

文章编号: 1001-1455(2012)01-0055-06

# 楔形体入水时域解的复边界元数值分析\*

王永虎<sup>1</sup>, 魏照宇<sup>2</sup>

(1. 中国民航飞行学院, 四川 广汉 618307;

2. 西北工业大学航海学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 基于速度势理论, 利用复数变量边界元法对二维楔形体常速入水冲击的时域解进行了数值研究。以相似解作为数值计算的初始条件, 采用时域解射流线性近似处理方法, 利用复数变量边界元法进行求解, 以减少计算量和数值误差。深入讨论了扩展坐标系求时域解、射流处理、网格划分和网格更新等关键技术。最后数值计算了不同斜升角楔形体入水时的自由液面隆起、射流飞溅和压力分布, 经与相似解结果作比较, 自由液面隆起轮廓基本吻合, 而压力分布更符合实际情况, 从而证明了模型及分析方法的正确性。

**关键词:** 流体力学; 复边界元; 入水冲击; 楔形体; 射流线性近似

**中图分类号:** O351

**国标学科代码:** 13025

**文献标志码:** A

入水冲击问题涉及到航空航天领域中的空投和水上迫降<sup>[1]</sup>, 以及船舶与海洋工程领域中的雷弹入水冲击<sup>[2]</sup>、海浪砸击甲板、海浪冲击船体与海洋结构物等。入水结构体中楔形体由于结构简单, 在入水冲击问题的理论和数值研究中应用广泛。早在 1929 年, T. Von Karman<sup>[3]</sup> 基于动量守恒定理分析了楔形体入水冲击问题, 后来 V. H. Wagner<sup>[4]</sup> 在 T. Von Karman 理论的基础上提出了最初的自相似理论。R. Zhao 等<sup>[5]</sup> 利用边界元法求得时域解, 为了避免出现数值问题, 在计算中剪掉对楔形体运动影响不大的射流, 造成部分流体能量损失。G. X. Wu 等<sup>[6-7]</sup> 基于浅水理论求解了楔形体入水问题的相似解, 并利用泰勒展开法求得时域解, 然后利用此法对水柱砰击楔形体的射流飞溅做了近似处理。

本文中, 以势流理论为基础, 以柯西积分为积分方程, 利用复边界元法数值求解楔形体常速入水的时域解, 采用一种新的线性化方法处理射流简化处理的能量损耗问题, 并着重分析在数值计算中涉及到的一些关键技术, 更深入和全面地分析自由液面和物面缺口的消除方式、滤波和插值方法的实际应用, 最后数值给出不同斜升角楔形体入水时的自由液面隆起、射流飞溅和压力分布。

## 1 数值模型及分析方法

### 1.1 数值模型

斜升角为  $\gamma$  的二维对称楔形体常速垂直入水冲击模型和计算域如图 1 所示, 图中  $S_F$  表示自由液面,  $S_C$  表示远方控制面边界。采用静止的笛卡尔坐标系  $Oxy$ , 点  $O$  位于楔形体顶点和静水面重合处, 即时间  $t=0$  处,  $x$  沿静水面向右为正,  $y$  轴垂直向上为正。假设流体不可压缩、无粘性且无旋。则速度势函数  $\phi$  在流体域  $\Omega$  内满足拉普拉斯方程<sup>[1-2]</sup>

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

在楔形体表面流体介质遵循不可穿越壁面的边界条件为

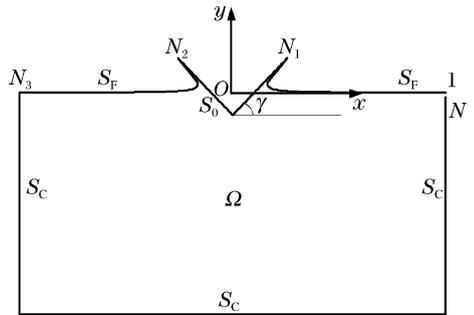


图 1 楔形体入水冲击模型和计算域

Fig. 1 Sketch map of a wedge water-entry model and computational domain

\* 收稿日期: 2010-07-09; 修回日期: 2010-11-02

基金项目: 中国民航飞行学院科研基金项目(J201-78)

作者简介: 王永虎(1974—), 男, 博士, 讲师。

$$\partial\phi/\partial\mathbf{n} = \mathbf{v}n_y \quad (2)$$

式中： $\mathbf{v}$ 为结构体向下运动的速度(向下为负)， $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (-\sin\gamma, \cos\gamma)$ 为结构体表面的法向单位向量，方向由固体域指向流体域。

由于入水冲击持续时间较短，流体重力的影响可以忽略<sup>[2,8]</sup>。动力学自由液面边界条件始终为大气压，运动学边界条件为自由液面上的水质点始终处在自由液面上。欧拉形式和拉格朗日形式的边界条件分别为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\varphi \nabla\varphi = 0 \quad (3)$$

$$d\phi/dt = \nabla\phi \nabla\phi/2 \quad (4)$$

同时，控制面刚性璧的边界条件满足

$$\partial\phi/\partial\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5)$$

## 1.2 时域解

在时域分析中，可以将速度势写成以下形式

$$\phi(x, y, t) = vs\varphi(\xi, \eta, t) \quad (6)$$

式中： $\xi = x/s, \eta = y/s$ 为转换坐标， $s = \int_0^t v d\tau = vt$ 为楔形体在垂直方向上的位移。由于 $\varphi$ 满足拉普拉斯方程，则拉格朗日形式的自由液面边界条件变为

$$\frac{d(s\xi)}{dt} = v\varphi_\xi, \quad \frac{d(s\eta)}{dt} = v\varphi_\eta \quad (7)$$

$$\frac{d(s\varphi)}{dt} = \frac{v}{2}(\varphi_\xi^2 + \varphi_\eta^2) \quad (8)$$

随着计算时间的推移，楔形体实际入水深度增加，相应的计算域在扩大，这与实际物理现象一致。而在数值分析中，由于涉及到的单元数和单元大小随计算域的变化而变化，不利于进一步数值计算，因此这里采用扩展坐标系求时域解，由于在 $(x, y)$ 和 $(\xi, \eta)$ 下的参数正好是 $s$ 的倍数，既避免出现微小单元，也避免了数值计算误差，并且在数值程序上容易实现。

## 1.3 复数变量边界元法应用

为求时域解，利用复数边界元法<sup>[9]</sup>和在扩展坐标系下的复速度势分析入水问题，由柯西积分方程知

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(z)}{z - z_0} dz \quad (9)$$

式中： $z = \xi + i\eta$ 为流体边界上的点， $z_0$ 为流域内的一点，积分方向为沿流体边界正向。将流体边界划分为线性单元，则边界的复速度势可以写成每个单元内复速度势的线性逼近组合

$$F = \sum_{j=1}^n F_j N_j(z) \quad (10)$$

式中：按照逆时针定义节点编号 $i$ 和 $j$ ，右边楔形体物面和自由液面的交点编号为 $N_1$ ，左边物面和自由液面的交点为 $N_2$ ，左边自由液面和控制面的交点是 $N_3$ ，如图1所示。式(10)中， $N_j(z)$ 为线性基函数

$$N_j(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & z \in \Gamma_{j-1} \\ \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} & z \in \Gamma_j \\ 0 & z \notin \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j \end{cases} \quad (11)$$

将 $N_j(z)$ 依次代入式(9)、(10)，然后使 $z_0$ 逼近边界单元的每一个节点 $k$ ，则有

$$\sum_{j=1}^n A_{kj} F_j = 0 \quad (12)$$

式中：当 $k = j - 1, j, j + 1$ 时需要利用极限的方法求出 $A_{kj}$ <sup>[10]</sup>。另外，对于 $A_{kj}$ 中的复对数利用下式求解

$$\ln \frac{z_{j+1} - z_k}{z_{j-1} - z_k} = \ln \left| \frac{z_{j+1} - z_k}{z_{j-1} - z_k} \right| + i\theta(j+1, j) \tag{13}$$

式中： $\theta(j+1, j)$  为  $z_0$  与  $z_j$  及  $z_{j+1}$  两条直线所夹的中心角，此时  $z_0$  即为  $z_k$ 。而  $A_{kj}$  的虚部则为两个单元所夹的内角大小，则公式(13)可写成以下形式<sup>[6]</sup>

$$\sum_{\substack{j \in S_0 \\ j \in S_C}} A_{kj} \phi_j + i \sum_{j \in S_F} A_{kj} \psi_j = - \sum_{j \in S_F} A_{kj} \phi_j - i \sum_{\substack{j \in S_C \\ j \in S_0}} A_{kj} \psi_j \tag{14}$$

式中：右边为自由液面上的速度势与物面上的流函数，都为已知量；另外，控制面和自由液面以及控制面与物面的交点上的速度势和流函数也都为已知量，都被移动到方程的右边。公式左边是待求物面上的速度势及自由液面上的流函数。对于对称楔形体，控制面上的流函数可认为始终为零。

为了提高矩阵方程的求解质量，应避免数值发散。计算时，当  $1 \leq k \leq N_1$  和  $N_2 \leq k \leq N_3$  时，取方程实部，而当  $N_1 \leq k \leq N_2$  和  $N_3 \leq k \leq N$  时，取方程的虚部。每一次求解出自由液面上的速度势和流函数后，可利用步进法进行下一步的迭代运算，如此循环直至结束。

### 1.4 时域压力

在求得每一步边界节点上的速度势和节点坐标之后，物面上的压力分布通过伯努利方程求解

$$p = -\rho \phi_t - \rho(\phi_x^2 + \phi_y^2)/2 \tag{15}$$

式中： $\phi_t$  是对时间  $t$  的导数，利用解边界值的方法求解。由于采用有限差分法求解各时间步的速度势存在一定的误差，本文中采用一种新方法以弥补这个缺陷。由于在自由液面上  $p=0$ ，因此有

$$\phi_t = -(\phi_x^2 + \phi_y^2)/2 \tag{16}$$

定义一个类似于复速度势的量  $\omega = \chi + i\omega$  来求解  $\phi_t$  的边值问题，将  $\phi_t$  写成  $\phi_t = v^2 \chi(\xi, \eta, t)$ ，利用物面边界条件<sup>[11]</sup>的特点，则自由液面和物面边界条件变为

$$\chi = -(\phi_\xi^2 + \phi_\eta^2)/2, \quad \omega = \varphi_\eta \tag{17}$$

求解物面压力时，为减小数值误差，对  $\chi$  和  $\omega$  作特殊处理。因为射流处物面上的压力接近于零，可直接令物面上的  $\chi = -\nabla\varphi \nabla\varphi/2$ ，而自由液面上的  $\omega$  仍利用泰勒展开法求解。求出  $\chi$  后即可用来求物面上的压力分布和结构体受到的载荷。值得注意的是，求解物面上的  $\partial\chi/\partial n$  时需要使用新求解出来的  $\chi$ 。

### 1.5 射流处理技术

入水产生的射流运动速度很快，参数变化剧烈，虽然不会对结构体的运动产生很大的影响，但在数值求解过程中为了很好地捕捉射流运动，需要在射流上划分足够密的网格，使网格的大小和射流的厚度相匹配，这就会造成单元尺度变小和单元数量增多，从而提高计算机硬件的要求。而且当物面节点和射流上的节点离得太近时，还需要对射流进行特殊的处理<sup>[7-8]</sup>，以避免由病态方程引起的数值误差。

设  $(z_k, z_{k+1})$  为自由液面上的一个单元，由线性插值基函数获得  $(\xi_k, \eta_k)$  节点，然后做垂直于物面的垂线与物面单元  $(z_j, z_{j+1})$  相交，因为射流很薄，可以采用线性形式表示物面上的速度势

$$\varphi = A + B\xi + C\eta \tag{18}$$

与此同时，过物面上点  $z_j$  引垂直于物面的直线交自由液面于点  $z_s$ ，因为物面上速度势沿此垂线的导数(物面边界条件)和自由液面上的速度势已知，自由液面上节点距物面的距离也已知，因此可将自由液面上的速度势在物面交点进行泰勒展开，即可求出物面上的速度势

$$\varphi_j = \varphi_s + \sqrt{(x_s - x_j)^2 + (y_s - y_j)^2} \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} \tag{19}$$

在单元  $(z_k, z_{k+1})$  上，进一步有

$$\phi_k = A + B\xi_k + C\eta_k, \quad \phi_{k+1} = A + B\xi_{k+1} + C\eta_{k+1} \tag{20}$$

根据物面边界条件和速度势的线性表达式，得到

$$-B(\eta_{j+1} - \eta_j) + C(\xi_{j+1} - \xi_j) = -(\eta_{j+1} - \eta_j) \tag{21}$$

将式(21)代入式(20)，整理得

$$B = \frac{(\phi_{k+1} - \phi_k) + (\eta_{k+1} - \eta_k)}{(\xi_{k+1} - \eta_k) + \tan\beta(\eta_{k+1} - \eta_k)}, \quad C = B \tan\beta - 1 \quad (22)$$

同样,根据物面边界条件将自由液面上的流函数写为

$$\psi = D - C\xi + B\eta \quad (23)$$

进一步,得到  $D$  在物面上的表达式

$$D = \psi_j + C\xi_j - B\eta_j \quad (24)$$

然后,可得到自由液面上的流函数

$$\psi_k = D - C\xi_k + B\eta_k \quad (25)$$

为实时更新自由液面,在迭代过程中需实时获得射流上的流函数和速度势值,以上方法可以满足要求,极大地减少计算量,并且不会出现病态矩阵产生数值误差累计。在数值计算过程中,单元或长或短会造成相邻单元尺度不匹配的锯齿波<sup>[10]</sup>,射流上的点也可能会穿透物面使数值程序无法进行下去<sup>[11]</sup>,为了解决这些问题,本文中采用三次样条插值<sup>[13]</sup>和网格更新技术<sup>[14]</sup>对自由液面单元进行重新划分。

## 2 数值算例

初始条件设定:数值计算的前提条件与文献[5]相同,在计算中给定入水的初始位移  $s$  (即相似解<sup>[4]</sup>中的  $v_t$ ),然后代入相似解再求时域解。数值测试分析表明,如果初始位移  $s$  值取在  $10^{-5} \sim 10^{-4}$  m 之间,数值结果无明显差异,因此取  $s = 10^{-5}$  m。为了保证数值迭代的每一步中,流体质点运动距离不超过射流处单元大小的一半,应尽量减小时间步长。值得注意的是,对小斜升角需要使用更小的时间步长,以避免在数值计算过程中自由液面的流体单元穿透物面。

边界元网格划分:数值算例中的控制体取  $[\pm \max(10, 10/\tan\gamma_i), -10]$ 。在靠近结构体的自由液面上均匀划分网格,远离结构体的自由液面网格大小按等比数列依次递增;在物面上均匀划分网格,且网格大小和自由液面上射流处的网格大小保持一致。在划分网格时保持相邻单元比例接近 1,这样可以避免数值发散。控制面上的网格大小保持为物面单元的 5 倍左右。经过数值测试分析可知,物面上和射流处单元大小取  $0.04 \sim 0.05$  时会节省内存,同时也能达到预期精度,因此本文中网格大小取 0.04。

分别对斜升角为  $20^\circ \sim 80^\circ$  的楔形体入水冲击进行数值计算,并对时域解与文献[5]中的相似解进行对比,其中液面隆起和射流飞溅轮廓线的对比如图 2 所示。从图 2 中可以看出,时域解和相似解曲线自

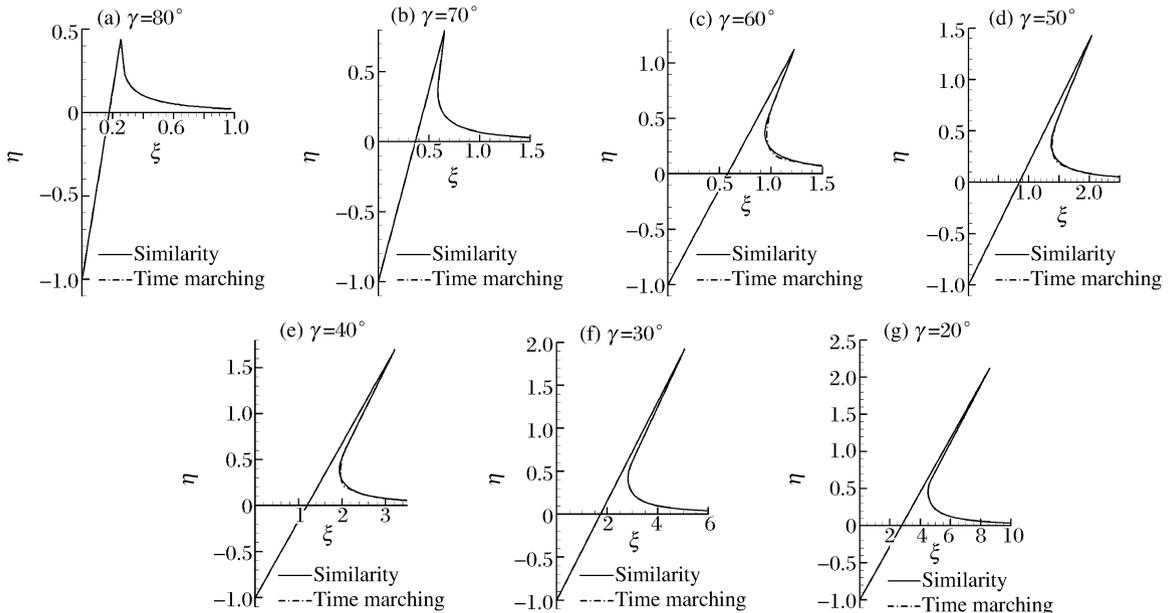


图 2 时域解和相似解的自由液面隆起轮廓对比

Fig. 2 Comparison of similarity solution with time domain solution of the wave profile of free surface

由液面轮廓线重合得很好。由于本文中采用射流线性近似处理方法,在数值计算中不需要计算射流上的流函数和速度势,因此较大地提高了数值计算效率。

由于数值计算中射流处的压力可以精确为零,可以避免物面压力出现严重的震荡现象,并且不需要将部分射流剪掉,因此求出的压力分布更合理,图 3 所示为的楔形体表面归一化压力  $p/\rho v^2$  分布。楔形体入水冲击的特性与斜升角有很大关系,当斜升角很小时物面上的压力很大,压力呈现中凸,这是由气垫效应引起的<sup>[2]</sup>,同时射流飞溅很细很长;而斜升角大的入水情况,楔形体物面压力明显减小,出现中凹现象,射流飞溅又钝又短。

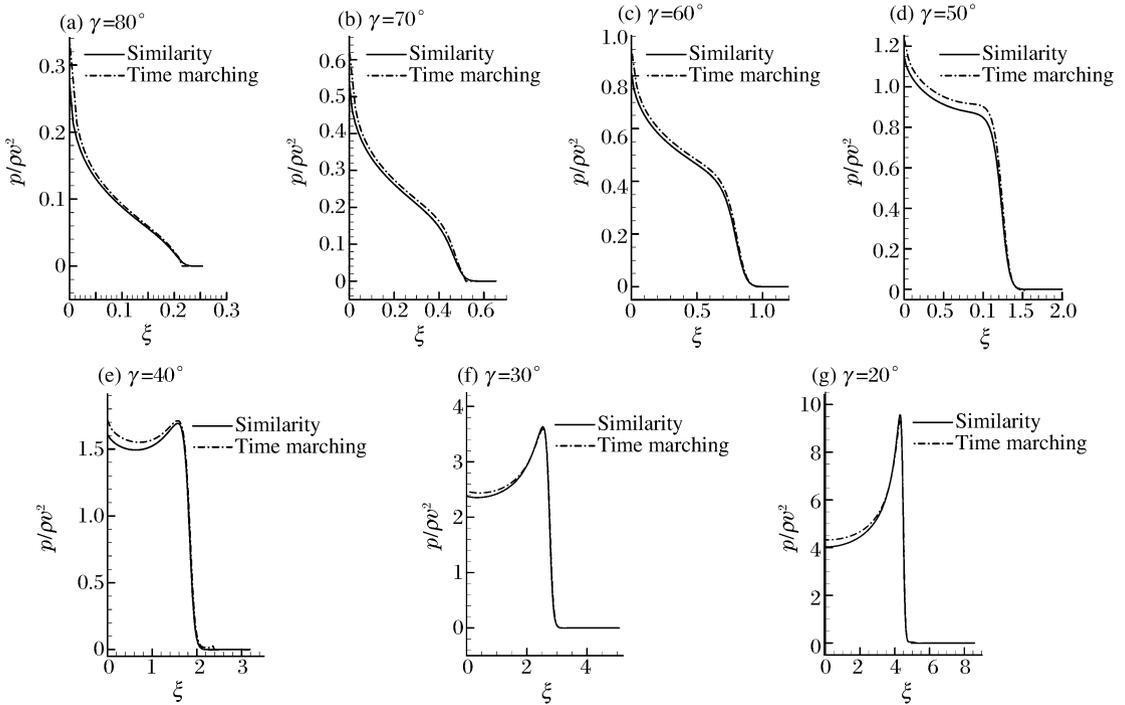


图 3 时域解和相似解的物面压力分布对比

Fig. 3 Comparison of similarity solution with time domain solution of the pressure distribution

### 3 结束语

基于速度势理论,建立了对称楔形体垂直入水冲击数值模型,利用复变边界元法,以及射流的近似处理技术求解了时域解,并将数值分析的时域解与文献的相似解进行对比,结果吻合很好,可为入水问题分析提供一定的参考。分析结果也表明,无论是大斜升角还是小斜升角情况,采用射流线性处理技术能更好地模拟射流,而且当射流很长很细时数值程序都可以顺利进行下去;在射流处压力可以精确为零,不会出现震荡,因此可以得到精确的物面压力分布。入水过程中斜升角对物面压力分布和射流飞溅的影响很大。数值计算中的时间步长和初始位移的选取、插值方法的应用及网格单元的大小对数值结果都有影响。

### 参考文献:

[1] 王永虎,石秀华. 入水冲击问题研究的现状与进展[J]. 爆炸与冲击,2008,28(3):276-282.  
 WANG Yong-hu, SHI Xiu-hua. Review on research and development of water-entry impact problem[J]. Explosion and Shock Waves, 2008,28(3):276-282.

[2] 王永虎. 空投雷弹入水冲击响应分析及相关技术研究[D]. 西安:西北工业大学,2008.

[3] Von Karman T. The impact of seaplane floats during landing[R]. NACA TN 321. Washington DC, USA, 1929.

[4] Wagner V H. Phenomena associated with impacts and sliding on liquid surfaces[J]. Zeitschrift fuer Angewandt

Mathematik und Mechanik, 1932,12(4):193-215.

- [5] Zhao R, Faltinsen O. Water entry of two-dimensional bodies[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1993,246:593-612.
- [6] Wu G X, Sun H, He Y S. Numerical simulation and experimental study of water entry of a wedge in free fall motion[J]. Journal of Fluids and Structures, 2004,19(3):277-289.
- [7] Wu G X. Two dimensional liquid column and liquid droplet impact on a solid wedge[J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2007,60(4):497-511.
- [8] Battistin D, Iafrati A. Hydrodynamic loads during water entry of two-dimensional and axisymmetric bodies[J]. Journal of Fluids and Structures, 2003,17(5):643-664.
- [9] Theodore V, Hromadka II, Chintu L. The complex variable boundary element method in engineering analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [10] Luminita G, Valentin G, Mihai D, et al. A complex variable boundary element method for the flow around obstacles[C]//Proceedings of the World Congress on Engineering. London, UK, 2009.
- [11] Longuet-Higgins M S, Cokelet E D. The deformation of steep surface waves on water: I. A numerical method of computation[J]. Proceedings of the Royal Society of London: A, 1976,350:1-26.
- [12] Bhat R B, Chakraverty S. Numerical analysis in engineering[M]. Pangbourne: Alpha Science International Ltd, 2004.
- [13] Wu G X. Hydrodynamic force on a rigid body during impact with liquid[J]. Journal of Fluids and Structures, 1998,12(5):549-559.
- [14] Sun H. A boundary element method applied to strong nonlinear wave-body interaction problems[D]. Trondheim, Norway: Norges Teknisk-naturvitenskaplige Universitet, 2007.

## Numerical analysis for water entry of wedges based on a complex variable boundary element method\*

WANG Yong-hu<sup>1</sup>, WEI Zhao-yu<sup>2</sup>

(1. *Civil Aviation Flight University of China, Guanghan 618307, Sichuan, China;*

2. *School of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University,  
Xi'an 710072, Shaanxi, China)*

**Abstract:** The water entry problem of the 2-D wedge with a constant speed is numerically analyzed based on the velocity potential theory. A new jet linear approximation method is incorporated into the complex variable boundary element solver that describes the jet generated by the water entry of wedges to nearly simulate the free surface shape, jet and pressure distribution along the wetted area of the wedge contour. And the same time Cauchy integral theorem is used as the integration equation, and the similarity solution as the initial condition. Some important numerical techniques are discussed in detail such as time marching solution, jet treatment, grid mesh generation and the free surface deformation updating. Finally, the pressure distribution and wave elevation for the wedges with different deadrise angles are gotten. The proposed method is validated through comparisons with the similarity solution and good approximations are found.

**Key words:** fluid mechanics; complex boundary element method; water entry impact; wedge; jet linear approximation

\* Received 9 July 2010; Revised 2 November 2010

Corresponding author: WANG Yong-hu, wangyh.cn@gmail.com