

文章编号: 1001-1455(2012)05-0463-07

SH 波入射时半空间界面裂纹与圆形衬砌的相互作用*

齐 辉, 张根昌, 陈冬妮, 郭 晶, 赵春香

(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 利用复变函数和 Green 函数法研究了双相介质半空间界面裂纹及界面附近圆形衬砌对 SH 波的散射与动应力集中问题。首先, 采用“映像”思想构造满足自由边界条件的散射波表达式, 进而求解所需的 Green 函数; 其次, 采用裂纹“切割”技术构造裂纹, 并根据连续性条件建立了求解该问题的无穷代数方程组; 最后, 给出了不同入射波数时界面裂纹与衬砌的相互作用。结果表明, 裂纹的存在显著放大了衬砌界面的动应力集中。

关键词: 固体力学; 动应力集中系数; Green 函数; 双向介质半空间; 圆形衬砌; 裂纹; SH 波散射

中图分类号: O343.1; P315.3

国标学科代码: 1301510

文献标志码: A

界面断裂动力学是在断裂动力学基础上发展起来的, 研究含裂纹体的界面材料在动态荷载作用下的力学行为。在实际工程的许多领域中, 都要求对动态荷载作用下含裂纹材料的动态特性给出合理而准确的评价^[1]。而裂纹对材料的动态特性及破坏的影响通常是不可忽视的, 有时甚至是决定性的。对有界面存在的材料, 材料界面往往是裂纹形式缺陷容易发生的部位, 界面附近缺陷的动应力集中程度过高也影响界面裂纹尖端场的动应力集中或开裂。近年来, 断裂动力学和界面断裂动力学的研究得到了迅速的发展, 虽然许多问题仍处在探索阶段, 但动态断裂研究在抗震防爆工程、航空航天结构安全性预测等方面得到了大量的应用。有关界面缺陷对 SH 波散射的研究也取得了丰硕的成果^[2-8], 并成功应用于实践。本文中, 利用 Green 函数法构造出合适的 Green 函数, 研究界面附近圆形衬砌和界面裂纹对 SH 波的散射问题。

1 问题表述

如图 1 所示, 沿 $x''=0$ 相接的两种不同介质组成的半空间, 且在 $x''=0, -A < y'' < A$ 上存在一条直线界面裂纹。 $x'' < 0$ 直角平面区域中介质的密度和剪切波速分别为 ρ_1 和 c_1 , $x'' > 0$ 直角平面区域中的分别为 ρ_2 和 c_2 。简谐平面 SH 波由 $x'' < 0$ 的直角平面区域中沿入射角 α_0 入射到界面。其中介质 I 含外半径为 R_2 、内半径为 R_1 的圆形衬砌, 介质密度和剪切波速分别为 ρ_3 和 c_3 , 圆形衬砌中心到水平边界和垂直界面的距离分别为 h 和 d 。

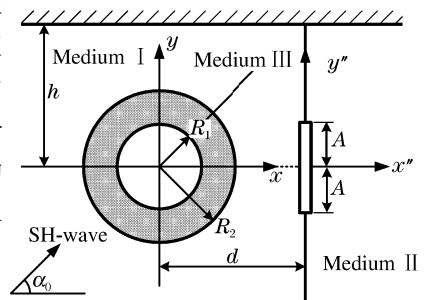


图 1 含圆形衬砌的双相介质半空间模型

Fig. 1 The bi-material model with a circular lining in half-space

2 构造 Green 函数

如图 2 所示, 一个含有圆形衬砌的均匀、各向同性的二维直角平面区域, 在它垂直边界表面上任意一点承受出平面线源荷载 $\delta(z-z_0)$ 时, 位移的基本解采用 Green 函数。

* 收稿日期: 2011-03-30; 修回日期: 2011-07-18

作者简介: 齐 辉(1963—), 男, 教授, 博士生导师。

引入复变量 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, 位移场 G 在复数坐标系中满足控制方程

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 G = 0 \tag{1}$$

式中: $k = \omega / c_s$, 为波数, $c_s = \sqrt{\mu / \rho}$, 为介质的剪切波速, ω 为位移函数的圆频率, μ, ρ 分别为介质的剪切弹性模量和密度。

在极坐标下的应力表达式为

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial G}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right), \quad \tau_{\theta z} = i\mu \left(\frac{\partial G}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \tag{2}$$

边界条件可以表述为

$$\begin{cases} \Gamma_1: \tau_{xz} |_{x=d} = \delta(z - z_0), & \Gamma_2: \tau_{yz} |_{y=h} = 0, \\ \Gamma_3: \tau_{rz}^I |_{r=R_2} = \tau_{rz}^{III} |_{r=R_2}, & G^I |_{r=R_2} = G^{III} |_{r=R_2}, \\ \Gamma_4: \tau_{rz}^{III} |_{r=R_1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

式中: δ 为 Dirac-Delta 函数, $\tau_{rz}^I, \tau_{rz}^{III}$ 为圆形衬砌内外总径向剪切应力, G^I, G^{III} 为圆形衬砌内外总位移, 即介质 I 和衬砌 III 内的位移场。

满足控制方程(1)和边界条件(3)的位移场基本解, 由两部分构成: 直角平面区域垂直边界表面线源荷载产生的扰动和圆形衬砌所激发的散射波。

对于线源荷载 $\delta(z - z_0)$ 在一个完整的直角域内的扰动, 可将它视为入射波 $G^{(i)}$ ($G^{(i)}$ 是波动里入射波位移场), 满足不含圆形衬砌的直角平面域边界应力自由条件, 利用“虚设点源”的方法构造。首先, 将直角平面区域对于水平边界延拓为半无限空间, 并对垂直边界表面上作用对称于边界的出平面线源荷载, 因此入射波可以表述为

$$G^{(i)}(z, \bar{z}) = \frac{i}{2\mu_1} [H_0^{(1)}(k_1 |z - z_{01}|) + H_0^{(1)}(k_1 |z - z_{02}|)] \tag{4}$$

式中: k_1, k_2 分别表示介质 I 和介质 II 中波数, $z_{01} = d + i(h - y_0), z_{02} = d + i(h + y_0), \mu_1$ 为介质 I 的剪切弹性模量, $H_0^{(1)}$ 为零阶第一类 Hankel 函数, 它与本文设定的时间因子 $\exp(-i\omega t)$ 配对, 表明 $G^{(i)}$ 是由源点向外传播的发散波, 物理意义吻合。此 Hankel 函数的宗量是波数 k 与源点和像点之间距离的乘积, 始终保持为正值。 z_0, z 分别代表源点和像点的位置。

入射波场相应的应力表达式为

$$\tau_{rz}^{(i)} = -\frac{ik_1}{4} (\varphi_1 e^{i\theta} + \varphi_2 e^{-i\theta}), \quad \tau_{\theta z}^{(i)} = \frac{k_1}{4} (\varphi_1 e^{i\theta} - \varphi_2 e^{-i\theta}) \tag{5}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{01}|) \frac{|z - z_{01}|}{z - z_{01}} + H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{02}|) \frac{|z - z_{02}|}{z - z_{02}} \\ \varphi_2 = H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{01}|) \frac{z - z_{01}}{|z - z_{01}|} + H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{02}|) \frac{z - z_{02}}{|z - z_{02}|} \end{cases}$$

由于圆形衬砌所激发的散射波会在圆形衬砌和直角平面区域自由表面上发生多次反射, 使能满足直角平面区域表面上应力自由边界条件波场的解析解很难给出。为了克服这一难点, 采用映像叠加原理及坐标移动技术构造(其中 s 表示散射波)

$$G^{(s)}(z, \bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{j=1}^4 S_n^{(j)} \tag{6}$$

$$\begin{cases} S_n^{(1)} = H_n^{(1)}(k |z_1|) (z_1 / |z_1|)^n, & S_n^{(2)} = H_n^{(1)}(k |z_2|) (z_2 / |z_2|)^{-n}, \\ S_n^{(3)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k |z_3|) (z_3 / |z_3|)^{-n}, & S_n^{(4)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k |z_4|) (z_4 / |z_4|)^n \end{cases}$$

式中: $z_1 = z, z_2 = z_1 - 2d, z_3 = z_1 - 2ih, z_4 = z_2 - 2ih$ 。

散射波场相应的应力表达式为

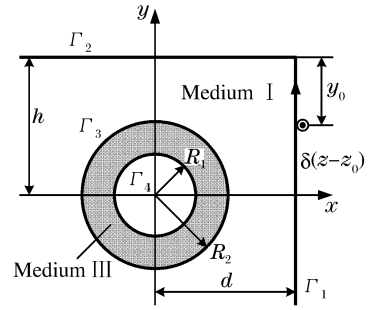


图 2 线源荷载作用的直角区域模型
Fig. 2 The right-angle plane model impacted by a line source force

$$\tau_{rz}^{(s)} = \frac{k_1 \mu_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (\varphi_{n1} e^{i\theta} - \varphi_{n2} e^{-i\theta}), \quad \tau_{\theta z}^{(s)} = \frac{ik_1 \mu_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (\varphi_{n1} e^{i\theta} + \varphi_{n2} e^{-i\theta}) \quad (7)$$

$$\begin{cases} \varphi_{n1} = H_{n-1}^{(1)}(k_1 | z_1 |) (z_1 / | z_1 |)^{n-1} - H_{n+1}^{(1)}(k_1 | z_2 |) (z_2 / | z_2 |)^{n-1} - \\ \quad (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k_1 | z_3 |) (z_3 / | z_3 |)^{n-1} + (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k_1 | z_4 |) (z_4 / | z_4 |)^{n-1} \\ \varphi_{n2} = H_{n+1}^{(1)}(k_1 | z_1 |) (z_1 / | z_1 |)^{n+1} - H_{n-1}^{(1)}(k_1 | z_2 |) (z_2 / | z_2 |)^{n+1} - \\ \quad (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k_1 | z_3 |) (z_3 / | z_3 |)^{n+1} + (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k_1 | z_4 |) (z_4 / | z_4 |)^{n+1} \end{cases}$$

圆形衬砌内产生驻波, 表达式为

$$G^{(st)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_n H_n^{(2)}(k_3 | z |) + C_n H_n^{(1)}(k_3 | z |)] (z / | z |)^n \quad (8)$$

式中: $k_3 = \omega / c_3$, 是衬砌内 SH 波的波数, $c_3 = \sqrt{\mu_3 / \rho_3}$, 为剪切波速, $H_n^{(2)}$ 是 n 阶第二类 Bessel 函数。

驻波相应的应力表达式为

$$\tau_{rz}^{(st)} = \frac{\mu_3 k_3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_n P_n(k_3 | z |) + C_n Q_n(k_3 | z |)] (z / | z |)^n \quad (9)$$

$$P_n(\cdot) = H_{n-1}^{(2)}(\cdot) - H_{n+1}^{(2)}(\cdot), \quad Q_n(\cdot) = H_{n-1}^{(1)}(\cdot) - H_{n+1}^{(1)}(\cdot)$$

利用圆形衬砌内边界 $r=R_1$ 应力自由、圆形衬砌外边界 $r=R_2$ 应力和位移连续性条件

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(st)} = 0 & r = R_1 \\ \tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(s)} = \tau_{rz}^{(st)} & r = R_2 \\ G^{(i)} + G^{(s)} = G^{(st)} & r = R_2 \end{cases} \quad (10)$$

得到确定待定系数 A_n, B_n, C_n 的方程组, 经整理后方程组可以表述为

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{n1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta_{n1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \eta_{n1} = \psi_1 & r = R_1 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{n2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta_{n2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \eta_{n2} = \psi_2 & r = R_2 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{n3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta_{n3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \eta_{n3} = \psi_3 & r = R_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \xi_{n1} = 0, & \xi_{n2} = \frac{k_1 \mu_1}{2} (\varphi_{n1} e^{i\theta} - \varphi_{n2} e^{-i\theta}), \\ \xi_{n3} = H_n^{(1)}(k_1 | z_1 |) (z_1 / | z_1 |)^n + H_n^{(1)}(k_1 | z_2 |) (z_2 / | z_2 |)^{-n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta_{n1} = -\frac{\mu_3 k_3}{2} P_n(k_3 | z |) (z / | z |)^n & \eta_{n1} = -\frac{\mu_3 k_3}{2} Q_n(k_3 | z |) (z / | z |)^n \\ \zeta_{n2} = -\frac{\mu_3 k_3}{2} P_n(k_3 | z |) (z / | z |)^n & \eta_{n2} = -\frac{\mu_3 k_3}{2} Q_n(k_3 | z |) (z / | z |)^n \\ \zeta_{n3} = -H_n^{(2)}(k_3 | z |) (z / | z |)^n & \eta_{n3} = -H_n^{(1)}(k_3 | z |) (z / | z |)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1 = 0, & \psi_2 = \frac{ik_1}{4} (\varphi_1 e^{i\theta} + \varphi_2 e^{-i\theta}), \\ \psi_3 = -\frac{i}{2\mu} [H_0^{(1)}(k_1 | z - z_{01} |) + H_0^{(1)}(k_1 | z - z_{02} |)] \end{cases}$$

方程两边同乘 $\exp(-im\theta)$, 并在 $(-\pi, \pi)$ 上积分有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{mnj} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta_{mnj} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \eta_{mnj} = \psi_{mj} \quad j = 1, 2, 3 \quad (12)$$

$$\begin{cases} \xi_{mnj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_{nj} e^{-im\theta} d\theta, & \zeta_{mnj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_{nj} e^{-im\theta} d\theta \\ \eta_{mnj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta_{nj} e^{-im\theta} d\theta, & \psi_{mj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_j e^{-im\theta} d\theta \end{cases} \quad j = 1, 2, 3$$

为得到未知系数 $A_n, B_n, C_n (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 通过有限项截断方程组(12), 得到有限未知数的方

程组并求解。在本文算例中,对于上述无穷代数方程组中的每一个级数项分别选取 7 项即可很好满足预先给定的计算精度(10^{-6})。

3 圆形衬砌对 SH 波的散射

引入复平面(z'', \bar{z}''), $z'' = z - d$, 且 $z'' = r'' \exp(i\theta'')$, 利用映像叠加法, 则全空间中的等效入射波为

$$W^{(i,e)} = W_0 \left\{ \exp \left[\frac{ik_1}{2} (z'' e^{-i\alpha_0} + \bar{z}'' e^{i\alpha_0}) \right] + \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [(z'' - 2ih) e^{-i\beta_0} + (\bar{z}'' - 2ih) e^{i\beta_0}] \right\} \right\} \quad (13)$$

式中: $\beta_0 = \pi - \alpha_0$, W_0 为入射波的最大位移, α_0 为 SH 波的入射角度。

界面上产生的等效反射波和等效折射波的表达式分别为

$$W^{(r,e)} = W_2 \left\{ \exp \left[\frac{ik_1}{2} (z'' e^{i\alpha_0} + \bar{z}'' e^{-i\alpha_0}) \right] + \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [(z'' - 2ih) e^{i\beta_0} + (\bar{z}'' - 2ih) e^{-i\beta_0}] \right\} \right\} \quad (14)$$

$$W^{(f,e)} = W_4 \left\{ \exp \left[\frac{ik_2}{2} (z'' e^{-i\alpha_4} + \bar{z}'' e^{i\alpha_4}) \right] + \exp \left\{ \frac{ik_2}{2} [(z'' - 2ih) e^{-i\beta_1} + (\bar{z}'' - 2ih) e^{i\beta_1}] \right\} \right\} \quad (15)$$

式中: $\beta_1 = \pi - \alpha_4$, α_4 为界面处的折射角度, 上标 (r, e)、(f, e) 分别表示等效反射波和等效折射波, 上标 (st)、(i) 表示驻波和入射波。

SH 波作用下由圆形衬砌产生的散射波场 $W^{(s)}$ 与式(6)相同, 驻波场 $W^{(st)}$ 与式(8)相同, 待定系数的求解过程与 Green 函数相同。根据已得到的等效入射波、等效反射波、等效折射波以及圆形衬砌产生的散射波和驻波, 可求得相应产生的应力 $\tau_{\theta z}^{(i,e)}$ 、 $\tau_{\theta z}^{(r,e)}$ 、 $\tau_{\theta z}^{(f,e)}$ 、 $\tau_{\theta z}^{(s)}$ 和 $\tau_{\theta z}^{(st)}$ 。

为了研究 SH 波作用下圆形衬砌和界面裂纹的相互作用, 首先, 按裂纹“切割”技术构造长度为 $2A$ 的直线型界面裂纹。构造过程是: 沿 y'' 界面将材料剖开, 在欲出现裂纹的区段左右的剖面施加一对出平面反力 $-\tau_{\theta z}^{(I)}$ 、 $-\tau_{\theta z}^{(II)}$, 则这些区段左右剖面的合应力均为零, 即可看作裂纹; 同时, 为了满足剖面上裂纹以外区域的应力和位移的连续条件, 在左右剖面的相应区域施加一对待求的出平面外力系 f_1 、 f_2 。则剖面上的应力连续性条件是自然满足的。过程如图 3 所示 (f_1 、 f_2 为区域 I 和 II 剖面的附加外力系)。

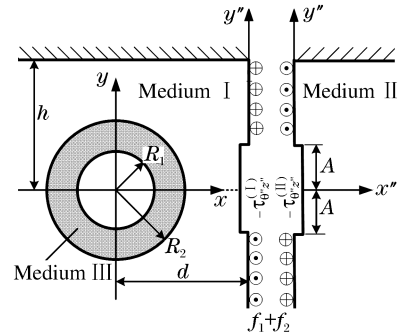


图 3 半空间双相介质界面的契合模型
Fig. 3 Conjunction model of bi-material interface in half-space

在直角平面区域 I 和 II 的“剖分”面上, 总位移和总应力分别为

$$W^{(I)} = W^{(i,e)} + W^{(r,e)} + W^{(s)}, \quad W^{(II)} = W^{(f,e)}, \quad \tau_{\theta z}^{(I)} = \tau_{\theta z}^{(i,e)} + \tau_{\theta z}^{(r,e)}, \quad \tau_{\theta z}^{(II)} = \tau_{\theta z}^{(f,e)} \quad (16)$$

界面上的应力连续条件写成

$$\tau_{\theta z}^{(I)} \cos \theta'_0 + f_1(r''_0, \theta'_0) = \tau_{\theta z}^{(II)} \cos \theta'_0 + f_2(r''_0, \theta'_0) \quad (17)$$

式中: 当 $\theta'_0 = \theta_1 = -90^\circ$ 时, $A \leq r''_0 < \infty$; 当 $\theta'_0 = \theta_2 = 90^\circ$ 时, $A \leq r''_0 \leq h$ 。

利用 $\tau_{\theta z}^{(i)} + \tau_{\theta z}^{(r)} = \tau_{\theta z}^{(f)}$, 可得

$$f_1(r''_0, \theta'_0) = f_2(r''_0, \theta'_0) \quad \theta'_0 = \theta_1, \theta_2 \quad (18)$$

界面上的位移连续条件为

$$W^{(I)}(r'', \theta') + W^{(f_1)}(r'', \theta') + W^{(c1)}(r'', \theta') = W^{(II)}(r'', \theta') + W^{(f_2)}(r'', \theta') + W^{(c2)}(r'', \theta') \quad (19)$$

式中: $W^{(f_1)}$ 表示作用于区域 I 剖面的附加外力系 $f_1(r''_0, \theta'_0)$ 在界面任意一点引起的位移场, $W^{(f_2)}$ 表示作用于区域 II 剖面的附加外力系 $f_2(r''_0, \theta'_0)$ 在界面任意一点引起的位移场。 $W^{(c1)}$ 代表作用于介质 I 剖面裂纹区域的附加外力系 $-\tau_{\theta z}^{(I)}$ 在界面任意一点引起的位移场, $W^{(c2)}$ 代表作用于介质 II 剖面裂纹区域的附加外力系 $-\tau_{\theta z}^{(II)}$ 在界面任意一点引起的位移场。利用前面求得的适用于本文问题的 Green 函数, 并应用方程(19), 得出定解积分方程为

$$\int_A^h f_1(r''_0, \theta_2) [G_1(r'', \theta_2, r''_0, \theta_2) + G_2(r'', \theta_2, r''_0, \theta_2)] dr''_0 + \int_A^\infty f_1(r''_0, \theta_1) [G_1(r'', \theta_2, r''_0, \theta_1) + G_2(r'', \theta_2, r''_0, \theta_1)] dr''_0 = [-W^{(s)}]_{\theta=\theta_2} + \int_0^A \tau_{\theta z}^{(I)}(r''_0, \theta_1) G_1(r'', \theta_2, r''_0, \theta_1) dr''_0 - \int_0^A \tau_{\theta z}^{(I)}(r''_0, \theta_2) G_1(r'', \theta_2, r''_0, \theta_2) dr''_0 +$$

$$\int_0^A \tau_{\theta_2}^{(1)}(r''_0, \theta_1) G_2(r'', \beta_3, r''_0, \theta_1) dr''_0 - \int_0^A \tau_{\theta_2}^{(1)}(r''_0, \theta_2) G_2(r'', \theta_2, r''_0, \theta_2) dr''_0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \int_A^h f_1(r''_0, \theta_2) [G_1(r'', \beta_2, r''_0, \theta_2) + G_2(r'', \beta_2, r''_0, \theta_2)] dr''_0 + \int_A^\infty f_1(r''_0, \theta_1) [G_1(r'', \theta_1, r''_0, \theta_1) + G_2(r'', \theta_1, r''_0, \theta_1)] dr''_0 = \\ & [-W^{(s)}]_{\sigma=\theta_1} + \int_0^A \tau_{\theta_2}^{(1)}(r''_0, \theta_1) G_1(r'', \theta_1, r''_0, \theta_1) dr''_0 - \int_0^A \tau_{\theta_2}^{(1)}(r''_0, \theta_2) G_1(r'', \theta_1, r''_0, \theta_2) dr''_0 - \\ & \int_0^A \tau_{\theta_2}^{(1)}(r''_0, \theta_1) G_2(r'', \theta_1, r''_0, \theta_1) dr''_0 - \int_0^A \tau_{\theta_2}^{(1)}(r''_0, \theta_2) G_2(r'', \theta_1, r''_0, \theta_2) dr''_0 \end{aligned} \quad (21)$$

上述定解积分方程组是含弱奇异性的第一类 Fredholm 方程组，奇异性表现为 Green 函数的像点与源点重合时，被积核函数呈对数奇异性。求解该积分方程组的方法多种多样，本文中采用弱奇异积分方程组直接离散法，结合散射波的衰减特性，把积分方程组转化为线性代数方程组，求解在一系列离散点上附加外力系 $f_1(r''_0, \theta'_0)$ 和 $f_2(r''_0, \theta'_0)$ 。

4 动应力集中系数

在稳态的入射 SH 波作用下，可以求出双相介质界面附近圆形衬砌动应力分布，但求得动应力集中系数则是重要的任务之一。通常动应力集中系数可以写成

$$\tau_{\theta_2}^* = |\tau_{\theta_2}^{(\cdot)} / \tau_0| \quad (22)$$

式中： $\tau_{\theta_2}^{(\cdot)}$ 为圆形衬砌周边上的应力， $\tau_0 = \mu_1 k_1 W_0$ ，为入射应力的最大幅值。

求得代数方程组的附加外力系 f_1 和 f_2 后，可进一步计算出圆形衬砌外边界上的动应力分布

$$\tau_{\theta_2}^{(1)} = \tau_{\theta_2}^{(i)} + \int_A^h f_1(r''_0, \theta_2) \frac{\mu_1}{r} \frac{\partial G_1(r, \theta, r''_0, \theta_2)}{\partial \theta} dr''_0 + \int_A^\infty f_1(r''_0, \theta_1) \frac{\mu_1}{r} \frac{\partial G_1(r, \theta, r''_0, \theta_2)}{\partial \theta} dr''_0 \quad (23)$$

式中： $\tau_{\theta_2}^{(i)} = \tau_{\theta_2}^{(i)} + \tau_{\theta_2}^{(r)} + \tau_{\theta_2}^{(s)}$ 。

5 算例和分析

作为算例，给出了 SH 入射含双相介质半空间界面附近圆形衬砌时，衬砌外界面的动应力集中系数 $\tau_{\theta_2}^*(r=R_1)$ 的计算结果。取 $R_1 = R, R_2 = 0.5R$ ，入射波数用 $k_1 R$ 表示，量纲一的衬砌位置为 $(d/R, h/R)$ ，与介质相关的量纲一参数用 $\mu_1^* = \mu_2 / \mu_1, \mu_2^* = \mu_3 / \mu_1, k_1^* = k_2 / k_1, k_2^* = k_3 / k_1$ 表示。

(1) 图 4(a) 给出了 $k_1^* = 1.0, \mu_1^* = 1.0, k_2^* = 1.0, \mu_2^* = 0.001$ 时，SH 波垂直入射时圆形衬砌界面动应力集中系数 $\tau_{\theta_2}^*$ 的分布情况。此时算例退化为均匀介质半空间中含圆形孔洞问题，当入射角度与裂纹平行时，裂纹的影响可以忽略。当 $k_1 R = 0.1$ 时， $\tau_{\theta_2}^*$ 的最大值为 4.0，结果与文献[9]一致。

(2) 图 4(a) 也给出了 $k_1^* = 1.0, \mu_1^* = 1.0, k_2^* = 1.0, \mu_2^* = 5.0$ 时，SH 波垂直入射引起的圆形衬砌界面动应力集中系数 $\tau_{\theta_2}^*$ 的计算结果。此时，相当于均匀介质半空间中刚性较大的衬砌对 SH 波的散射，当 $k_1 R = 0.1$ 时， $\tau_{\theta_2}^*$ 的最大值为 1.34。

(3) 图 4(b) 给出了 $k_1^* = 1.0, \mu_1^* = 0.5, k_2^* = 1.0, \mu_2^* = 0.5$ 时，SH 波水平入射引起的圆形衬砌界面动应力集中系数 $\tau_{\theta_2}^*$ 的计算结果。由于界面裂纹的存在对衬砌界面动应力集中产生显著影响，最大值发生在 $\theta = 72^\circ$ 处，与无裂纹情况相比， $\tau_{\theta_2}^*$ 增加了 20% 左右。由此可见，界面裂纹对 $\tau_{\theta_2}^*$ 的影响较大，在实际工程中应予以重视。

(4) 图 4(b) 也给出了 $k_1^* = 1.0, \mu_1^* = 2.0, k_2^* = 1.0, \mu_2^* = 2.0$ 时，SH 波水平入射引起的圆形衬砌界面动应力集中系数 $\tau_{\theta_2}^*$ 的计算结果。当 $\mu_1^* > 1.0$ 时，为刚性覆盖，当 $\mu_1^* = 2.0$ 时，裂纹对衬砌界面 $\tau_{\theta_2}^*$ 的影响不超过 5%，与柔性覆盖相比，裂纹的影响较小。另外， μ_1^* 取不同值表示两种介质的波速不同 ($\mu_1^* = \mu_2 / \mu_1 = (\rho_2 c_2^2) / (\rho_1 c_1^2) = c_2^2 / c_1^2$)，当 $\mu_1^* > 1.0$ 时，表明入射波由软介质(波速小)进入到硬介质(波速大)时的散射情况；当 $\mu_1^* < 1.0$ 时，则为相反情况。

(5) 图 4(c) 给出了 $k_1^* = 1.0, \mu_1^* = 0.5, k_2^* = 1.0, \mu_2^* = 0.5$ 时，SH 波低频、高频斜入射引起的衬砌界面动应力集中系数 $\tau_{\theta_2}^*$ 的计算结果。当 SH 波斜入射 ($\alpha_0 = 45^\circ$) 时， $\tau_{\theta_2}^*$ 产生不对称分布，在低频 ($k_1 R = 0.1$)，圆形衬砌界面 $\tau_{\theta_2}^*$ 的最大值总是偏向界面裂纹一侧；在高频 ($k_1 R = 2.0$) 时，界面裂纹对圆形衬砌界

面 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 产生有利的影响, 当 $\theta = 70^\circ$ 时, 裂纹长度 $2A/R = 2.0$ 时, $\tau_{\theta z}^*$ 几乎降低了 40%。

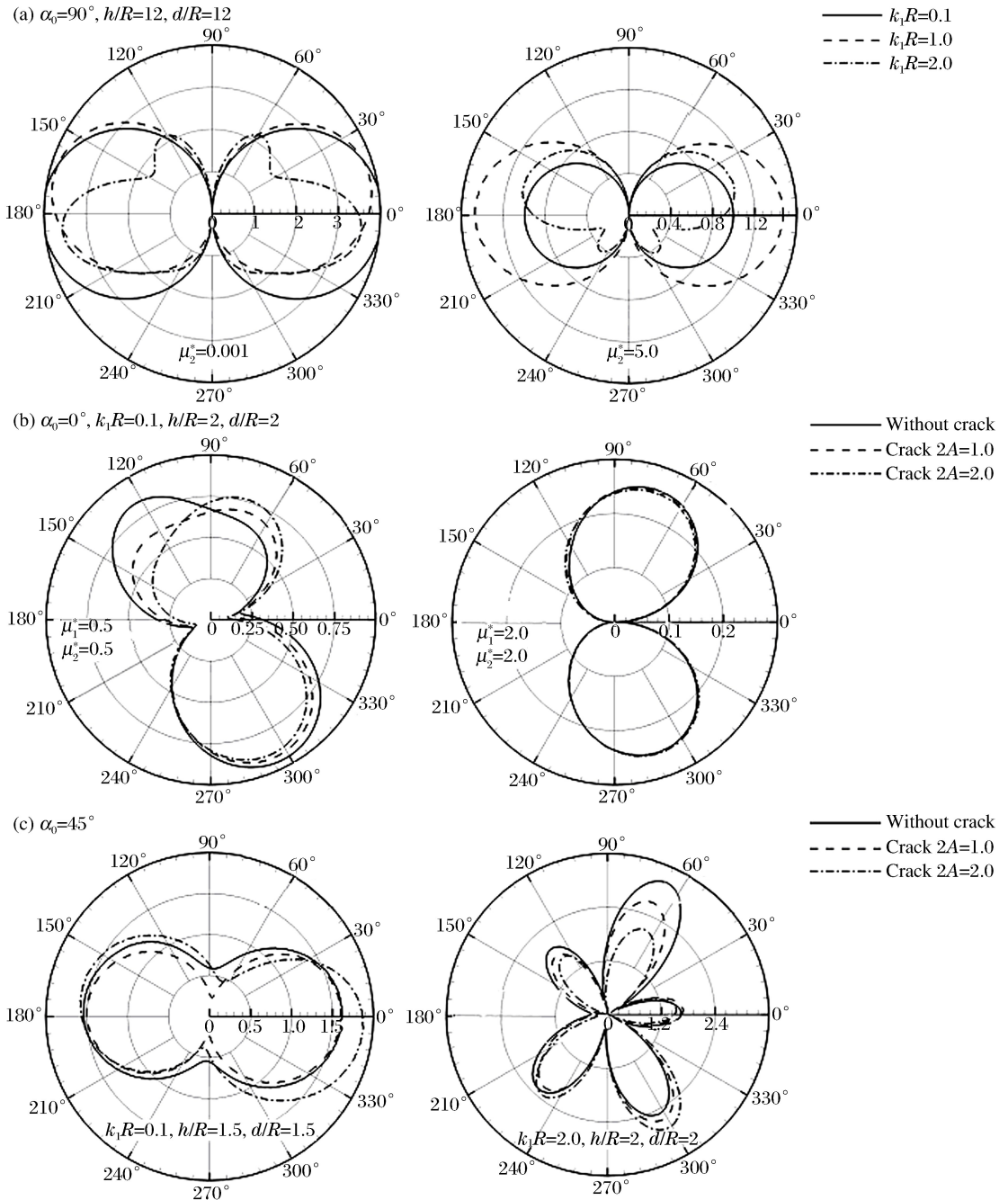


图 4 动应力集中系数分布

Fig. 4 Distribution of dynamic stress concentration factors

6 结 论

(1) 当界面裂纹距离圆形衬砌较近时, 对动应力集中系数影响较大, 而当界面裂纹距离圆形衬砌较远时, 就可以忽略对动应力集中系数的影响。

(2) 入射波数及自由边界等因素也对圆形夹杂动应力集中系数有一定的影响, 但影响并不明显, 因此更关注界面裂纹的存在对动应力集中系数的影响情况。

参考文献:

[1] Sih G C. Mechanics of fracture[M]. Leyden: Noordhof, 1973.

- [2] Yuan X, Liao Z P. Scattering of plane SH waves by a cylindrical alluvial of circular-arc cross-section[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1995,24:1303-1313.
- [3] Sih G C. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1965,32(1):51-58.
- [4] Loeber J F, Sih G C. Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1968,44(1):90-98.
- [5] 汪越胜,王铎. SH波对有部分脱胶衬砌的圆形孔洞的散射[J]. 力学学报,1994,26(4):462-469.
WANG Yue-sheng, WANG Duo. Diffraction of SH-wave by a circular cavity with a particular debonded liner[J]. Acta Mechanica Sinica, 1994,26(4):462-469.
- [6] Alshits V I, Deschamps M, Lyubimov V N. Dispersion anomalies of shear horizontal guided waves in two- and three-layered plates[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2005,118(5):2850-2859.
- [7] SHI Wen-pu, LIU Dian-kui, SONG Yong-tao, et al. Scattering of circular cavity in right-angle plane space to steady SH-wave[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006,27(12):1619-1626.
- [8] Nazaret D, Lee V W, Liang J W. Antip lane deformations around arbitrary-shaped canyons on a wedge-shape half space: Moment method solutions[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2003,2(2):281-287.
- [9] 林宏,刘殿魁. 半无限空间中圆形孔洞周围 SH波的散射[J]. 地震工程与工程振动,2002,22(2):9-16.
LIN Hong, LIU Dian-kui. Scattering of SH-wave around a circular cavity in half space[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002,22(2):9-16.

Scattering of SH-wave by the circular lining with an interface crack in a bi-material half-space *

QI Hui, ZHANG Gen-chang, CHEN Dong-ni, GUO Jing, ZHAO Chun-xiang
(College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University,
Harbin 150001, Heilongjiang, China)

Abstract: Based on the complex variable function method and the Green's function method, the scattering of SH-wave by a bi-material interface crack and a circular lining near a bi-material interface in half-space was explored and the corresponding dynamic stress concentration at the circular lining interface was investigated. Firstly, the expression of the scattering wave was proposed which satisfied the free boundary conditions, and then the Green's function was constructed. Secondly, the crack was made out by the crack-division technique, and a series of algebraic equations for determining the unknown forces were developed from the continuity conditions. Finally, some examples for the dynamic stress concentration factors of the circular elastic lining were given, and the effects of the interface crack, the incident wave and the free boundary on the dynamic stress concentration factors at the edge of the circular elastic inclusion were analyzed. The calculated results show that the existence of the interface crack has great effects on the dynamic stress concentration factors at the circular lining interface.

Key words: solid mechanics; dynamic stress concentration; Green's function; bi-material half-space; circular lining; crack; scattering of SH-wave

* Received 30 March 2011; Revised 18 July 2011

Corresponding author: ZHANG Gen-chang, gchzhang@126.com