

文章编号: 1001-1455(2010)06-0614-08

# 随从力作用下热弹耦合轴向运动梁的稳定性\*

郭旭侠<sup>1,2</sup>, 王忠民<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学理学院, 陕西 西安 710054;

2. 宝鸡文理学院机电工程系, 陕西 宝鸡 721007)

**摘要:** 研究了切向均布随从力作用下热弹耦合轴向运动梁的稳定性问题。建立了热弹耦合轴向运动梁在随从力作用下的运动微分方程, 采用归一化幂级数法, 推导出了2种边界条件下热弹耦合轴向运动梁在随从力作用下的特征方程。计算了系统的前3阶量纲一复频率, 分析了量纲一运动速度、量纲一热弹耦合系数和量纲一随从力等参数对梁的稳定性的影响。

**关键词:** 固体力学; 稳定性; 随从力; 轴向运动梁; 热弹耦合; 幂级数法

**中图分类号:** O347.2      **国标学科代码:** 130·15      **文献标志码:** A

## 1 引言

非保守力对工程系统中构件的稳定性影响很大, 空中飞行的飞机、导弹受到的气体摩擦力、输流管道中流体的粘滞阻力等都属于非保守力。对随从力(非保守力)作用下构件的动力稳定性问题已有很多研究: 赵凤群等<sup>[1]</sup>用积分方程法研究了具有多个点弹性支承的 Kelvin 型粘弹性简支杆在切向均布随从力作用下的动力特性和稳定性问题; M. A. Langthjem 等<sup>[2]</sup>研究了随从力作用下粘弹性杆件的动力稳定性; 嵯瑞花等<sup>[3]</sup>采用幂级数法得到了三参量模型粘弹性非保守梁的特征方程, 分析了不同边界条件下粘弹性梁的稳定性; R. F. Fung 等<sup>[4]</sup>采用 Galerkin 法研究了同时受到随时间变化的轴向和横向载荷作用的三参量模型粘弹性梁的动力稳定性。但是, 这些研究均没有考虑温度改变对系统稳定性的影响。F. L. Guo 等<sup>[5]</sup>用蒙特卡罗方法计算了两端固支耦合热弹梁的振动频率; Y. X. Sun 等<sup>[6]</sup>研究了考虑耦合热弹阻尼时微型梁的振动特性, 结果表明考虑耦合效应时的振动频率大于非耦合时的振动频率。轴向运动梁作为工程实际中的构件之一, 热弹耦合条件下在切向均布随从力作用下的稳定性问题却少有报道。

本文中试图采用归一化幂级数法, 得到不同边界条件下热弹耦合轴向运动梁的特征方程, 分析量纲一运动速度、量纲一热弹耦合系数和量纲一随从力等参数对梁的稳定性的影响。

## 2 运动微分方程

图1所示为弹性矩形截面梁, 沿  $x$  方向的运动速度为  $v$ , 受到切向均布随从力  $q_0$  的作用。梁的跨度为  $L$ , 宽度为  $b$ , 高度为  $h$ , 材料密度为  $\rho$ , 弹性模量为  $E$ 。设梁的初始温度为  $\tau_0$ , 任一瞬时  $t$  梁的温度改变为  $T = T(z, t)$ 。

切向均布随从力作用下热弹耦合轴向运动梁的运动微分方程为<sup>[1,7]</sup>

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + q_0(L-x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

式中: 梁在  $z$  方向的位移  $w = w(x, t)$ ; 热弯矩  $M_T = bE\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} Tz dz$ , 其中  $\alpha_T$  为线热胀系数; 梁的横截面

\* 收稿日期: 2009-07-23; 修回日期: 2009-12-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(10872163); 陕西省教育厅科学研究计划项目(08JK394);

宝鸡文理学院重点项目(ZK09147)

作者简介: 郭旭侠(1976—), 女, 博士研究生, 讲师。

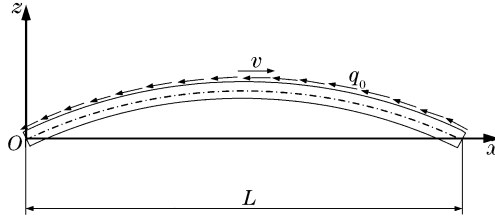


图 1 随力作用下的热弹耦合轴向运动梁

Fig. 1 An axially moving beam in the thermoelastic coupling case subjected to follower force

面积  $A = bh$ ; 横截面惯性矩  $I = bh^3 / 12$ 。

梁的热传导方程为<sup>[8]</sup>

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{E\alpha_T\tau_0}{\rho c_V} \frac{\partial}{\partial t} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{2}$$

式中: 导温系数  $a = k / (\rho c_V)$ ,  $k$  为导热系数,  $c_V$  为比定容热容。

把量纲一量  $\xi = x/L, \bar{z} = z/h, \bar{w} = w/h, \bar{T} = T/\tau_0, \bar{t} = (\sqrt{E/\rho})(t/L), c = \sqrt{\rho/E}v, q = q_0L^3/(EI)$  分别代入到方程(1)、(2)中, 得

$$\begin{cases} \frac{h^2}{12L^2} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + \alpha_T\tau_0 \frac{\partial^2 \bar{M}_T}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + 2c \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \bar{t}} + c^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{h^2}{12L^2} q(1 - \xi) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} - \frac{h^2}{aL} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{E\alpha_T h^4}{\rho c_V a L^3} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \bar{z} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi^2 \partial \bar{t}} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

式中:  $\bar{M}_T = \int_{-1/2}^{1/2} \bar{T} \bar{z} d\bar{z}$ 。

设方程(3)的解为

$$\bar{w}(\xi, \bar{t}) = W(\xi) e^{i\omega \bar{t}}, \quad \bar{T}(\bar{z}, \bar{t}) = T^*(\bar{z}) e^{i\omega \bar{t}} \tag{4}$$

将式(4)代入方程(3), 得

$$A_1 \frac{d^4 W}{d\xi^4} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-1/2}^{1/2} T^* \bar{z} d\bar{z} - \omega^2 W + 2ic\omega \frac{dW}{d\xi} + c^2 \frac{d^2 W}{d\xi^2} + A_1 q(1 - \xi) \frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0 \tag{5a}$$

$$\frac{d^2 T^*}{d\bar{z}^2} - A_3 i\omega T^* + A_4 i\omega \bar{z} \frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0 \tag{5b}$$

式中:  $A_1 = \frac{h^2}{12L^2}, A_2 = \alpha_T\tau_0, A_3 = \frac{h^2}{aL} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, A_4 = \frac{E\alpha_T h^4}{\rho c_V a L^3} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ,  $\omega$  为轴向运动耦合热弹梁横向振动的量纲一复频率。

求解方程(5b), 得

$$T^* = p_1 e^{r_1 \bar{z}} + p_2 e^{-r_1 \bar{z}} + \frac{E\alpha_T h^2}{\rho c_V L^2} \frac{d^2 W}{d\xi^2} \bar{z} \tag{6}$$

式中:  $p_1, p_2$  为待定系数,  $r_1 = \sqrt{A_3 i\omega}$ 。

将方程(6)代入方程(5a)得

$$(A_1 + \lambda) \frac{d^4 W}{d\xi^4} + [c^2 + q(1 - \xi)] \frac{d^2 W}{d\xi^2} + 2ic\omega \frac{dW}{d\xi} - \omega^2 W = 0 \tag{7}$$

式中:  $\lambda = \frac{E\alpha_T^2\tau_0 h^2}{12\rho c_V a L^2}$  为梁的量纲一耦合因数, 表征梁内温度场和应变场之间的耦合程度。

梁的两端恒温时, 边界条件为

$$\begin{cases} W|_{\xi=0} = W|_{\xi=1} = 0 \\ \frac{d^2 W}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 W}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0 \end{cases} \quad \text{两端简支,} \quad \begin{cases} W|_{\xi=0} = W|_{\xi=1} = 0 \\ \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \end{cases} \quad \text{两端固支} \tag{8}$$

### 3 幂级数法及特征方程

设式(7)的解为

$$W(\xi) = \sum_{n=1}^4 B_n V_n(\xi) \quad (9)$$

式中:  $B_n$  是待定常数,  $V_n(\xi)$  为基本解, 即

$$V_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{n,i} \xi^i \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

将式(9)和式(10)代入式(7)中, 得

$$(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(A_1 + \lambda)\alpha_{n,i+4} + (i+2)(i+1)(q+c^2)\alpha_{n,i+2} + (i+1)(2ic\omega - iq)\alpha_{n,i+1} - \omega^2\alpha_{n,i} = 0 \quad (11)$$

令  $\alpha_{n,i} = d_{n,i} + ie_{n,i}$ ,  $\omega = \omega_o + i\omega_d$ , 并代入式(11), 将实部、虚部分开, 得到

$$\begin{cases} d_{n,i+4} = \frac{f}{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(A_1 + \lambda)} \\ e_{n,i+4} = \frac{g}{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(A_1 + \lambda)} \end{cases} \quad (12)$$

式中:

$$\begin{aligned} f &= -(i+2)(i+1)(q+c^2)d_{n,i+2} + (i+1)iqd_{n,i+1} + 2(i+1)c\omega_d d_{n,i+1} + 2(i+1)c\omega_o e_{n,i+1} + \\ &\quad (\omega_o^2 - \omega_d^2)d_{n,i} - 2\omega_o\omega_d e_{n,i} \\ g &= -(i+2)(i+1)(q+c^2)e_{n,i+2} + (i+1)iqe_{n,i+1} - (i+1)(2c\omega_o d_{n,i+1} - 2c\omega_d e_{n,i+1}) + \\ &\quad 2\omega_o\omega_d d_{n,i} + (\omega_o^2 - \omega_d^2)e_{n,i} \end{aligned}$$

式中:  $\omega_o$ 、 $\omega_d$  分别表示  $\omega$  的实部和虚部。

由于  $f$ 、 $g$  中含有待定系数  $d_{n,i+2}$ 、 $e_{n,i+2}$ 、 $d_{n,i+1}$ 、 $e_{n,i+1}$ 、 $d_{n,i}$ 、 $e_{n,i}$ , 式(12)被称为待定系数的递推公式。由幂级数解的归一化条件可知<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} V_1(0) = 1, & V_1'(0) = V_1''(0) = V_1'''(0) = 0 \\ V_2'(0) = 1, & V_2(0) = V_2''(0) = V_2'''(0) = 0 \\ V_3''(0) = 1, & V_3(0) = V_3'(0) = V_3'''(0) = 0 \\ V_4'''(0) = 1, & V_4(0) = V_4'(0) = V_4''(0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

得

$$\begin{cases} d_{1,0} = 1, & d_{1,1} = d_{1,2} = d_{1,3} = 0 \\ d_{2,1} = 1, & d_{2,0} = d_{2,2} = d_{2,3} = 0 \\ d_{3,2} = 0.5, & d_{3,0} = d_{3,1} = d_{3,3} = 0 \\ d_{4,3} = 1/6, & d_{4,0} = d_{4,1} = d_{4,2} = 0 \\ e_{n,i} = 0 & n=1, 2, 3, 4, \quad i=1, 2, 3 \end{cases} \quad (14)$$

边界条件式(8)可写为

$$\begin{cases} W(0) = B_1 = 0, & W''(0) = B_3 = 0 \\ B_2 \sum_{i=0}^{\infty} (d_{2,i} + ie_{2,i}) + B_4 \sum_{i=0}^{\infty} (d_{4,i} + ie_{4,i}) = 0 \\ B_2 \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)(d_{2,i+2} + ie_{2,i+2}) + B_4 \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)(d_{4,i+2} + ie_{4,i+2}) = 0 \end{cases} \quad (15a)$$

$$\begin{cases} W(0) = B_1 = 0, & W'(0) = B_2 = 0 \\ B_3 \sum_{i=0}^{\infty} (d_{3,i} + ie_{3,i}) + B_4 \sum_{i=0}^{\infty} (d_{4,i} + ie_{4,i}) = 0 \\ B_3 \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(d_{3,i+1} + ie_{3,i+1}) + B_4 \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(d_{4,i+1} + ie_{4,i+1}) = 0 \end{cases} \quad (15b)$$

式(15a)中  $B_2, B_4$  不全为 0, 式(15b)中  $B_3, B_4$  不全为 0, 因此式(15a)和(15b)的系数行列式为 0, 得特征方程为

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} (d_{2,i} + ie_{2,i}) & \sum_{i=0}^{\infty} (d_{4,i} + ie_{4,i}) \\ \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)(d_{2,i+2} + ie_{2,i+2}) & \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)(d_{4,i+2} + ie_{4,i+2}) \end{bmatrix} \quad (16a)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} (d_{3,i} + ie_{3,i}) & \sum_{i=0}^{\infty} (d_{4,i} + ie_{4,i}) \\ \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(d_{3,i+1} + ie_{3,i+1}) & \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(d_{4,i+1} + ie_{4,i+1}) \end{bmatrix} \quad (16b)$$

分别求解方程(16a)和(16b), 即可得到 2 种边界条件下, 受切向均布随从力作用时热弹耦合轴向运动梁的复频率。从而分析量纲一运动速度、量纲一热弹耦合系数和随从力等参数对梁的稳定性的影响。

### 4 计算结果与分析

当  $\lambda=0, c=0, q=0$  时, 方程(7)退化为弹性梁自由振动的振型方程。首先计算弹性梁自由振动时的前 3 阶固有频率和 1 阶临界载荷, 计算结果与文献的比较见表 1。计算时  $i=50$ 。

表 1 弹性梁前 3 阶固有频率和 1 阶发散载荷的本文解与文献中解的比较

Table 1 Comparison of the first three orders natural frequencies and the divergence load of the first order for elastic beams with those in reference

边界条件	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$q_{d1}$
两端简支	9.869 6	39.478 4	88.826 8	18.960
	9.869 6 <sup>[10]</sup>	39.478 4 <sup>[10]</sup>	88.826 4 <sup>[10]</sup>	18.956 <sup>[3]</sup>
两端固支	22.376 6	61.682 7	120.937 7	80.310
	22.373 3 <sup>[10]</sup>	61.672 8 <sup>[10]</sup>	120.903 4 <sup>[10]</sup>	80.302 <sup>[3]</sup>

#### 4.1 两端简支梁

图 2~4 分别表示不同条件下梁的量纲一复频率与量纲一运动速度之间的关系。图 2 中量纲一热弹耦合因子  $\lambda=0$ , 量纲一随从力  $q=10$ ; 图 3 中  $\lambda=0.2$ ; 图 4 中  $q=15$ 。比较图 2~4 可知, 其他参数相同,  $q=10$ , 当  $\lambda$  从 0 增大到 0.2 时, 第 1 阶模态的发散临界速度  $c$  由 2.20 变为 2.63; 当  $\lambda=0.2$  时,  $q$  由 10 增大到 15, 此时, 第 1 阶模态的发散临界速度  $c$  由 2.63 减小到 2.06。图 2~4 中的第 2 阶模态都出现了单一模态颤振失稳, 只是条件不同产生颤振失稳时的临界速度不同。其他参数相同时, 第 2 阶模态颤振失稳时的临界速度随量纲一热弹耦合因子的增大而增大, 随量纲一随从力的增大而减小。

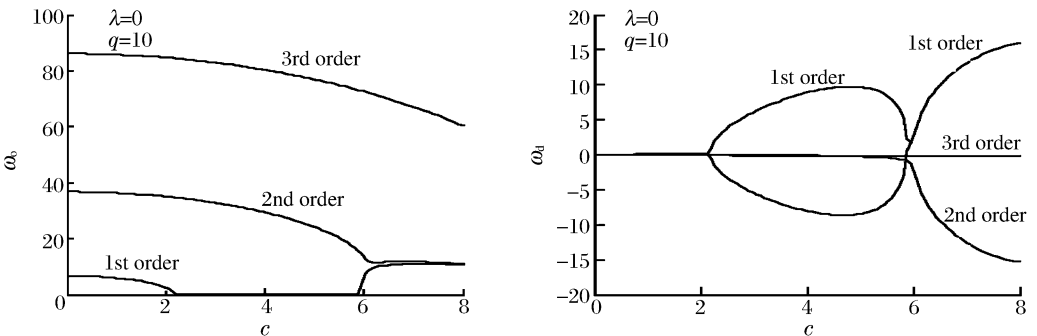


图 2 量纲一复频率随量纲一运动速度的变化曲线

Fig. 2 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless moving speeds

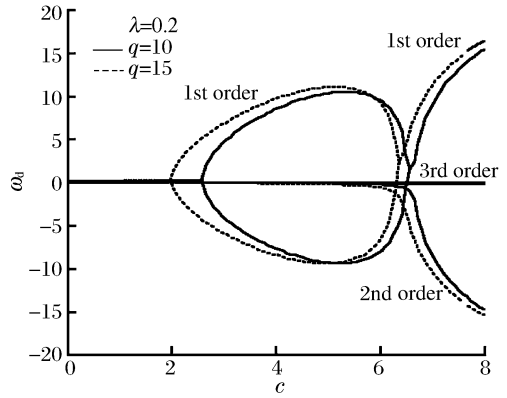
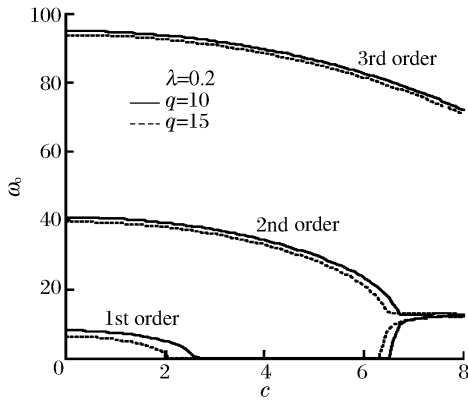


图3 量纲一复频率随量纲一运动速度的变化曲线

Fig. 3 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless moving speeds

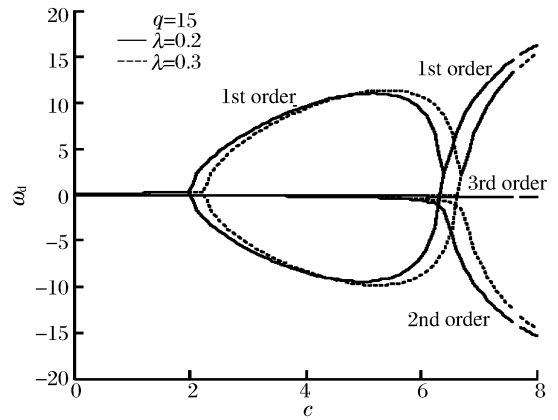
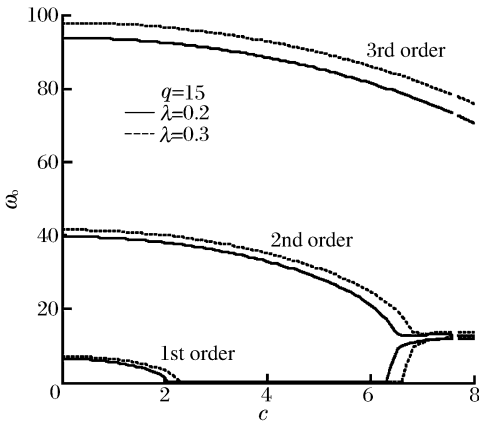


图4 量纲一复频率随量纲一运动速度的变化曲线

Fig. 4 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless moving speeds

图5、6 分别表示不同条件下,量纲一复频率与量纲一随从力之间的关系曲线。图5中量纲一运动速度  $c=1$ ,可以看出随着热弹耦合因子的增大,第1、2阶模态的发散载荷也增大;图6中量纲一运动速度  $c=3$ 。比较图5、6可知,其他参数相同的条件下,随着量纲一运动速度的增大,第1阶模态的发散载荷减小。由于参数的改变,图6中第2阶模态出现了单一模态颤振稳态。

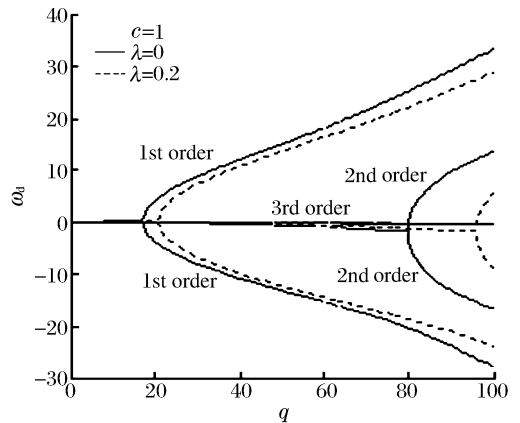
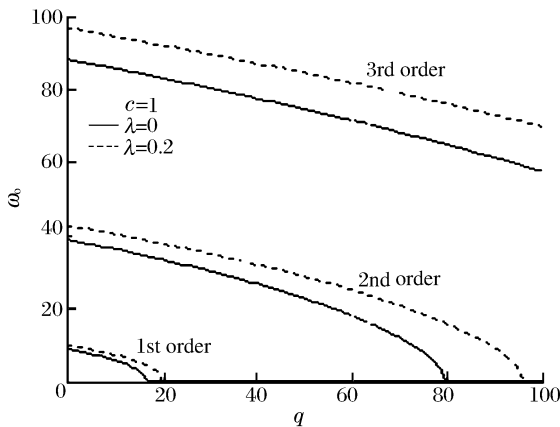


图5 量纲一复频率随量纲一随从力的变化曲线

Fig. 5 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless follower forces

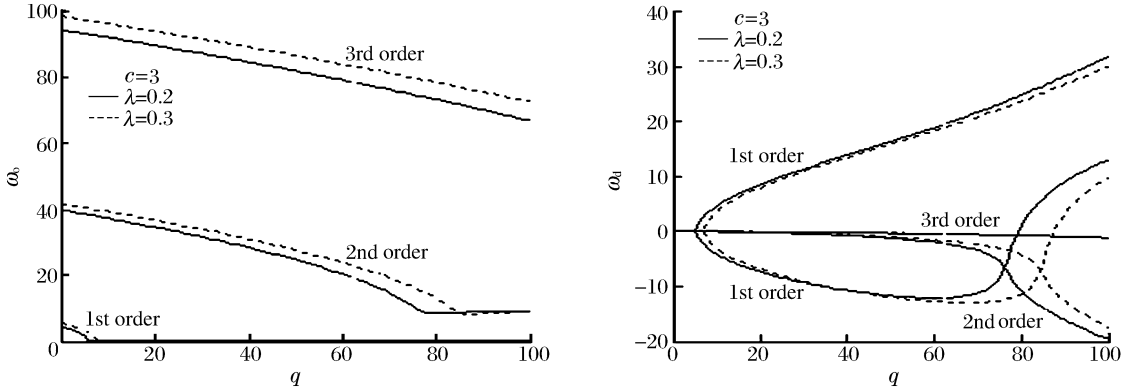


图 6 量纲一复频率随量纲一随从力的变化曲线

Fig. 6 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless follower forces

### 4.2 两端固支梁

图 7、8 分别表示不同条件下,量纲一复频率与量纲一运动速度之间的关系曲线。图 7 中量纲一随从力  $q=40$ ,从图中可以看出随着量纲一热弹耦合因子的增大,第 1 阶模态的临界速度增大。图 8 与图 7 相比, $q$  增大到 60,其他参数相同条件下,随着量纲一随从力的增大,第 1 阶模态的临界速度减小。图 7、8 中的第 2 阶模态也出现了单一模态颤振失稳,而且产生颤振失稳时的临界速度随着参数的改变而变化。

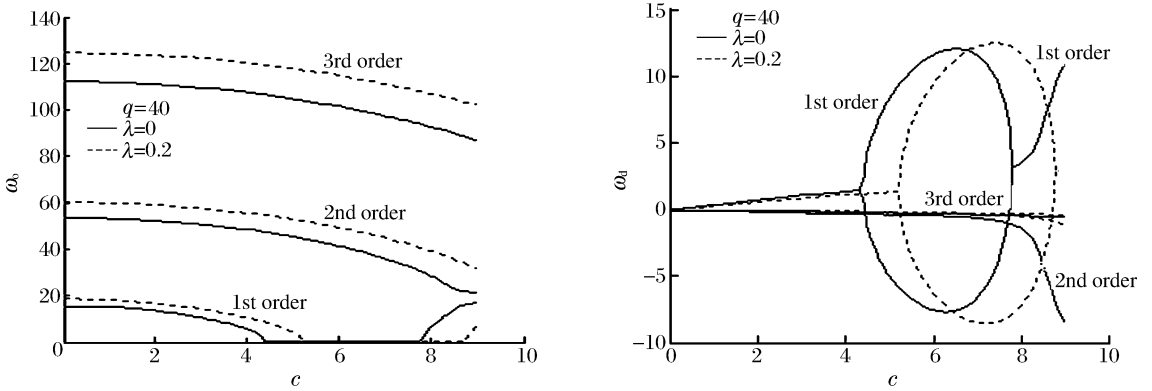


图 7 量纲一复频率随量纲一运动速度的变化曲线

Fig. 7 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless moving speeds

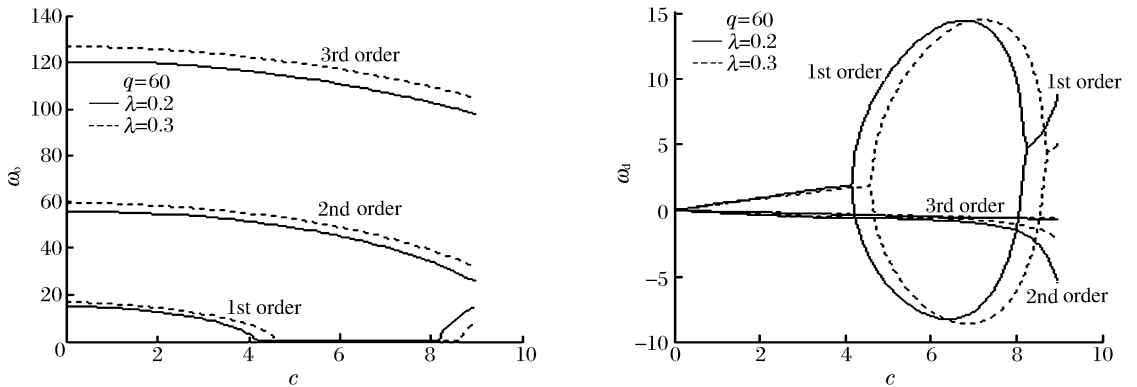


图 8 量纲一复频率随量纲一运动速度的变化曲线

Fig. 8 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless moving speeds

图 9、10 分别表示不同条件下,量纲一复频率与量纲一随从力之间的关系曲线。图 9 中量纲一运动速度  $c=1$ ,随着量纲一热弹耦合因子的增大,第 1 阶模态的临界载荷  $q$  由 78.5 增大到 93.1,第 2 阶模态没有出现发散失稳。图 10 中量纲一运动速度  $c=3$ ,随着量纲一热弹耦合因子的增大,第 1 阶模态的临界载荷也增大。图 9 与图 10 相比,其他参数相同的条件下,随着量纲一运动速度的增大,第 1 阶模态的临界载荷减小。

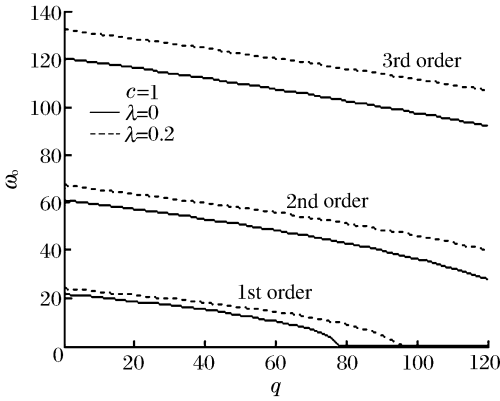


图 9 量纲一复频率随量纲一随从力的变化曲线

Fig. 9 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless follower forces

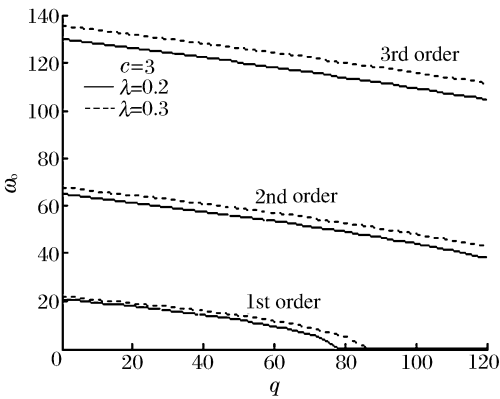
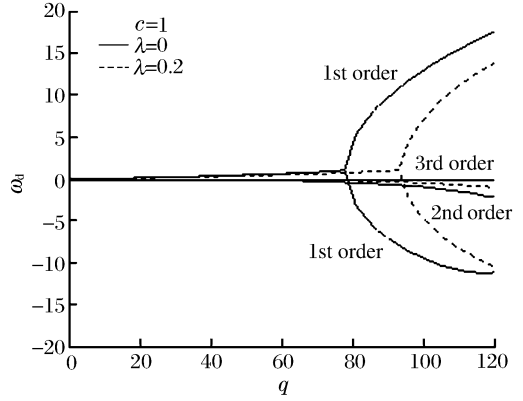
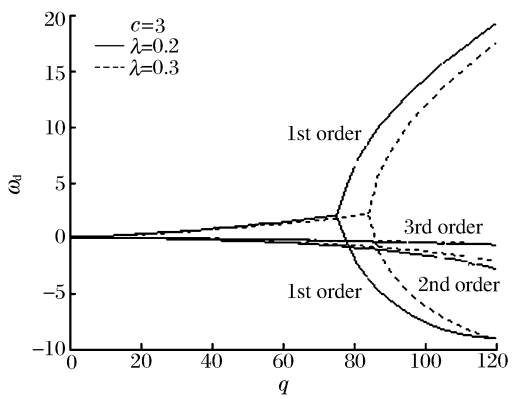


图 10 量纲一复频率随量纲一随从力的变化曲线

Fig. 10 Dimensionless complex frequencies versus dimensionless follower forces



### 5 结论

计算结果表明:其他参数相同的条件下,随着热弹耦合因子的增大,第 1 阶模态的临界速度和临界载荷都增大;增大量纲一运动速度,第 1 阶模态的临界载荷减小;第 1 阶模态的临界速度随着量纲一随从力的增大而减小。

### 参考文献:

[1] 赵凤群,王忠民. 点弹性支承下非保守粘弹性杆的稳定性分析[J]. 西安理工大学学报,2003,19(3):230-234.  
 ZHAO Feng-qun, WANG Zhong-min. Stability analysis of viscoelastic rod with elastic point supports subjected to nonconservative forces[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2003,19(3):230-234.

[2] Langthjem M A, Sugiyama Y. Dynamic stability of viscoelastic beam under follower forces[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000,238(5):809-851.

[3] 嵇瑞花,冯叔忠. 粘弹性梁在随从力作用下的动力稳定性[J]. 工程力学,2005,22(3):26-30.  
 ZHUO Rui-hua, FENG Shu-zhong. Dynamic stability of viscoelastic beam under follower forces[J]. Engineering

Mechanics, 2005, 22(3): 26-30.

- [4] Fung R F, Huang J S, Chen W H. Dynamic stability of viscoelastic beam subjected to harmonic and parametric excitations simultaneously[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 198(1): 1-16.
- [5] Guo F L, Rogerson G A. Thermoelastic coupling effect on a micro-machined beam resonator[J]. Mechanics Research Communications, 2003, 30(6): 513-518.
- [6] Sun Y X, Fang D N, Ai K S. Thermoelastic damping in micro-beam resonators[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(10): 3213-3229.
- [7] Guo X X, Wang Z M, Wang Y, et al. Analysis of the coupled thermoelastic vibration for axially moving beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 325(3): 597-608.
- [8] 严宗达, 王洪礼. 热应力[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [9] 周银锋, 王忠民, 王砚. 考虑随从力作用的运动粘弹性板的动力稳定性[J]. 工程力学, 2009, 26(1): 25-30.  
ZHOU Yin-feng, WANG Zhong-min, WANG Yan. Dynamic stability of moving viscoelastic plate subjected to follower forces[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(1): 25-30.
- [10] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1990.

## Thermoelastic coupling stability of the axially moving beam subjected to follower force<sup>\*</sup>

GUO Xu-xia<sup>1,2</sup>, WANG Zhong-min<sup>1</sup>

(1. School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, Shaanxi, China;

2. Mechanical and Electrical Engineering Department, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721007, Shaanxi, China)

**Abstract:** The thermoelastic coupling stability of the axially moving beam under the action of uniformly distributed tangential follower forces was investigated. The differential equation of motion for the axially moving beam under the action of uniformly distributed tangential follower forces was established, and the eigenequation for the axially moving beam with two kinds of boundary conditions subjected to follower forces was derived by a normalized power series method. The first three orders dimensionless complex frequencies of the system were calculated, and the effects of the dimensionless moving speed, the dimensionless thermoelastic coupling factor, the dimensionless follower forces on the stability of the axially moving beam in the thermoelastic coupling case were analyzed.

**Key words:** solid mechanics; stability; follower force; axially moving beam; thermoelastic coupling; power series method

\* Received 23 July 2009; Revised 14 December 2009

Supported by the National Natural Science Foundation of China (10872163)

Corresponding author: GUO Xu-xia, gxx5432106@sina.com