

文章编号: 1001-1455(2012)02-0150-07

轴对称坐标系下含曲率的水平集方程 在非结构网格上的数值方法*

程俊霞, 胡晓棉

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

摘要: 为了在三角形和四边形网格上采用水平集方法模拟轴对称爆轰波阵面与曲率相关的运动, 假设爆轰波阵面的法向速度是曲率的线性函数, 通过坐标变换得到了轴对称坐标系下的水平集方程。水平集方程的曲率无关项采用正格式离散, 曲率项采用伽辽金等参有限元方法空间离散, 时间离散采用半隐格式。算例表明, 在轴对称三角形网格和四边形网格上, 含曲率的水平集方程的离散格式为强一阶精度。给出了三角形和四边形混合网格上不光滑界面以曲率收缩的运动过程, 收缩过程未出现不稳定现象。多个爆轰波阵面相互作用的算例说明本文的格式可有效地模拟曲率相关的爆轰波的相互作用问题

关键词: 爆炸力学; 水平集方程; 伽辽金等参有限元方法; 爆轰波阵面; 轴对称

中图分类号: O382.4; O241.82 **国标学科代码:** 13035 **文献标志码:** A

与敏感炸药相比, 钝感炸药的曲率效应较明显, 因此在工程应用中必须考虑钝感炸药的曲率效应。DSD 方法^[1]是一种考虑爆轰波曲率效应的工程爆轰流体力学数值方法。本文中基于 DSD 方法的基本框架, 致力于实现轴对称几何中曲率相关的爆轰波阵面的数值模拟方法。由于水平集方法容易处理界面拓扑结构的变化, 因此选择水平集方法模拟爆轰波阵面的运动。为了满足拉格朗日程序模拟爆轰波阵面的需要, 本文中在轴对称三角形和四边形网格上离散水平集方程。

到目前为止, 大多数研究者^[2-4]在笛卡儿网格上采用各种精度的迎风型 ENO 差分格式离散水平集方程。非笛卡儿网格上的水平集方程的离散方法并不多见, 含曲率的高阶水平集方程在非笛卡儿网格上的离散较困难。一种思路是把水平集方程转化为守恒率, 从而可采用守恒率的方法。对于不可压流, E. Marchandise 等^[5]把与曲率无关的水平集演化方程写成守恒形式, 采用间断有限元方法求解。F. Lafon 等^[6]在三角形网格上采用 ENO 构造最小模板的思想求解了含一阶导数的 Hamilton-Jacobi 方程, 二阶导数项在笛卡儿网格上采用中心差分。针对含有高阶导数的方程, B. Cockburn 等^[7]提出了 LDG 方法, 把高阶方程写成一阶守恒型微分方程组, 采用 RKDG 方法求解。此方法适用于对流占优的扩散问题, 如果扩散占优, 时间步长将很受限制, 效率降低。C. Q. Hu 等^[8]采用 LDG 方程求解了含曲率的对流占优的水平集方程。T. J. Barth 等^[9]在三角形网格上采用正格式和 Petrov-Galerkin 有限元方法离散不含曲率的水平集方程, 而含曲率的部分采用有限元方法二阶显式龙格-库塔法求解。与间断有限元方法相比, 此方法具有计算量小的优点, 但显式求解含曲率的水平集方程要限制时间步长。K. Deckelnick 等^[10]提出了含曲率的水平集方程的有限元离散格式, 从格式的稳定性出发, 提出了半隐离散格式, 求解了纽曼边界条件下三角形网格上的含曲率的水平集方程。水平集函数在演化过程中不能保持距离函数的性质, 梯度将变得过大或过小, 因此需要重新初始化。F. Bornemann 等^[11]提出了水平集函数在三角形网格上的重新初始化方法, 适用于满足惠更斯原理的爆轰波传播问题。本文中拟基于文献[9-11], 在三角形网格和四边形网格上求解轴对称几何中的含曲率的水平集方程。

* 收稿日期: 2010-07-09; 修回日期: 2011-03-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(10901022, 10931004)

作者简介: 程俊霞(1977—), 女, 博士研究生, 副研究员。

1 轴对称几何中的含曲率的水平集方程

本文中求解的水平集方程在笛卡儿坐标系下可写为

$$u_t + D_j |\nabla u| - \alpha \kappa |\nabla u| = 0 \quad (1)$$

式中: α 是大于零的常数, D_j 为CJ爆速, $\kappa = \nabla \cdot (\nabla u / |\nabla u|)$ 为平均曲率。当 $|\nabla u| = 0$,曲率没有定义,方程(1)高度非线性,是可能退化的对流扩散方程。

柱坐标与笛卡儿坐标的关系为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan(y/x) \quad (2)$$

根据复合求导法则,可得到

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta / r, \quad u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta / r \quad (3)$$

在轴对称问题中 θ 的偏导数为零,可得到

$$\begin{cases} u_x = u_r \cos \theta, & u_y = u_r \sin \theta, & u_z = u_z \\ u_{xx} = u_{rr} \sin^2 \theta / r + u_{rr} \cos^2 \theta, & u_{yy} = u_{rr} \cos^2 \theta / r + u_{rr} \sin^2 \theta \\ u_{xy} = (u_{rr} - u_r / r) \cos \theta \sin \theta, & u_{xz} = u_{rz} \cos \theta, & u_{yz} = u_{rz} \sin \theta \end{cases} \quad (4)$$

曲率在笛卡儿坐标系中的表达式为

$$\kappa = \frac{u_{xx}(u_y^2 + u_z^2) + u_{yy}(u_x^2 + u_z^2) + u_{zz}(u_x^2 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y - 2u_{xz}u_xu_z - 2u_{yz}u_yu_z}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{3/2}} \quad (5)$$

把式(4)代入到式(5),得到轴对称几何的曲率

$$\kappa = \frac{u_{rr}u_z^2 + u_{zz}u_r^2 - 2u_{rz}u_ru_z}{(u_r^2 + u_z^2)^{3/2}} + \frac{u_r}{r\sqrt{u_r^2 + u_z^2}} \quad (6)$$

把式(6)代入到式(1),得到轴对称坐标系下的水平集方程

$$u_t + D_j |\nabla u| - \alpha |\nabla u| (u_{rr}u_z^2 + u_{zz}u_r^2 - 2u_{rz}u_ru_z) / (u_r^2 + u_z^2)^{3/2} = \alpha u_r / r \quad (7)$$

与二维平面相比,在轴对称几何中水平集方程多了一个源项。二维平面和轴对称几何中的水平集方程可统一为

$$u_t + D_j |\nabla u| - \alpha |\nabla u| \nabla \cdot (\nabla u / |\nabla u|) = \sigma \alpha u_r / r \quad (8)$$

式中:二维平面时, $\sigma = 0$;轴对称时, $\sigma = 1$ 。

2 轴对称几何中的水平集方程的时空离散格式

采用三角形和四边形混合网格离散求解区域 Ω ,区域边界记为 $\partial\Omega$,水平集函数定义在节点上。产物的水平集函数为负,反应物的水平集函数为正。

2.1 曲率无关方程的空间离散格式

曲率无关方程为

$$u_t + D_j |\nabla u| = 0 \quad (9)$$

式(9)是齐次的对流方程,采用正格式^[9]进行求解。正格式的公式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \tau G_i = u_i^n - \frac{\tau \alpha_l^i (H(\nabla u))_{T_l}}{\sum \alpha_l^i A_l} \quad (10)$$

式中: α_l^i 为单元 l 对节点 i 的贡献, τ 为时间步长。对于 q 次齐次 $H(\nabla u)$ 可得到^[9]

$$(H(\nabla u))_{T_l} = (A_l/q) \nabla H \cdot \nabla u = (A_l/q) \sum_{i=1}^p \nabla H \cdot \nabla N_i u_i = \sum_{i=1}^p K_i u_i \quad (11)$$

式中: A_l 为网格 l 的面积。在曲率无关的水平集方程(9)中, $H(\nabla u) = |\nabla u|$ 为一次齐次函数,即 $q = 1$,得到

$$K_i = A_l \nabla H \cdot \nabla N_i = A_l D_j \nabla u \cdot \nabla N_i / |\nabla u| \quad (12)$$

把 K_i 分解成正负项,利用 $\sum_{i=1}^p \nabla N_i = 0$ 的性质,得到

$$(H(\nabla u))_{T_i} = \sum_{i=1}^p K_i u_i = \sum_{i=1}^p K_i^- u_i + \sum_{i=1}^p K_i^+ u_i = \left(\sum_{i=1}^p K_i^+ \right)^{-1} \sum_{i=1}^p K_i^+ \sum_{j=1}^p K_j^- (u_j - u_i) = \sum_{i=1}^p \delta_i \quad (13)$$

记 $\alpha_i^l = \delta_i / (H(\nabla u))_{T_i}$, 把 α_i^l 的表达式代入式(10)就得到了方程(9)的正格式离散格式。为了得到更健壮的格式, 采用修正系数^[1] $\tilde{\alpha}_i^l = \max(\alpha_i^l, 0) / \sum_{j=1}^p \max(\alpha_j^l, 0)$ 。

2.2 曲率相关方程的空间离散格式

方程(1)的曲率项可写为

$$u_i - \alpha |\nabla u| \nabla \cdot (\nabla u / |\nabla u|) = \sigma a u_r / r \quad (14)$$

为了书写方便, 以下公式中省略 α 。由于 $|\nabla u| \neq 0$, 方程(14)可变化为

$$u_i / |\nabla u| - \nabla \cdot (\nabla u / |\nabla u|) = \sigma u_r / (r |\nabla u|) \quad (15)$$

为了防止出现退化现象, 式(15)变化为

$$\frac{u_i}{Q(u)} - \nabla \cdot \frac{\nabla u}{Q(u)} = \sigma \frac{u_r}{r Q(u)}, \quad Q(u) = \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \quad (16)$$

式中: ϵ 为无穷小量。为了书写方便, 下面将采用张量标记, 如 $u_j N_j = \sum_{j=1}^p u_j N_j$, $p = 3$ 或 4 。采用伽辽金有限元方法离散式(16), 在边界单元上得到

$$\int_{\Omega^e} \frac{N_i N_j}{Q(u^e)} \frac{du_j^e}{dt} = \int_{\partial \Omega^e \cap \Omega} \frac{N_i u_j^e \nabla N_j}{Q(u^e)} \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega^e} \frac{\nabla N_j u_j^e}{Q(u^e)} \cdot \nabla N_i + \int_{\Omega^e} \frac{\sigma u_r N_i}{r Q(u^e)} \quad i, j = 1, \dots, 3 \text{ 或 } 4 \quad (17)$$

在内部单元中边界积分项为零, 因此, 在以下推导中忽略边界积分项。单元有限元特征式可表示为

$$(A_{ij}^e) \frac{du_j^e}{dt} = (B_{ij}^e) u_j^e \quad i, j = 1, \dots, 3 \text{ 或 } 4 \quad (18)$$

方程(18)左端称为相容质量矩阵, 若左端采用质量集中矩阵可得到

$$\frac{du_i^e}{dt} \int_{\Omega^e} \frac{N_i}{Q(u^e)} = - \int_{\Omega^e} \frac{\nabla N_j u_j^e}{Q(u^e)} \cdot \nabla N_i + \int_{\Omega^e} \frac{\sigma u_r N_i}{r Q(u^e)} \quad i, j = 1, \dots, 3 \text{ 或 } 4 \quad (19)$$

采用质量集中后, 式(19)中矩阵 (A_{ij}^e) 为对角矩阵。单元有限元特征式总体合成后得到总体有限元方程。若采用显式时间离散, 质量集中后不要求解线性方程组, 将大大减少计算量; 若时间离散采用隐式格式或半隐格式, 是否采用质量集中矩阵对计算量并没有影响, 考虑到曲率无关方程的离散, 本文中采用了质量集中矩阵。

至此, 完成了水平集方程的伽辽金有限元空间离散。

2.3 时间离散格式

为方便起见, 在此以后的表达式中 u^e 简写为 u 。式(19)的显式格式为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} \int_{\Omega^e} \frac{N_i}{Q(u^n)} = - \int_{\Omega^e} \frac{\nabla N_j u_j^n}{Q(u^n)} \cdot \nabla N_i + \int_{\Omega^e} \frac{\sigma u_r^n N_i}{r Q(u^n)} \quad (20)$$

式中: τ 为时间步长。式(19)的隐式格式为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} \int_{\Omega^e} \frac{N_i}{Q(u^{n+1})} = - \int_{\Omega^e} \frac{\nabla N_j u_j^{n+1}}{Q(u^{n+1})} \cdot \nabla N_i + \int_{\Omega^e} \frac{\sigma u_r^{n+1} N_i}{r Q(u^{n+1})} \quad (21)$$

式(19)的半隐格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} \int_{\Omega^e} \frac{N_i}{Q(u^n)} = - \int_{\Omega^e} \frac{u_j^{n+1} \nabla N_j}{Q(u^n)} \cdot \nabla N_i + \int_{\Omega^e} \frac{\sigma u_r^{n+1} N_i}{r Q(u^n)} \quad (22)$$

若采用显式格式(20)不要求解方程组, 大大减少了计算量, 但时间步长很受限制; 若采用隐式格式(21), 在每一步不得不求解高度非线性的方程组, 计算代价很高。半隐格式只需求解具有稀疏系数矩阵的线性方程组, 与隐式格式相比计算代价较小。根据文献[10]的结果, 在纽曼边界条件下, 半隐格式为无条件稳定格式。

式(22)可写为

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \tau \alpha C_i \left(\int_{\Omega^e} \frac{u_j^{n+1} \nabla N_j}{Q(u^n)} \cdot \nabla N_i + \int_{\Omega^e} \frac{\sigma u_r^{n+1} N_i}{r Q(u^n)} \right) \tag{23}$$

式(23)与式(10)相比,二维轴对称坐标系下与曲率相关的水平集方程(8)的离散格式可写为

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \tau \alpha C_i \left(\int_{\Omega^e} \frac{u_j^{n+1} \nabla N_j}{Q(u^n)} \cdot \nabla N_i + \int_{\Omega^e} \frac{\sigma u_r^{n+1} N_i}{r Q(u^n)} \right) - \tau G_i \tag{24}$$

2.4 三角形线性基函数及其导数

根据等参有限元的定义

$$r = \sum_{i=1}^p N_i r_i, \quad z = \sum_{i=1}^p N_i z_i, \quad u = \sum_{i=1}^p N_i u_i \tag{25}$$

式中: r, z 为坐标, u 为物理量。基函数定义为

$$\begin{cases} N_1 = [(r_2 z_3 - r_3 z_2) + r(z_2 - z_3) + z(r_3 - r_2)] / (2A) \\ N_2 = [(r_3 z_1 - r_1 z_3) + r(z_3 - z_1) + z(r_1 - r_3)] / (2A) \\ N_3 = [(r_1 z_2 - r_2 z_1) + r(z_1 - z_2) + z(r_2 - r_1)] / (2A) \end{cases} \tag{26}$$

基函数可记为 $N_i = a_i + b_i r + c_i z$, 其导数

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = b_i, \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = c_i \tag{27}$$

从上式可见,在三角形网格上,线性等参有限元的基函数的导数是常数。

2.5 双线性基函数及其导数

等参有限元的定义如式(25),对于四边形网格来说,双线性基函数为

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad \xi_i = (-1, 1, 1, -1), \quad \eta_i = (-1, -1, 1, 1) \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{28}$$

柱坐标系与局部坐标系的导数关系为

$$\begin{cases} dr = r_\xi d\xi + r_\eta d\eta \\ dz = z_\xi d\xi + z_\eta d\eta \end{cases} \tag{29}$$

由上式的坐标变换可得到

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \xi_r & \xi_z \\ \eta_r & \eta_z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} r_\xi & r_\eta \\ z_\xi & z_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ r_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{30}$$

矩阵 \mathbf{J} 为 (r, z) 坐标系到 (ξ, η) 坐标系的参考雅可比矩阵。将式(30)代入下式可得到基函数的导数。

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{cases} \tag{31}$$

3 数值精度和数值算例

为了评价本文中格式的精度,用上面已导出的格式求解有解析解的问题。节点的穿过时间为节点 $u(x, y, t) = 0$ 的时刻,通过抛物插值得到节点的穿过时间, $t = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ 。网格的尺寸 h 定义为

$$h = \sqrt{A/n} \tag{32}$$

式中: A 为区域面积, n 为网格数。 \hat{u}_i^h 为节点上的解析解, u_i^h 为节点上的数值解,整个区域的最大范数和平均二范数的误差为

$$E_{\max}^h = \max_{i=1,2,\dots,n} |u_i^h - \hat{u}_i^h|, \quad E_{l_2}^h = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^h - \hat{u}_i^h)^2 A_i} \tag{33}$$

2 种范数的误差估计公式为

$$E^h = Ch^q + O(h^{q+1}) \tag{34}$$

式中: q 为截断误差的阶数。对于网格尺寸分为 h_1 和 h_2 的误差结果可得到

$$q = \frac{\ln(E^{h_1}/E^{h_2})}{\ln(h_1/h_2)} \tag{35}$$

当零水平集为球面时,方程(8)可等价

$$dr/dt = D_j - 2\alpha/r \tag{36}$$

分别在三角形和随机四边形网格上测试离散格式的精度,三角形网格如图 1 所示。在笛卡儿网格的基础上采用下式生成随机网格

$$x(i,j) = x(i,j) + 0.2h \cos(\nu\pi), \quad y(i,j) = y(i,j) + 0.2h \sin(\nu\pi) \tag{37}$$

式中: ν 为随机数。随机网格如图 2 所示。

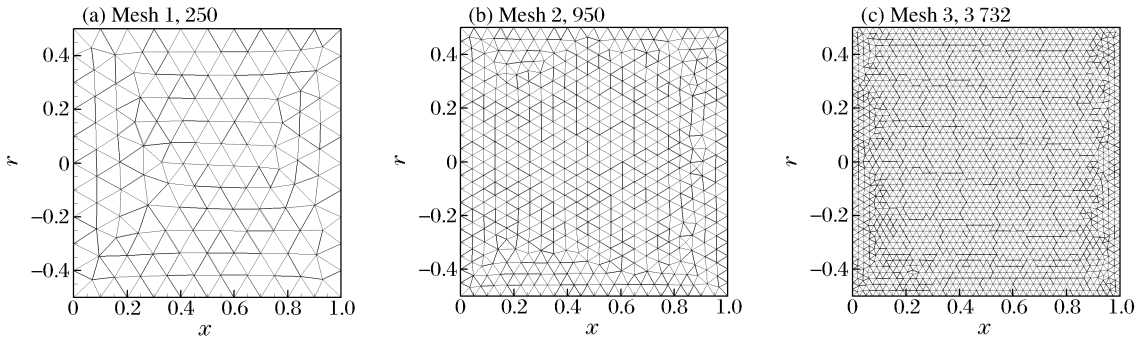


图 1 测试精度的三角形网格

Fig. 1 Triangle meshes used to get the order of numerical scheme

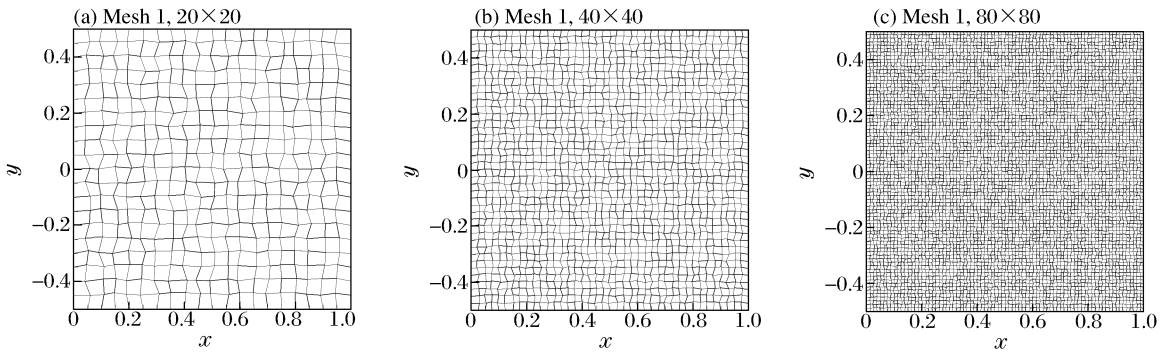


图 2 测试精度的随机四边形网格

Fig. 2 Random meshes used to get the order of numerical scheme

算例 1 在轴对称几何中求解球与曲率相关的演化问题。采用外延边界条件,初始的零水平集为圆心在原点、半径为 0.25 的圆, $D_j=1.0, \alpha=0.05$ 。表 1 给出了 L_∞ 和 L_2 误差及其精度。从表 1 可以看出,水平集方程的离散格式在三角形网格和随机四边形网格上均可达到强一阶精度。

表 1 水平集方程在三角形和四边形网格上的数值精度

Table 1 Numerical orders of level set equation on triangles and quadrilaterals

三角形网格					四边形网格				
网格数	L_∞	精度	L_2	精度	网格数	L_∞	精度	L_2	精度
250	9.7920×10^{-2}		4.5993×10^{-2}		20×20	6.6572×10^{-2}		4.0459×10^{-2}	
950	4.9688×10^{-2}	1.016	2.4176×10^{-2}	0.963	40×40	2.7721×10^{-2}	1.264	1.6588×10^{-2}	1.286
1372	1.9729×10^{-2}	1.384	8.8961×10^{-3}	1.498	80×80	1.1942×10^{-2}	1.215	6.9768×10^{-3}	1.250

算例 2 在三角形网格和四边形网格混合网格(如图 3,18 027 个网格)上,求解平面二维柱坐标系下含曲率的水平集方程,即 $D_j=0, \alpha=1$,零水平集的参数方程为 $\gamma(t) = 0.2(|\sin(8t)| + 4.0)(\cos t, \sin t), t \in [0, 0.5\pi]$ 。图 3 给出了零水平集的演化过程,收缩过程没有发生不稳定现象。算例 2 说明本文的格式适用于三角形和四边形的混合网格。

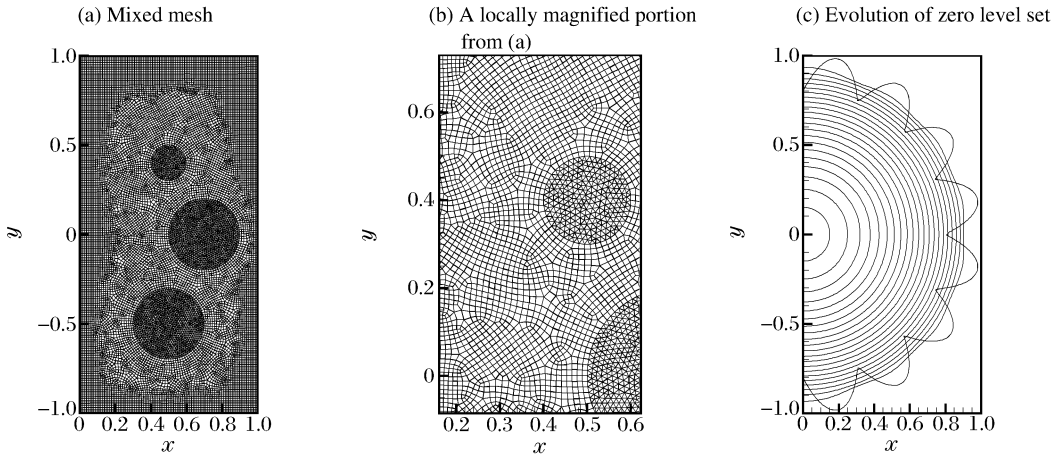


图 3 三角形和四边形混合网格及零水平集的演化过程

Fig. 3 Mixed mesh containing triangles and quadrilaterals, evolution of zero level set

算例 3 在二维平面坐标系下计算多个波阵面的相互作用问题。零水平集为 3 个相同半径的圆，半径为 0.15，圆心坐标分别为 $(-0.5, 0.35)$ 、 $(-0.5, 0.0)$ 、 $(-0.5, -0.35)$ ，波阵面运动速度为 $D_j = 7.0$ ， $\alpha = 0.5$ 。由于曲率的作用，波阵面相交后最终会演化成一条直线。为了显示直线波阵面，此算例采用笛卡儿网格。由图 4 可见，采用本文的方法可以有效地处理爆轰波阵面的相互作用问题。

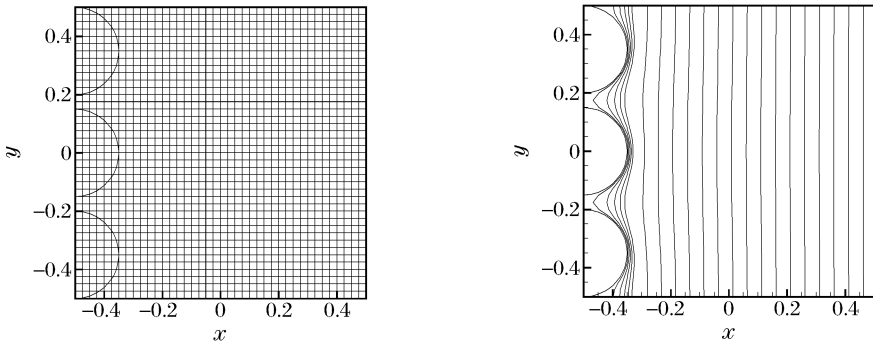


图 4 多个爆轰波阵面的相互作用过程

Fig. 4 Multiple detonation fronts colliding

4 结 论

曲率相关的水平集方法可有效地模拟轴对称爆轰波的运动和相互作用。水平集方程的对流项采用正格式，扩散项采用半隐时间离散和伽辽金等参有限元方法空间离散，离散格式在三角形和四边形网格上均可达到强一阶精度。多个爆轰波阵面的相互作用算例说明，本文的方法可在三角形和四边形混合网格上有效地模拟爆轰波与曲率有关的运动。

参考文献：

[1] Bdzil J B, Stewart D S. Modeling two-dimensional detonations with detonation shock dynamics[J]. Physics of Fluids, 1989,1(7):1261.

[2] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithm based on Hamilton-Jacobian formulation[J]. Journal of Computational Physics, 1988,79(1):12-49.

[3] Sethian J A. Level set methods and fast marching methods[M]. 2nd Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[4] Aslam T D. Investigation on detonation shock dynamics[D]. Urbana: University of Illinois at Urbana-Champaign,

1996.

- [5] Marchandise E, Remacle J F, Chevaugéon N. A quadrature-free discontinuous Galerkin method for the level set equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006,212(1):338-357.
- [6] Lafon F, Osher S. High order two dimensional nonoscillatory methods for solving Hamilton-Jacobi scalar equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996,123(2):235-253.
- [7] Cockburn B, Shu C W. The local discontinuous Galerkin methods for time-dependent convection-diffusion systems [J]. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1998,35(6):2440-2463.
- [8] Hu C Q, Shu C W. A discontinuous Galerkin finite element method for Hamilton-Jacobi equations[R]. NASA/CR-1998-206903, 1998.
- [9] Barth T J, Sethian J A. Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains [J]. *Journal of Computational Physics*, 1999,145(1):1-40.
- [10] Deckelnick K, Dziuk G. A fully discrete numerical scheme for weighted mean curvature flow[J]. *Numerische Mathematik*, 2002,91(3):423-452.
- [11] Bornemann F, Rasch C. Finite-element discretization of static Hamilton-Jacobi equations based on a local variational principle[J]. *Computing and Visualization in Science*, 2006,9(2):57-69.
- [12] Crandall M G, Lions P L. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1984,43(167):1-19.
- [13] Yoo S. Wave tracking in complex geometries[D]. Urbana: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003.

Numerical scheme for level set equations containing curvature on axisymmetric unstructured meshes*

CHENG Jun-xia, HU Xiao-mian

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*)

Abstract: To simulate the moving of axisymmetric detonation front on triangles and quadrilaterals using the level set method, assuming that the detonation normal velocity is the linear function of curvature, an axisymmetric level set equation is gained by the use of coordinate transformation. The convection term of the level set equation is solved by the positive scheme, and the curvature term is solved by the Galerkin isoparametric finite element method and the semi-implicit time stepping technique. On triangles and quadrilaterals, the scheme of the level set equations containing curvature is higher than first order accuracy in L_2 and L_∞ norms. The computational example is given of nonsmooth level sets shortening stably by the local curvature on the unstructured mixed meshes. The example of multiple detonation fronts colliding shows that the scheme of this paper can be used to simulate the propagation of detonation front on curvature.

Key words: mechanics of explosion; level set equation; Galerkin isoparametric finite element method; detonation front; axisymmetric

* Received 9 July 2010; Revised 25 March 2011

Supported by the National Natural Science Foundation of China (10901022,10931004)

Corresponding author: CHENG Jun-xia, cheng_junxia@iapcm.ac.cn