对气-液两相流运动界面数值模拟的影响[J]. 核动力工程, 2005, 26(3): 242-248.

- LI Hui-xiong, DENG Cheng, ZHAO Jian-fu, et al. Numerical simulation of interface movement in gas-liquid two-phase flows with level set method[J]. Nuclear Power Engineering, 2005,26(3):242-248.
- [9] Naber J. A numerical solver for compressible two-fluid flow[R]. Report MAS-E0505. Amsterdam: CWI, 2005:1-48.
- [10] Abgrall R, Karni S. Computations of compressible multifluids[J]. Journal of Computational Physics, 2001,169(2):594-623.
- [11] 张镭,袁礼.用改进的耦合型 Level Set 方法计算一维双介质可压缩流动[J].计算物理,2001,18(6):511-516.
- ZHANG Lei, YUAN Li. Calculation of 1-D compressible two-component flows by a coupled level set method with ghost fluid correction[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2001,18(6):511-516.

## A discontinuous finite element method for compressible multi-component flow\*

CHEN Er-yun<sup>1</sup>, ZHAO Gai-ping<sup>2</sup>, DAI Ren<sup>1</sup>, MA Da-wei<sup>3</sup>

(1. School of Energy and Power Engineering, University of Shanghai  
for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. School of Medical Instrument and Food Engineering, University of Shanghai  
for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

3. School of Medical and Engineering, Nanjing University of  
Science and Technology, Nanjing 210094, Jiangsu, China)

**Abstract:** An effective numerical solver was developed for compressible multi-component fluid flows by combining a level set method for the interface tracking, a Runge-kutta discontinuous finite element method for the discretization of the Euler equations and a simple fix method for preventing spurious oscillations near the interface. In calculation, the specific-heat ratio of the flow and a new sign function were defined by using a smooth Heaviside function. Results show that the developed method is feasible for solving compressible multi-component fluid flows.

**Key words:** fluid mechanics; moving interface; discontinuous finite element method; multi-component fluid; LS method

---

\* Received 15 June 2009; Revised 9 September 2009

Corresponding author: CHEN Er-yun, chen\_eryun@yahoo.com.cn