

文章编号: 1001-1455(2012)01-0091-06

圆柱壳的塑性膨胀和变形*

周洪强, 张凤国

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘要: 根据材料不可压缩假设, 适当选取材料塑性本构关系, 将圆柱壳塑性膨胀运动简化为以圆柱壳内半径为因变量的常微分方程初值问题。对 3 种初始内外半径比纯铜厚壁圆柱壳膨胀过程的计算表明, 应变率硬化阻碍圆柱壳的塑性膨胀运动, 应变硬化和温度效应的影响可以忽略, 而与圆柱壳的厚度无关。

关键词: 固体力学; 膨胀; 本构关系; 圆柱壳; 屈服条件

中图分类号: O344.7

国标学科代码: 1301515

文献标志码: A

受内压载荷作用的圆柱壳是工程中常见的结构物, 它的运动形式和应力分布的研究是弹片破碎、炸药状态方程以及爆炸容器爆裂等课题的基本问题。柱壳在内压载荷下首先经过一个加速阶段, 随即进入塑性流动膨胀状态, 最终发生贯穿破裂^[1-2]。对于柱壳塑性膨胀过程, 除非采用特别形式的本构关系, 否则仅通过柱壳中某质点的运动无法显式表示整个柱壳的膨胀过程, 本构关系相关的积分项仍然需要数值方法求解^[3-5]。

本文中, 从力学基本方程出发, 根据材料不可压缩假设, 分析内压载荷下的圆柱壳的运动过程, 适当选取材料塑性本构关系, 将圆柱壳塑性膨胀运动简化为以圆柱壳内半径为自变量的常微分方程初值问题。采用 Newmark 方法离散常微分方程、Newton-Raphson 方法迭代求解离散方程, 对纯铜厚壁圆柱壳的膨胀过程进行计算, 考察应变率硬化、应变硬化和温度效应的影响。

1 受内压圆柱壳的塑性膨胀方程

1.1 基本方程

如图 1 所示, 设长度 $h \gg 1$ 的圆柱壳的初始内外半径分别为 a_0 和 b_0 , 在内壁受均布压力 p 的作用后, 内外半径变为 a 和 b 。假定材料塑性不可压缩, 在任意时刻 t 有 $2\pi r dr h = 2\pi r_0 dr_0 h$, 其中 r 为以圆柱壳轴心为原点的材料质点径向 Euler 坐标, r_0 为与 r 相应的 Lagrange 坐标, 从而有

$$r^2 - r_0^2 = a^2 - a_0^2 = b^2 - b_0^2 \quad (1)$$

$$\dot{r} = \frac{a\dot{a}}{r}, \quad \ddot{r} = \frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2}{r} - \frac{a^2\dot{a}^2}{r^3} \quad (2)$$

柱坐标系下柱壳运动方程为

$$\rho \ddot{r} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \quad (3)$$

边界条件为

$$\sigma_r|_{r=a} = -p(t), \quad \sigma_r|_{r=b} = 0 \quad (4)$$

式中: ρ 为材料密度, σ_r 和 σ_θ 分别为径向应力和周向应力。

在柱壳塑性膨胀过程中

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y \quad (5)$$

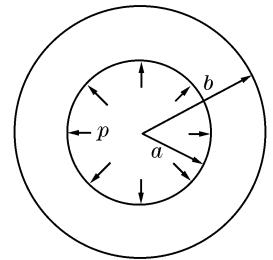


图 1 受内压厚壁圆筒
Fig. 1 Hollow cylinder subjected to internal pressure

* 收稿日期: 2010-09-01; 修回日期: 2011-10-18

基金项目: 中国工程物理研究院科学技术发展基金项目(2009A0101007)

作者简介: 周洪强(1970—), 男, 博士, 副研究员。

式中: σ_y 为材料的屈服强度。由内半径至外半径积分式(3), 并利用材料不可压缩条件和式(4)~(5), 得到圆柱壳塑性膨胀方程

$$\rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + 2 \ln f - f^2) \right] = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_a^b \frac{\sigma_y}{r} dr \quad (6)$$

式中: $f = a/b = a/\sqrt{a^2 + b_0^2 - a_0^2}$, 为柱壳内外径之比。对于理想塑性材料, $\sigma_y = \sigma_0$, σ_0 为材料常数, 上式简化为

$$\rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + 2 \ln f - f^2) \right] = -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln f \quad (7)$$

显然, 只要选取适当的材料塑性本构关系, 使式(6)右边积分项能够显式积分, 圆柱壳塑性膨胀过程就能简化为以内半径为自变量的常微分方程初值问题, 圆柱壳中每个质点的运动都可以通过内壁质点的运动来表示。

借鉴文献[6], 下面给出不同材料塑性本构关系对应的圆柱壳塑性膨胀方程。在推导过程中, 需要采用下述基本关系式: 圆柱壳中每个质点只有径向塑性应变率 $\dot{\epsilon}_r \approx \frac{\dot{r}}{r}$ 和环向塑性应变率 $\dot{\epsilon}_\theta \approx \frac{\dot{r}}{r}$ 不为零, 因此

$$\dot{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2)} = \frac{2\dot{r}}{\sqrt{3}r} = \frac{2\dot{a}a}{\sqrt{3}r^2} \quad (8)$$

$$\epsilon_p = \int_0^t \dot{\epsilon}_p dt = \int_0^t \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\dot{r}}{r} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{r^2}{r_0^2} \quad (9)$$

式中: ϵ_p 为等效塑性应变, $\dot{\epsilon}_p$ 为等效塑性应变率。

1.2 与不同塑性本构关系对应的圆柱壳塑性膨胀方程

1.2.1 含应变率效应塑性本构关系

材料塑性本构关系为

$$\sigma_y = \sigma_0 (1 + B \dot{\epsilon}_p^m) \quad (10)$$

式中: B 和 m 为材料参数, B 是粘性系数。将式(8)和(10)代入式(6), 得到对应的圆柱壳塑性膨胀方程

$$\rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + \ln f - f^2) \right] = -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln f - \frac{2^m B \sigma_0 \dot{a}^m}{3^{(m+1)/2} m a^m} (f^{2m} - 1) \quad (11)$$

材料塑性本构关系为

$$\sigma_y = \sigma_0 \left[1 + \beta \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] \quad (12)$$

式中: $\dot{\epsilon}_0$ 是参考塑性因子, β 为材料参数。对应的圆柱壳塑性膨胀方程为

$$\rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + 2 \ln f - f^2) \right] = -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln f - \frac{2}{\sqrt{3}} \beta \sigma_0 \ln \left(\frac{2\dot{a}a}{\sqrt{3}\dot{\epsilon}_0} \right) \ln f - \frac{2}{\sqrt{3}} \beta \sigma_0 (2 \ln a \ln f + \ln^2 f) \quad (13)$$

1.2.2 含应变硬化效应塑性本构关系

材料塑性本构关系为

$$\sigma_y = \sigma_0 (1 + H \epsilon_p) \quad (14)$$

式中: H 为材料应变硬化系数。利用公式 $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 由式(9)得到等效塑性应变的级数展开式

$$\epsilon_p = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2 - a_0^2)^n}{n r^{2n}} \quad (15)$$

将式(14)~(15)代入式(6), 得到对应的圆柱壳塑性膨胀方程

$$\rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + 2 \ln f - f^2) \right] = -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln f - \frac{H \sigma_0}{3} \sum_1^{\infty} \frac{(1 - a_0^2 a^{-2})^n}{n^2} (f^{2n} - 1) \quad (16)$$

1.2.3 含应变率效应和应变硬化效应塑性本构关系

材料塑性本构关系为

$$\sigma_y = \sigma_0 (1 + H \epsilon_p) (1 + B \dot{\epsilon}_p^m) \quad (17)$$

对应的圆柱壳塑性膨胀方程为

$$\rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + \ln f - f^2) \right] = -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln f - \frac{2^m B \sigma_0 \dot{a}^m}{3^{(m+1)/2} m a^m} (f^{2m} - 1) - \frac{H \sigma_0}{3} \sum_1^{\infty} \frac{(1 - a_0^2 a^{-2})^n}{n^2} (f^{2n} - 1) - \frac{2^m B H \sigma_0 \dot{a}^m}{3^{m/2+1} a^m} \sum_1^{\infty} \frac{(1 - a_0^2 a^{-2})^n}{n(m+n)} (f^{2m+2n} - 1) \quad (18)$$

材料塑性本构关系为

$$\sigma_y = \sigma_0 (1 + H \epsilon_p) \left[1 + \beta \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] \quad (19)$$

对应的圆柱壳塑性膨胀方程为

$$\begin{aligned} \rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + 2 \ln f - f^2) \right] = & -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln f - \\ & \frac{2}{\sqrt{3}} \beta \sigma_0 \ln \left(\frac{2 \dot{a} \dot{a}}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}_0} \right) \ln f - \frac{2}{\sqrt{3}} \beta \sigma_0 (2 \ln a \ln f + \ln^2 f) - \\ & \frac{\beta H \sigma_0}{3} \ln \left(\frac{2 \dot{a} \dot{a}}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}_0} \right) \sum_1^{\infty} \frac{(1 - a_0^2 a^{-2})^n}{n^2} (f^{2n} - 1) + \\ & 2 \beta H \sigma_0 \sum_1^{\infty} \frac{(1 - a_0^2 a^{-2})^n}{n^2} \left[(f^{2n} \ln a - f^{2n} \ln f - \ln a) + \frac{1}{2n} (f^{2n} - 1) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

1.2.4 含温度效应塑性本构关系

材料塑性本构关系为

$$\sigma_y = \sigma_0 \left(1 - \frac{T}{T_m} \right) \quad (21)$$

式中： T 为温度， T_m 为材料熔化温度。圆筒高速膨胀过程中，塑性应变产生的塑性功绝大部分转变成热，所产生的热来不及扩散而在圆筒内表面及附近的局部区域沉积下来，温升近似表达为

$$\dot{T} = \frac{\kappa \sigma_e \dot{\epsilon}_p}{\rho c_v} = \frac{\kappa \sigma_0 \dot{\epsilon}_p}{\rho c_v} \left(1 - \frac{T}{T_m} \right) \quad (22)$$

式中： κ 为 Taylor-Quinney 系数，一般取 0.9， c_v 为材料比定容热容。利用公式 $(1-x)^\gamma = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \gamma$

$(\gamma-1) \dots (\gamma-n+1) \frac{x^n}{n!}$ ，由式(22)得到温度项的级数展开式

$$1 - \frac{T}{T_m} = \left(1 - \frac{T_0}{T_m} \right) \left(\frac{r_0^2}{r^2} \right)^\lambda = \left(1 - \frac{T_0}{T_m} \right) \left[1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \lambda (\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) \frac{(a^2 - a_0^2)^n}{n! r^{2n}} \right] \quad (23)$$

式中： $\lambda = \frac{\kappa \sigma_0}{\sqrt{3} \rho c_v T_m}$ ， T_0 为材料初始温度。将式(22)~(23)代入式(6)，得到对应的圆柱壳塑性膨胀方程

$$\begin{aligned} \rho \left[\ddot{a} a \ln f + \frac{1}{2} \dot{a}^2 (1 + 2 \ln f - f^2) \right] = & -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_m} \right) \ln f - \\ & \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_m} \right) \sum_1^{\infty} (-1)^n \lambda (\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) \frac{(1 - a_0^2 a^{-2})^n}{2n!} (f^{2n} - 1) \end{aligned} \quad (24)$$

对于含应变硬化效应的热粘塑性本构关系，如 Johnson-Cook 本构模型^[7]、Zerilli-Armstrong 本构模型^[8]，圆柱壳塑性膨胀方程式(6)右边积分项不能显式积分，必须采用数值方法求解。

2 算例与结果分析

圆柱壳塑性膨胀方程采用 Newmark 方法对时间离散,离散后的代数方程通过 Newton-Raphson 迭代进行求解。以式(11)为例,时间离散方程为

$$\begin{cases} \rho \left[\ddot{a}_{n+1} a_{n+1} \ln f_{n+1} + \frac{1}{2} \dot{a}_{n+1}^2 (1 + 2 \ln f_{n+1} - f_{n+1}^2) \right] = \\ \quad - p_{n+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln f_{n+1} - \frac{2^m B \sigma_0 \dot{a}_{n+1}^m}{3^{(m+1)/2} m a_{n+1}^m} (f_{n+1}^2 - 1) \\ \ddot{a}_{n+1} = 4 \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t^2} - \frac{\dot{a}_n}{\Delta t} \right) - \ddot{a}_n \\ \dot{a}_{n+1} = 2 \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} \right) - \dot{a}_n \end{cases} \quad (25)$$

式中:下标 n 表示上一时刻已知量,下标 $n+1$ 表示当前时刻的待求量, Δt 为时间步长。

对 3 种初始内外径比厚壁圆柱壳的塑性膨胀过程进行数值计算,考察应变硬化、应变率硬化和热效应的影响。圆柱壳的初始内半径 $a_0 = 5.0$ mm,初始内外径比 $f_0 = a_0/b_0$,分别为 $2/3$ 、 $1/2$ 、 $2/5$ 。圆柱壳材料为纯铜,密度 $\rho = 8\,960$ kg/m³,初始屈服强度 $\sigma_0 = 0.15$ GPa,比定容热容 $c_V = 383$ J/(kg·K),初始温度 $T_0 = 298$ K,熔化温度 $T_m = 1\,356$ K。

圆柱壳所受内压均为

$$p = \begin{cases} 300t & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 30 & 0.1 < t \leq 10 \end{cases}$$

式中: p 的单位为 GPa, t 的单位为 μs 。

图 2~4 分别给出了取不同材料粘性系数、不同应变硬化系数、考虑和不考虑温度软化效应时的圆柱壳内半径时间历程曲线。图 2 中 5 条曲线因数据相近,仅能区分 3 条;而图 3~4 中曲线已经重合。由图可知:应变率硬化阻碍圆柱壳的塑性膨胀运动,而应变硬化和温度效应的影响可以忽略。需要说明:在 $10 \mu\text{s}$ 时最大的圆柱壳内径已经达到了初始内径的 8 倍多,在真实情形下圆柱壳在此之前就应破裂了,本文中模型不能描述圆柱壳破裂之后的情形。

温度效应对圆柱壳塑性膨胀的影响还可从图 5 看出。图 5 分别给出了内半径演化到 5 个不同尺寸时圆柱壳中的温度分布,其中圆柱壳的初始内半径 $a_0 = 5.0$ mm,初始内外径比 $f_0 = a_0/b_0 = 2/3$ 。为方便显示,横坐标采用 Lagrange 坐标。由图可知:越接近内壁,温升越大;由塑性功引起的温度变化总体上很小。因此,较小的温升不足以影响壳体的膨胀运动。

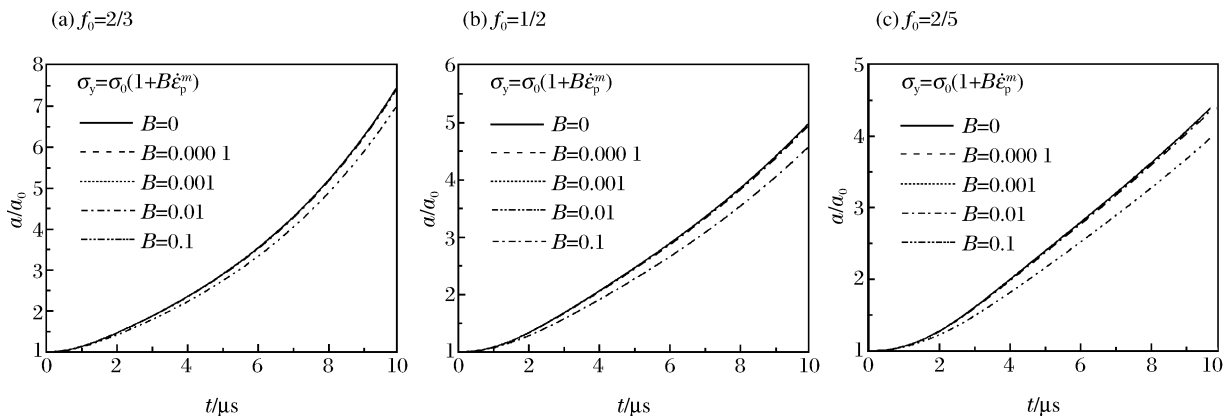


图 2 粘性系数对圆柱壳膨胀的影响

Fig. 2 Influence of viscosity in the dynamic expansion of a hollow cylinder

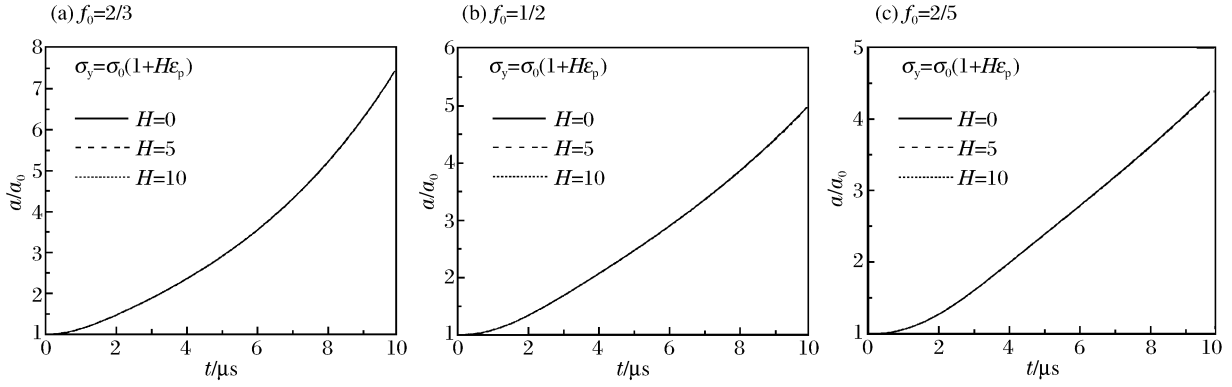


图 3 应变硬化对圆柱壳膨胀的影响

Fig. 3 Influence of strain hardening in the dynamic expansion of a hollow cylinder

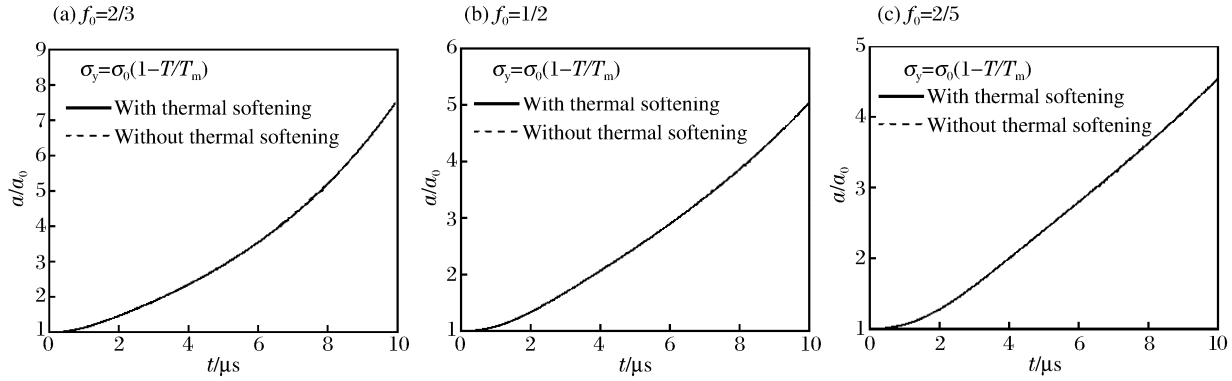


图 4 温度效应对圆柱壳膨胀的影响

Fig. 4 Influence of thermal softening in the dynamic expansion of a hollow cylinder

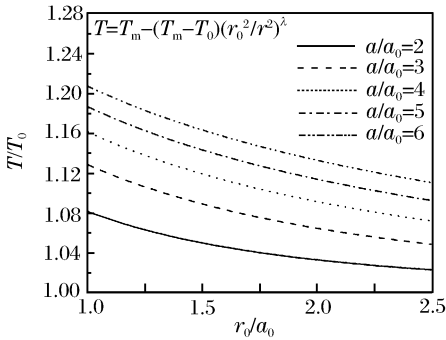


图 5 圆柱壳中的温度分布

Fig. 5 Temperature field in a hollow cylinder

3 结束语

选取适当的塑性本构关系，利用材料塑性不可压缩为自变量的常微分方程初值问题，从而可以采用较简单的数值方法进行计算。对 3 种初始内外半径比纯铜厚壁圆柱壳膨胀过程的计算表明，应变率硬化阻碍圆柱壳的塑性膨胀运动，应变硬化和温度效应的影响可以忽略，而与圆柱壳的厚度无关，他们的贡献或许更多地体现在圆柱壳后期的动态断裂破碎过程中。

参考文献：

[1] 高重阳,施惠基,姚振汉,等. 薄壁柱壳在内部爆炸载荷下膨胀断裂的研究[J]. 爆炸与冲击, 2000, 20(2): 160-167.
GAO Chong-yang, SHI Hui-ji, YAO Zhen-han, et al. Dynamic fracture of thin cylindrical shells subjected to internal explosive loading [J]. Explosion and Shock Waves, 2000, 20(2): 160-167.

- [2] 胡海波, 汤铁钢, 胡八一, 等. 金属柱壳在爆炸加载断裂中的单旋现象[J]. 爆炸与冲击, 2004, 24(2): 97-107.
HU Hai-bo, TANG Tie-gang, HU Ba-yi, et al. A study of uniform shear bands orientation selection tendency on explosively loaded cylindrical shells[J]. Explosion and Shock Waves, 2004, 24(2): 97-107.
- [3] 张守中, 孙业斌. 爆炸载荷作用下刚-塑性圆柱壳体的变形和破裂[J]. 兵工学报, 1985, 6(2): 59-65.
ZHANG Shou-zhong, SUN Ye-bin. Deformation and rupture of rigid-plastic cylinder shell due to explosion[J]. Acta Armamentaria, 1985, 6(2): 59-65.
- [4] 潘立功, 宋军, 仲政, 等. 求解粘塑性力学中的两个问题[J]. 上海力学, 1989, 10(2): 10-19.
PAN Li-gong, SONG Jun, ZHONG Zheng, et al. On solving two problems in visco-plasticity[J]. Shanghai Lixue, 1989, 10(2): 10-19.
- [5] 李晓杰, 李永池. 刚热粘塑性轴对称一维流的解法[J]. 高压物理学报, 1996, 10(2): 81-86.
LI Xiao-jie, LI Yong-chi. A method of solving one-dimension rigid-thermo-visco-plastic flow with cylindrical symmetry[J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 1996, 10(2): 81-86.
- [6] Cortes R. The growth of microvoids under intense dynamic loading[J]. Internal Journal of Solids and Structures, 1992, 29: 1339-1350.
- [7] Johnson G R, Cook W H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1985, 21(1): 31-48.
- [8] Zerilli F J, Armstrong R W. Dislocation-mechanical-based constitutive relations for material dynamics calculations [J]. Journal of Applied Physics, 1987, 61: 1816-1825.

The plastic expansion and deformation of a cylinder shell *

ZHOU Hong-qiang, ZHANG Feng-guo

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China*)

Abstract: Assuming the material to be incompressible and using appropriate plastic constitutive relations, the partial differential equations governing the dynamic expansion of a cylinder shell under internal pressure can be reduced to an ordinary differential equation taking the internal radius as the dependent variable. Some meaningful results are gained by numerical analysis on Cu. The strain rate hardening impedes the dynamic expansion of the cylinder shell, whereas the influence of the strain hardening and thermal effects can be neglected, which is independent of the shell thickness.

Key words: solid mechanics; expansion; constitutive relation; cylinder shell; yield condition

* Received 1 September 2010; Revised 18 October 2011

Corresponding author: ZHOU Hong-qiang, zhouhq@iapcm.ac.cn