

文章编号: 1001-1455(2012)04-0362-06

可变形电子元件的非线性动力屈曲行为分析*

张晓晴, 欧智成

(华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510640)

摘要: 基于薄膜/基底模型, 分析可变形电子元件结构的动力屈曲问题。用小变形平面应变理论描述基底, 用 Kirchhoff 平板理论描述薄膜。定义 Lagrange 函数, 包括薄膜应变能和动能, 以及基底对薄膜所作的功。利用 Euler-Lagrange 方程导出薄膜的动力屈曲控制方程。计算线性荷载下薄膜的动力响应, 并利用 B-R 准则确定临界屈曲荷载。动力屈曲的临界荷载较静力屈曲的大, 波幅响应围绕静力屈曲的响应振荡。

关键词: 固体力学; 动力屈曲; B-R 准则; 可变形电子元件; 薄膜; 基底

中图分类号: O347.3 **国标学科代码:** 13015 **文献标志码:** A

可变形电子技术在微电子、生物、医学等领域有广阔的应用前景^[1], 它以硬质薄膜、柔性基底结构为基础, 将薄膜粘附在已施加预应变的基底上, 然后释放预应变, 致使薄膜发生屈曲^[2]。将薄膜/基底结构的屈曲特性应用于半导体纳米技术中, 便可实现电子元件的可变形特性。R. Huang 等^[3-6]建立了薄膜基底结构的力学模型, 研究了各向同性、正交各向异性的弹性薄膜在弹性、粘性和粘弹性基底上的屈曲行为, 得到了薄膜屈曲的波长、波幅和临界荷载等。B. Audolya 等^[7]、X. Chen 等^[8]、J. Song 等^[9]研究了包括人字形、棋盘形、波浪形等多种受到双轴预应变荷载的薄膜屈曲构型。文献^[10-12]中研究了有限窄带薄膜的屈曲, 并考虑了大变形和超弹性的情况。

当前的研究主要集中在静力屈曲方面, 并未考虑结构的动力响应, 事实上无论是在生产还是使用过程中, 可变形电子元件都不可避免地会承受各种动力荷载的作用。这些荷载可能来自化学反应、机械碰撞、环境温度等, 并最终体现在薄膜/基底结构受到的随时间变化的荷载。一般而言, 这些荷载包括线性荷载、阶跃荷载、脉冲荷载、周期荷载和随动荷载等, 原来的静力屈曲问题转化为与时间相关的动力屈曲问题。动力屈曲同静力屈曲分析一样, 需要确定临界荷载和屈曲模态等, 但动力屈曲有更丰富的动力响应, 包括冲击屈曲、振荡屈曲等, 而且对初始条件敏感^[13-14]。

本文中, 分析线性荷载下薄膜/基底结构的动力屈曲。假设薄膜受到线性递增的单轴预应变, 利用 Kirchhoff 平板理论描述薄膜, 用小变形平面应变理论描述基底, 导出薄膜的应变能和动能, 以及基底对薄膜所作的功。然后定义 Lagrange 函数, 利用 Euler-Lagrange 方程导出动力屈曲控制方程。通过量纲一化后, 得到一个关于屈曲波幅和线性荷载的非线性常微分方程。通过数值方法求解结构的动力响应, 并利用 B-R 准则确定临界屈曲荷载^[15], 最后讨论初始条件对动力响应的影响。可以发现, 动力屈曲的临界荷载较静力屈曲的大, 波幅响应围绕静力屈曲的振荡。

1 基本模型和控制方程

弹性薄膜无滑移地粘附在弹性基底上, 薄膜厚度为 h , 基底厚度为 H , 且 $H \gg h$ 。基底受到单轴预拉伸应变 ϵ_0 , 以此时的构型为初始构型, 以接触面的中心为原点建立坐标系, 如图 1(a)所示。释放基底的预应变, 结构发生屈曲, 如图 1(b)所示, 假设在此过程中薄膜受到线性变化的压缩应变 $\epsilon(t)$ 。用 Kirch-

* 收稿日期: 2011-06-11; 修回日期: 2011-12-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902040);

华南理工大学中央高校基本科研业务费专项基金项目(2012ZZ0102)

作者简介: 张晓晴(1974—), 女, 博士, 副教授。

hoff 平板理论描述薄膜,用小变形理论描述基底。由于结构在 y 方向的长度远大于波长,因此基底可简化为平面应变问题。薄膜与基底接触面处($z=0$)的位移连续,基底底部固定,即边界条件为

$$z=0: u^s = u, w^s = w; \quad z=-H: u^s = 0, w^s = 0 \tag{1}$$

式中:上标 s 表示基底。

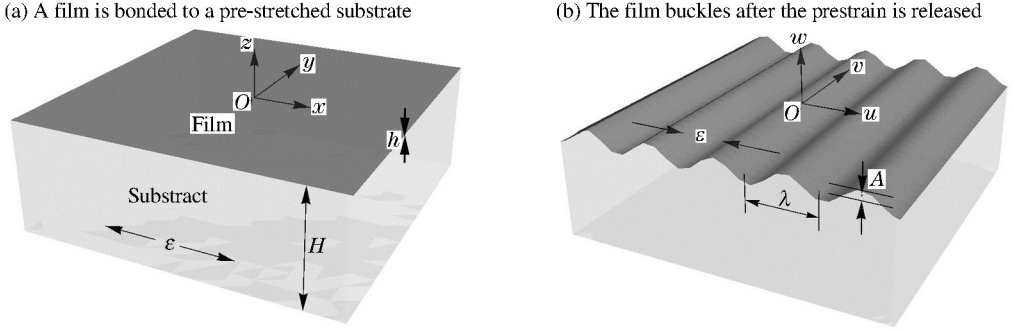


图 1 硬质薄膜/柔性基底结构

Fig. 1 The structure in a stiff thin film bonded to a compliant thick substrate

1.1 薄膜

由于薄膜只受到单轴荷载,其基本方程可简化为一维情况,并考虑中等应变

$$\epsilon_x = (\partial u_0 / \partial x) + (1/2)(\partial w_0 / \partial x)^2 \tag{2}$$

式中: u_0 和 w_0 分别表示薄膜中面上的面内位移和挠度。Kirchhoff 平板理论认为薄膜挠度沿着厚度方向无变化,等于中面挠度。但面内位移沿着厚度线性分布。于是薄膜任意位置的位移为

$$u = u_0 - (z - h/2)(\partial w / \partial x) \quad w = w_0 \tag{3}$$

运用 Hooke 定律得到薄膜中面的应力

$$\sigma_x = \bar{E}\epsilon_x = N_x / h \tag{4}$$

式中: $\bar{E} = E / (1 - \nu^2)$ 为等效模量,其中 E 和 ν 为薄膜的杨氏模量和泊松比; N_x 为薄膜内力。忽略面内位移引起的惯性项,得到平衡方程

$$\partial N_x / \partial x = 0 \tag{5}$$

将式(2)~(4)代入式(5),得到位移表示的平衡方程

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{6}$$

假设薄膜的挠度

$$w = A(t) \cos(kx) \tag{7}$$

式中: $A(t)$ 为波幅, k 为波数。假设薄膜的波长与时间无关,并且远大于厚度, $\lambda = 2\pi/k \gg h$,即 $kh \ll 1$ 。

将式(7)代入式(6)解得中面位移

$$u_0 = (1/8)A^2(t)k \sin(2kx) - x\epsilon(t) \tag{8}$$

于是接触面处的位移

$$u|_{z=0} = -(1/2)A(t)hk \sin(kx) + (1/8)A^2(t)k \sin(2kx) - x\epsilon(t) \tag{9}$$

再由式(2)得薄膜的面内应变

$$\epsilon_x = k^2 A^2(t) / 4 - \epsilon(t) \tag{10}$$

薄膜的应变能包括弯曲应变能 U_b 和压缩应变能 U_m ,即

$$U_b = \frac{D}{2} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy, \quad U_m = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \sigma_x \epsilon_x dx dy \tag{11}$$

式中: $D = \bar{E}h^3 / 12$ 。忽略面内位移引起的动能,得到薄膜的动能

$$E_k = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \rho h \dot{w}^2 dx dy \tag{12}$$

本文中,上标“·”表示对时间的一阶导数。

1.2 基底

计算基底对薄膜的反力。由小变形平面应变理论得基底应变

$$\epsilon_x^s = \frac{\partial u^s}{\partial x} + \epsilon_0, \quad \epsilon_z^s = \frac{\partial w^s}{\partial z}, \quad \epsilon_{xz}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^s}{\partial z} + \frac{\partial w^s}{\partial x} \right) \quad (13)$$

运用 Hooke 定律(平面应变)得到应力

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \frac{E^s}{1+\nu^s} \left(\epsilon_{\alpha\beta}^s + \frac{\nu^s}{1-2\nu^s} \epsilon_{\gamma\gamma}^s \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (14)$$

式中: E^s 和 ν^s 为基底的杨氏模量和泊松比。利用平衡方程

$$\sigma_{\alpha\beta,\alpha}^s = 0 \quad (15)$$

将式(13)~(14)代入式(15),得到位移表示的平衡方程

$$(1-2\nu^s)u_{,xx}^s + 2(1-\nu^s)u_{,zz}^s + w_{,xz}^s = 0, \quad (1-2\nu^s)w_{,xx}^s + 2(1-\nu^s)w_{,zz}^s + u_{,xz}^s = 0$$

分离变量得到

$$w_{,xxxx}^s + 2w_{,xxzz}^s + w_{,zzzz}^s = 0, \quad u^s = -(1-2\nu^s) \int w_{,xz}^s dz - 2(1-\nu^s) \int w_{,z}^s dx \quad (16)$$

式中:下标“,”表示对坐标的偏导数。考虑位移的周期性和有界性,得到微分方程的通解为

$$w^s = \sum_{i=1}^{\infty} e^{K_i z} (a_i + b_i z) \cos(K_i x) \quad (17)$$

利用边界条件(1)解得

$$\begin{cases} w^s = A(t) e^{kz} (1 + b_1 kz) \cos(kx) + 2b_2 A(t)^2 e^{kz} kz \cos(2kx) \\ u^s = -A(t) e^{kz} [1 + b_1 (3 - 4\nu^s + kz)] \sin(kx) - A(t)^2 e^{2kz} b_2 (3 - 4\nu^s + 2kz) \sin(2kx) - x\epsilon(t) \end{cases} \quad (18)$$

式中: $b_1 = (hk - 2)/(6 - 8\nu^s) \approx 1/(3 - 4\nu^s)$, $b_2 = k/8(3 - 4\nu^s)$ 。将式(18)代入式(13)得基底应变

$$\begin{cases} \epsilon_x^s = \frac{1}{2} \left(\frac{2-hk}{3-4\nu^s} z - h \right) A(t) k^2 e^{kz} \cos(kx) + \frac{1}{4} \left(\frac{2k}{3-4\nu^s} z + 1 \right) A^2(t) k^2 e^{2kz} \cos(2kx) \\ \epsilon_z^s = \left[1 - \frac{(2-hk)(kz+1)}{2(3-4\nu^s)} \right] A(t) k e^{kz} \cos(kx) - \frac{2kz+1}{4(3-4\nu^s)} A^2(t) k^2 e^{2kz} \cos(2kx) \end{cases} \quad (19)$$

注意到基底的预应变 ϵ_0 被完全释放。再式(19)代入式(14),得到接触面上的应力

$$\sigma_z^s|_{z=0} = \frac{4(1-\nu^s) + hk(1-2\nu^s)}{2(3-4\nu^s)(1+\nu^s)} A(t) k E^s \cos(kx) - \frac{1-2\nu^s}{4(3-4\nu^s)(1+\nu^s)} A(t)^2 k^2 E^s \cos(2kx) \quad (20)$$

忽略高阶项和小量后得到基底对薄膜的作用力

$$q \approx -2\bar{E}^s A(t) \cos(kx) = -2\bar{E}^s w \quad (21)$$

式中: $\bar{E}^s = E^s(1-\nu^s)/(3-4\nu^s)(1+\nu^s)$ 。利用式(21)得到基底对薄膜的功

$$W = \iint_{\Sigma} q w dx dy = - \iint_{\Sigma} 2\bar{E}^s w^2 dx dy \quad (22)$$

1.3 动力屈曲控制方程

定义 Lagrange 函数

$$L = U_e - W - E_k \quad (23)$$

式中:薄膜应变能 $U_e = U_b + U_m$ 。将式(11)~(12)、(22)代入,得

$$L = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (Dw_{,xx}^2 + \sigma_x \epsilon_x + 4\bar{E}^s w^2 - \rho h \dot{w}^2) dx dy \quad (24)$$

考虑挠度的周期性,将式(7)、(10)代入式(24),计算一个周期内的平均值,得到

$$\bar{L} = \frac{h\bar{E}}{32} k^4 A^4(t) + \frac{h\bar{E}}{48} \left(k^3 h^2 + 12k\epsilon(t) + \frac{48\bar{E}^s}{h\bar{E}} \right) k A^2(t) + \frac{h\bar{E}}{2} \epsilon^2(t) - \frac{1}{4} \rho h A'^2(t) \quad (25)$$

这是关于波幅 $A(t)$ 的一个泛函。为求泛函 $\bar{L}(A, \dot{A}, t)$ 的极小值,利用 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial A} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{A}} = 0 \tag{26}$$

将式(25)代入,整理得到

$$3\bar{E}h^4 A^3(t) + \bar{E}hk^2 A(t) [h^2 k^2 - 12\epsilon(t)] + 48\bar{E}^s k A(t) + 12\rho h A''(t) = 0 \tag{27}$$

为求平衡波数,令 $\partial \bar{L} / \partial k = 0$, 得到

$$h\bar{E} [3k^3 A^2(t) + 2k^3 h^2 - 12k\epsilon(t)] + 24\bar{E}^s = 0 \tag{28}$$

忽略式(27)中的惯性项 $12\rho h A''(t)$, 则得到静力屈曲的控制方程。联立式(28)解得静力屈曲时的平衡波数

$$k_{eq} = 2(3\bar{E}^s / \bar{E})^{1/3} / h \tag{29}$$

将式(29)代入式(28)并令 $A = 0$, 解得静力屈曲的临界荷载(预应变)

$$\epsilon_{cr}^{st} = (3\bar{E}^s / \bar{E})^{2/3} \tag{30}$$

假设薄膜动力屈曲中平衡波数不变,把式(29)代入式(27)得到

$$A^3(t) + [h^2 - 4\epsilon(t) / k_{eq}^2] A(t) + \rho h^3 A''(t) / (6k_{eq} \bar{E}^s) = 0 \tag{30}$$

定义单位预应变 $\bar{\epsilon}(t) = \epsilon(t) / \epsilon_{cr}^{st}$, 表示动力荷载与静力屈曲临界荷载的比值。再对波幅进行量纲一化 $\bar{A}(t) = A(t) / h$, 则得到量纲一化后的动力屈曲控制方程为

$$\bar{A}(t)^3 + [1 - \bar{\epsilon}(t)] \bar{A}(t) + \omega \bar{A}''(t) = 0 \tag{31}$$

其中

$$\omega = \frac{h^2 \rho}{12\bar{E}^s} \left(\frac{\bar{E}}{3\bar{E}^s} \right)^{1/3} \tag{32}$$

初始条件记为 $\bar{A}(0) = \bar{A}_0, \bar{A}'(0) = \bar{v}(0) = \bar{v}_0$, 这里 $\bar{v}(t)$ 是薄膜挠度波幅 $\bar{A}(t)$ 对时间的导数,下文简称速度。于是结构的动力屈曲问题转化为非线性二阶常微分方程(31)的初值问题。

2 动力屈曲

假设单位预应变随时间增长如下

$$\bar{\epsilon}(t) = 1 + ct = 1 + \tau \tag{33}$$

式中: c 为变形率; τ 有两重意义,一为量纲一时间,二为当前应变较静力屈曲临界应变的相对增量。将式(33)代入式(31)得到线性荷载下的动力平衡微分方程为 $\bar{A}(t)^3 - ct\bar{A}(t) + \omega \bar{A}''(t) = 0$, 或写成

$$\bar{A}_\tau(\tau)^3 - \tau \bar{A}_\tau(\tau) + \omega \bar{A}_\tau''(\tau) = 0 \tag{34}$$

式中: $\bar{A}_\tau(\tau) = \bar{A}(t) = \bar{A}(\tau/c)$ 。对于硅薄膜和 PDMS 聚合物基底,有材料参数: $E = 130 \text{ GPa}, \nu = 0.28, E^s = 1.8 \text{ MPa}, \nu^s = 0.48, \rho = 2.33 \text{ g/cm}^3, h = 0.1 \text{ }\mu\text{m}$ 。代入式(32)得到 $\omega = 1.43 \times 10^{-4} \text{ }\mu\text{s}^2$ 。取初始条件为 $\bar{A}_0 = 0.01, \bar{v}_0 = 0$ 并令 $c = 10$, 可解得式(34)的数值解,如图 2 所示。图 2(a)是波幅-速度的相图。图 2(b)是波幅的动力响应,其中点画线表示静力屈曲的情况。在动力响应初段,波幅很小,当荷载超过某一临界位置后,波幅迅速增大,并且绕着静力屈曲的响应振荡。图 2(c)表示静力屈曲和动力屈曲的波幅响应之差,可见随着荷载的增大,这个差值在振荡,但其周期和振幅都在减小。

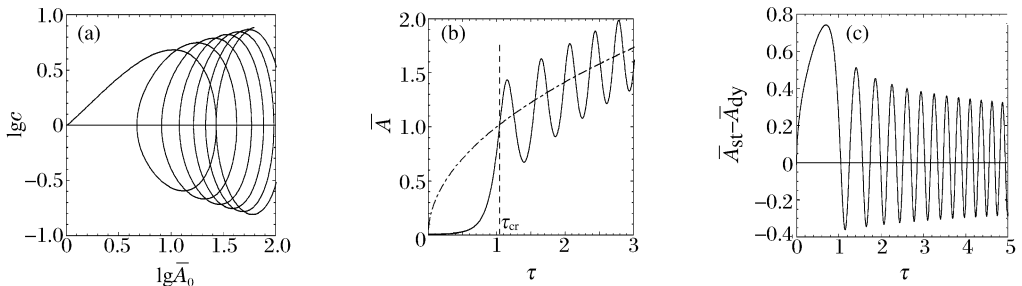


图 2 动力响应

Fig. 2 Dynamic response

利用 B-R 准则确定动力屈曲临界荷载^[15],即波幅响应第 1 个拐点处 $\bar{A}_\tau''(\tau) = 0$ ^[16]。由式(34)得到临界荷载满足 $\bar{A}_\tau(\tau_{cr}) = \sqrt{\tau_{cr}}$,即动力屈曲的临界荷载为动力屈曲与静力屈曲波幅响应的交点。由图 2 (b)~(c)可知,在动力波幅的第 1 个极值点处,动力屈曲的波幅对静力屈曲的波幅的增幅最大,之后随着荷载的增大,增幅减小。定义动力屈曲波幅增长系数 $\zeta_A = \bar{A}_{dy} / \bar{A}_{st}$,表示第 1 个极大值处二者的比值。

3 讨论

薄膜的动力屈曲受到初始挠度 \bar{A}_0 和单位应变率 c 的影响,如双对数图 3 所示。图 3(a)表示不同初

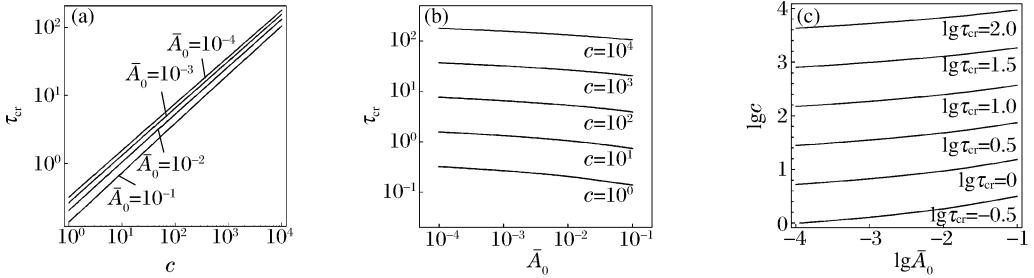


图 3 动力屈曲临界荷载
Fig. 3 The critical load in dynamic buckling

始挠度 \bar{A}_0 下,临界荷载随单位应变率 c 的变化规律,在双对数坐标下曲线近似于直线,并且临界荷载随单位应变率 c 的增大而增大。图 3(b)表示不同单位应变率 c 下,临界荷载随初始挠度 \bar{A}_0 的变化规律。临界荷载随初始挠度的增大而减小,并且当 $c \geq 10$ 时趋于直线。图 3(c)是在初始挠度 \bar{A}_0 和单位应变率 c 空间中,临界荷载的等值线。图 4 表示动力屈曲波幅增长系数 ζ_A 与初始挠度 \bar{A}_0 和单位应变率 c 的关系,显然单位应变率 c 越大,初始挠度 \bar{A}_0 越小,则 ζ_A 越大。

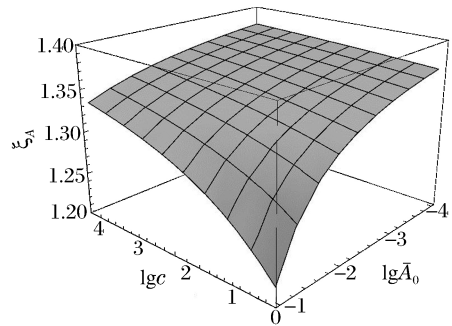


图 4 动力屈曲波幅增长系数与初始挠度和应变率的关系
Fig. 4 The relationship among the increment ratio of dynamic buckling amplitude, initial amplitude and strain rate

4 结论

基于 Kirchhoff 平板理论以及 Euler-Lagrange 方程导出薄膜、基底结构的动力屈曲控制方程,分析该结构在线性荷载下的动力特性。随着线性荷载的增大,波幅的动力响应先是缓慢增长,然后发生突变,最后围绕静力屈曲的路径振荡,并且波幅的峰值较静力屈曲的要大。动力屈曲受到初始挠度和应变率的影响,应变率越大,初始挠度越小,则临界荷载以及动力屈曲的波幅增幅也越大。当柔性电子元件受到的荷载较大时,结构可能发生二次屈曲,文中对基底的小变形假设也不再适用。

参考文献:

[1] Wong W S, Salleo A. Flexible electronics: Materials and applications[M]. New York: Springer, 2009.
 [2] Khang D Y, Jing H Q, Huang Y, et al. A stretchable form of single-crystal silicon for high-performance electronics on rubber substrates[J]. Science, 2006,311(5758):208-212.
 [3] Huang R, Suo Z. Instability of a compressed elastic film on a viscous layer[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002,39(7):1791-1802.
 [4] Huang R. Kinetic wrinkling of an elastic film on a viscoelastic substrate[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005,53(1):63-89.
 [5] Im S H, Huang R. Evolution of wrinkles in elastic-viscoelastic bilayer thin films[J]. Journal of Applied Mechan-

- ics, 2005,72(6):955-961.
- [6] Im S H, Huang R. Wrinkle patterns of anisotropic crystal films on viscoelastic substrates[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008,56(12):3315-3330.
- [7] Audoly B, Boudaoud A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—Part I: Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008,56(7):2401-2421.
- [8] Chen X, Hutchinson J W. Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates[J]. Journal of Applied Mechanics, 2004,71(5):597-603.
- [9] Song J, Jiang H, Choi W M, et al. An analytical study of two-dimensional buckling of thin films on compliant substrates[J]. Journal of Applied Physics, 2008,103(1):014303.
- [10] Jiang H Q, Khang D Y, Fei H Y, et al. Finite width effect of thin-films buckling on compliant substrate; Experimental and theoretical studies[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008,56(8):2585-2598.
- [11] Song J, Jiang H, Liu Z J, et al. Buckling of a stiff thin film on a compliant substrate in large deformation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2008,45(10):3107-3121.
- [12] Sun Y G, Choi W M, Jiang H Q, et al. Controlled buckling of semiconductor nanoribbons for stretchable electronics[J]. Nature Nanotechnology, 2006,1(3):201-207.
- [13] Bolotin V V. The dynamic stability of elastic systems[M]. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- [14] Lindberg H E, Florence A L. Dynamic pulse buckling: Theory and experiment[M]. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1987.
- [15] Budiansky B, Roth R S. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells[J]. NASA Technical Note, 1962:597-606.
- [16] Huang H, Han Q. Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to time-dependent axial load[J]. Composite Structures, 2010,92(2):593-598.

Analysis on nonlinear dynamic buckling of flexible electronic components*

ZHANG Xiao-qing, OU Zhi-cheng

(School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, Guangdong, China)

Abstract: This paper studies the dynamic buckling problem of the flexible electronic components, a stiff film bound to a compliant substrate. The substrate and the film are described by the small deformation theory and the Kirchhoff plane plate theory, respectively. A Lagrange function of the film is obtained, including its strain energy, kinetic energy and the work from the substrate. Dynamic buckling governing equation of the film is deduced according to the Euler-Lagrange equation. The dynamic responses of the film under linear load are solved. And the critical load is determined by the B-R criterion. The critical load in dynamic buckling is larger than that in static buckling. The amplitude response in dynamic buckling vibrates around that in static buckling.

Key words: solid mechanics; dynamic buckling; B-R criterion; flexible electronic component; film; substrate

* Received 11 June 2011; Revised 10 December 2011

Supported by the National Natural Science Foundation of China (10902040)

Corresponding author: ZHANG Xiao-qing, tcqzhang@scut.edu.cn