

文章编号: 1001-1455(2013)01-0001-10

线性黏弹性球面波的特征线分析*

赖华伟¹, 王占江², 杨黎明³, 王礼立³

(1. 浙江水利水电高等专科学校市政工程系, 浙江 杭州 310018;

2. 西北核技术研究所, 陕西 西安 710024;

3. 宁波大学力学和材料科学研究中心, 浙江 宁波 315211)

摘要: 基于 ZWT 黏弹性本构方程建立了体现高应变率效应的黏弹性球面波的控制方程组, 包含 5 个偏微分方程, 解 5 个未知量 v 、 σ_r 、 σ_θ 、 ϵ_r 和 ϵ_θ 。采用特征线法, 问题转化为解 3 族特征线上的 5 个常微分方程, 物理上图像清晰, 数学上易于求解。特征线数值分析显示, 黏弹性球面波的衰减和弥散效应超过线弹性球面波。球面扩散引起的环向拉应力是导致介质拉伸破坏的主因。进一步还针对强间断黏弹性球面波得出其衰减特性的解析表达式, 表明这种更强的衰减特性是几何扩散效应和本构黏性效应两者共同作用的后果。

关键词: 爆炸力学; 黏弹性; 特征线法; 球面波; 冲击波; 衰减

中图分类号: O382; O347.1

国标学科代码: 1303530

文献标志码: A

在地震、物理勘探、工程防护、地下爆炸和工程爆破等实际问题中常常会遇到点爆炸或点冲击载荷, 或者在球形腔壁受到爆炸载荷等情况, 这时需要处理的是球面波传播问题。

球面波与平面波相比, 如弹性球面波的研究所显示的^[1], 一个重要的差别在于球面波波阵面在传播过程中不断扩散, 导致波剖面不断变化, 而且初始的压缩波在传播时其波阵面的后方会逐渐形成拉应力和产生振荡等。

强爆炸波以球面波形式向外发散传播时, 随其强度逐渐降低, 传统上认为将形成 3 个区域, 即: 高压区(材料剪切强度可忽略的流体动力区)、中压区(剪切强度不可忽略的弹塑性区)和低压区(塑性可忽略的弹性区)。

应力波的传播特性强烈地依赖于介质的材料本构关系, 而材料本构关系在爆炸/冲击载荷下以体现应变率效应为重要特征; 因此, 在中压区和低压区需要处理的实际上分别是黏弹塑性波和黏弹性波。类似地, 在离地震震源足够远的区域也需要处理黏弹性波问题。可见黏弹性球面波的研究不论在学术上还是在实际工程中都具有重要意义。尤其对于岩石等脆性材料, 在应变值不大的情况下, 可以按线性黏弹性波作工程处理。

从文献调研看, 线性黏弹性球面波的研究迄今不多。除了 E. A. Koshelev^[2]、邓德全等^[3]采用 Laplace 法, J. L. Wegner^[4]采用特征线法作过初步探讨外, 迄今缺乏进一步的深入研究; 对于强间断黏弹性球面波的衰减特性更缺乏解析分析。本文中拟采用特征线法对这一问题作进一步的、更系统的分析。

1 线性黏弹性球面波的控制方程组

球面波的波阵面是同心球面。由于运动的球对称性质, 在物质坐标的极坐标 (r, θ, φ) 中(见图 1)只有径向位移 u 是非零分量 $u(r, t) \neq 0$, 而各力学量(径向应力 σ_r 和应变 ϵ_r , 环向应力 σ_θ 、 σ_φ 与应变 ϵ_θ 、 ϵ_φ , 径向质点速度 v)都只是球径 r 和时间 t 的函数, 均与 θ 、 φ 无关, 于是有:

* 收稿日期: 2011-09-23; 修回日期: 2012-02-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(11032001, 11172244); 浙江省教育厅科研项目(Y201224472);

宁波大学王宽诚幸福基金项目

作者简介: 赖华伟(1978—), 男, 硕士, 讲师。

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}, \quad v(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \varepsilon_\varphi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r} \quad (1b)$$

$$\sigma_r = \sigma_r(r, t), \quad \sigma_\theta(r, t) = \sigma_\varphi(r, t) \quad (1c)$$

球面波的控制方程由连续方程(质量守恒)、运动方程(动量守恒)和材料本构方程组成。首先,为保证位移 u 是 r 和 t 的单值连续函数, ε_r 、 ε_θ 和 v 之间应满足以下位移连续性相容条件,即连续方程:

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} = \frac{v}{r} \quad (2b)$$

其次,考察径向的动量守恒条件,如图 1 所示,可得如下运动方程

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3)$$

以上的球面波连续方程和运动方程是对所有介质普遍适用的。在不同介质中之所以传播不同特性的球面波,主要取决于不同的材料本构关系。下面来具体讨论黏弹性本构关系。

从理论的普遍性来说,可以从包含 n 个松弛时间 $\theta_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的广义 Maxwell 方程^[1] 出发来建立线性黏弹性球面波的控制方程组。但从实际出发,正如朱兆祥等所指出的^[5], 任一个松弛时间 θ_i 都有一个有效影响域(effective influence domain, EID)。以时间或应变率来表示时, EID 约跨 4.3 个量级。因此实际上只要采用如下的包含 2 个松弛时间的黏弹性方程(简称 ZWT 方程), 就足以描述大量黏弹性材料从准静态到冲击动态范围(即应变率为 $10^{-5} \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$) 的黏弹性本构特性

$$\sigma = f_e(\varepsilon) + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_1}\right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau$$

式中: $f_e(\varepsilon)$ 描述非线性弹性平衡响应, 且 $f_e(\varepsilon) = E_0 \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3$, E_0 、 α 和 β 为对应的弹性常数; 第一个积分项描述低应变率下的黏弹性响应, E_1 和 θ_1 分别为所对应的低频 Maxwell 单元的弹性常数和松弛时间; 而后一个积分项描述高应变率下的黏弹性响应, E_2 和 θ_2 则分别为所对应的高频 Maxwell 单元的弹性常数和松弛时间, 见图 2。

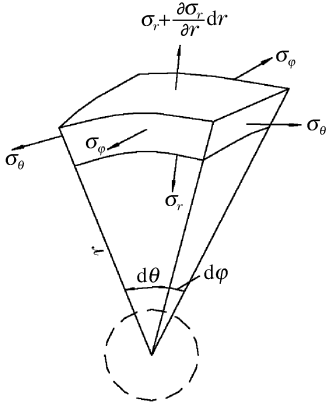


图 1 球坐标系中的微元体

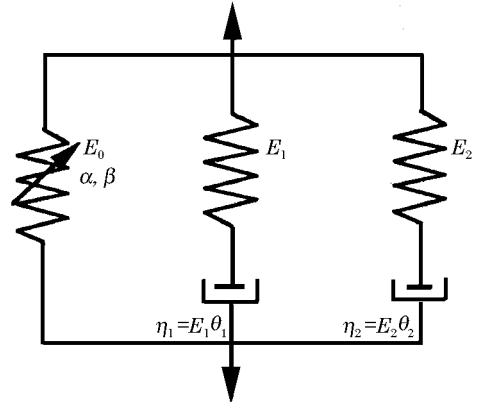


图 2 ZWT 黏弹性本构模型

Fig. 1 An infinitesimal element in spherical coordinates Fig. 2 Constitutive model of ZWT viscoelastic equation

大量实验^[6]表明, θ_1 为 $10 \sim 10^2 \text{ s}$ 量级, θ_2 为 $10^{-4} \sim 10^{-6} \text{ s}$ 量级。因此, 在时间尺度以 $1 \sim 10^2 \mu\text{s}$ 计的冲击加载条件下, 具有 θ_1 为 $10 \sim 10^2 \text{ s}$ 的低频 Maxwell 单元, 直到冲击加载结束将无足够时间来松弛, 于是 ZWT 方程转化为:

$$\sigma = f_e(\varepsilon) + E_1 \varepsilon + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau = \sigma_e(\varepsilon) + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau$$

$$\sigma_e(\epsilon) = f_e(\epsilon) + E_1 \epsilon$$

类似于弹性力学中由一维应力应变关系推导三维胡克定理那样, 不难由上式推得球对称三维应力状态下的 ZWT 方程, 通常由球量部分(容变律)和偏量部分(畸变律)2 部分组成。当非线性弹性项可暂时不计时($\alpha = \beta = 0$), 分别表示为(为今后的方便, 上式中的 E_2, θ_2 已分别改写为 E_M, θ_M):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} - 3K \left(\frac{\partial \epsilon_r}{\partial t} + 2 \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} \right) = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{1}{2G} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \epsilon_r}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} \right) + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta) - 2G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)}{2G\theta_M} = 0 \quad (4b)$$

式中: σ 和 ϵ 均以拉为正, v 以 r 轴向为正, 弹性体积模量 $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, $E = E_a + E_M$, $E_a = E_0 + E_1$ (此处已设体积无黏性), 剪切模量 $G = G_a + G_M$, $G_a = \frac{E_a}{2(1+\nu)}$, $G_M = \frac{E_M}{2(1+\nu)}$, ν 为泊松比。

式(2a)、(2b)、(3)、(4a)和(4b)等 5 个方程共同组成线性黏弹性球面波问题的控制方程组(双曲型一阶偏微分方程组), 包含 5 个未知量 $v, \sigma_r, \sigma_\theta, \epsilon_r$ 和 ϵ_θ 。

2 线性黏弹性球面波的特征线分析

特征线解法把解上述双曲型一阶偏微分方程组的问题转化为解常微分方程组, 即解特征线方程和沿特征线的相容关系, 而它们都是常微分方程组。

当采用特征线法求解上述双曲型一阶偏微分方程组时, 对以上 5 式分别乘以待定系数 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 , 然后相加, 有如下结果

$$\begin{aligned} & (A_1 - 3KA_4 - A_5) \frac{\partial \epsilon_r}{\partial t} + (A_2 - 6KA_4 + A_5) \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} + \left(A_3 \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} - A_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) v + \\ & \left[\left(A_4 + \frac{A_5}{2G} \right) \frac{\partial}{\partial t} - A_3 \frac{\partial}{\partial r} \right] \sigma_r + \left(2A_4 - \frac{A_5}{2G} \right) \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + A_5 \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta) - 2G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)}{2G\theta_M} - \\ & A_3 \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} - A_2 \frac{v}{r} = 0 \end{aligned} \quad (5a)$$

为使上式只包含沿特征线 $C(r, t)$ 的方向导数, 待定系数 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 必须满足下式

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_C = \frac{0}{A_1 - 3KA_4 - A_5} = \frac{0}{A_2 - 6KA_4 + A_5} = -\frac{A_1}{A_3 \rho_0} = -\frac{A_3}{A_4 + \frac{A_5}{2G}} = \frac{0}{2A_4 - \frac{A_5}{2G}} \quad (5b)$$

显然, A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 有 2 族解, 第 1 族解由下列方程确定:

$$A_1 - 3KA_4 - A_5 = 0 \quad (6a)$$

$$A_2 - 6KA_4 + A_5 = 0 \quad (6b)$$

$$4GA_4 - A_5 = 0 \quad (6c)$$

$$\rho_0 A_3^2 = A_1 \left(A_4 + \frac{A_5}{2G} \right) \quad (6d)$$

另一族解由下列方程确定:

$$A_1 = A_3 = A_2 = A_5 = 0 \quad A_4 \neq 0$$

$$A_1 = A_3 = A_2 = A_4 = 0 \quad A_5 \neq 0 \quad (7)$$

$$A_1 = A_3 = A_4 = A_5 = 0 \quad A_2 \neq 0$$

先讨论第 1 族解, 由式(6)诸式可解出:

$$A_4 = \frac{1}{4G} A_5$$

$$A_1 = \frac{3K + 4G}{4G} A_5 = (3K + 4G) A_4$$

$$A_2 = \frac{3K - 2G}{2G} A_5 = (6K - 4G) A_4$$

$$A_3^2 = \frac{3(3K + 4G)}{\rho_0 (4G)^2} A_5^2, \quad \text{或 } A_3 = -\frac{A_1}{\rho_0} \frac{dr}{dt} = -\frac{3K + 4G}{\rho_0} \frac{dr}{dt} A_5$$

代入式(5b),得到如下 2 族特征线

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{A_1}{\rho_0 A_3} = \pm \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho_0}} = \pm C_K \quad (8a)$$

再一起代回式(5a),经整理,最后得到如下相应的 2 族沿特征线的相容条件

$$d\sigma_r = \pm \rho_0 C_K dv \mp \frac{2}{3} \frac{[(\sigma_r - \sigma_\theta) - 2G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)]}{C_K \theta_M} dr - 2 \left[(\sigma_r - \sigma_\theta) \mp \left(K - \frac{2}{3}G \right) \frac{v}{C_K} \right] \frac{dr}{r} \quad (8b)$$

此处正号和负号分别对应于右行波和左行波。注意,沿特征线的传播速度正好就是弹性波的膨胀波(或一维应变纵波)波速 C_L 。

另一族解由方程(7)确定,给出沿同一特征线的 3 个特征相容条件。首先,当 $A_1 = A_3 = A_2 = A_5 = 0, A_4 \neq 0$ 时,第 3 族特征线和沿特征线的相容条件分别为:

$$dr = 0 \quad (9a)$$

$$d\sigma_r + 2d\sigma_\theta - 3K(d\epsilon_r + 2d\epsilon_\theta) = 0 \quad (9b)$$

其次,当 $A_1 = A_3 = A_2 = A_4 = 0, A_5 \neq 0$ 时,第 3 族特征线仍为式(9a),但沿特征线的相容条件为

$$\frac{1}{2G} (d\sigma_r - d\sigma_\theta) - (d\epsilon_r - d\epsilon_\theta) + \frac{[(\sigma_r - \sigma_\theta) - 2G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)]}{2G\theta_M} dt = 0 \quad (9c)$$

最后,当 $A_1 = A_3 = A_5 = A_4 = 0, A_2 \neq 0$ 时,第 3 族特征线仍为式(9a),但沿特征线的相容条件为

$$d\epsilon_\theta = \frac{v}{r} dt \quad (9d)$$

显然,第 3 族特征线(式(9a))与质点运动轨迹相一致,式(9b)和式(9c)分别是黏弹性本构方程中的体变律(4a)和畸变律(4b)沿质点运动轨迹的特殊形式,而式(9d)是 θ 方向连续性条件(1b)沿质点运动轨迹的特殊形式。

当松弛时间 θ_M 趋于无穷大时,黏弹性本构方程转化为弹性本构方程,式(8)和(9)就转化为弹性球面波的特征线方程及其相应的特征线上的相容方程^[1]。如再令 r 趋于无穷大,就简化为一维应变平面波问题。

这样,当用特征线法来解线性黏弹性球面波问题时,归结为沿 3 条特征线(式(8a)和式(9a)联立解 5 个特征相容方程(式(8b)和式(9b)~(9d)),共包括 5 个未知函数 $\sigma_r, \sigma_\theta, \epsilon_r, \epsilon_\theta$ 和 v 。通常采用差分数值解法,把特征线和沿特征线相容关系的常微分方程组代之以相应的差分方程,一旦给定初始-边界条件,就足以解出全部 5 个变量。

3 线性黏弹性球面波的计算实例

有机玻璃 PMMA 是典型的黏弹性材料,其一维黏弹性本构参数已由 SHPB 实验确定为^[1,6]: $E_0 = 2.04 \text{ GPa}, E_1 = 0.897 \text{ GPa}, E_M = 3.07 \text{ GPa}, \theta_M = 95.4 \mu\text{s}$ 和 $\rho_0 = 1.19 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。设泊松比 $\nu = 0.35$,与应变率无关。按这些本构参数,已研究过一维杆中黏弹性波的传播特性^[1,7]。下面,按这些相同的本构参数,采用特征线数值计算来分析黏弹性球面波的传播特性。

初始条件: $t = 0$ 时各力学量均为零(静止的无扰动状态)。边界载荷条件:在内壁球径 $r_0 = 50 \text{ mm}$ 处受到升时为 $10 \mu\text{s}$ 的恒速冲击($v = 80 \text{ m/s}$),如图 3 所示,这是为了便于与一维杆中黏弹性波的计算结果作对比^[1,7]。

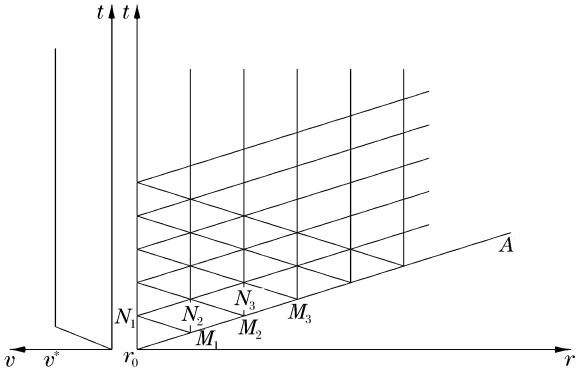


图 3 黏弹性球面波波传播的 3 族特征线
Fig. 3 Three sets of characteristics for viscoelastic spherical waves

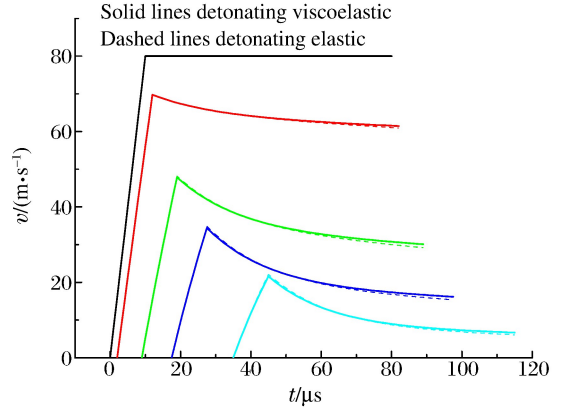


图 4 PMMA 中黏弹性球面质点速度波
Fig. 4 Particle velocity profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

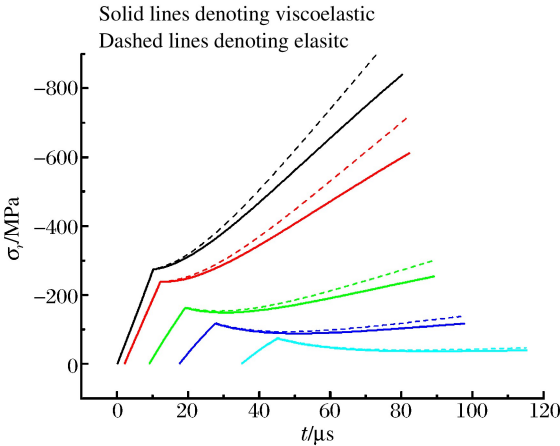


图 5 PMMA 中黏弹性球面径向应力波
Fig. 5 Radial stress profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

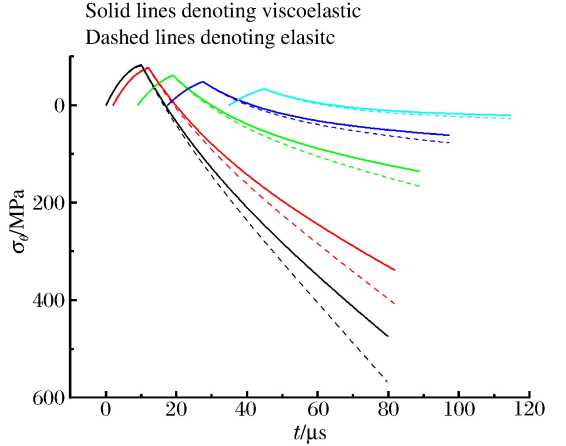


图 6 PMMA 中黏弹性球面周向应力波
Fig. 6 Circumferential stress profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

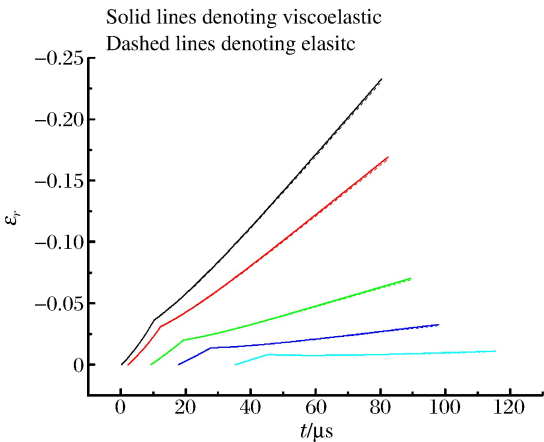


图 7 PMMA 中黏弹性球面径向应变波
Fig. 7 Radial strain profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

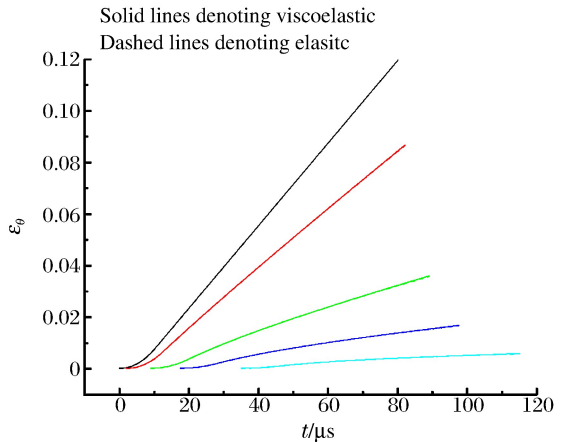


图 8 PMMA 中黏弹性球面周向应变波
Fig. 8 Circumferential strain profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

特征线数值计算得到的不同球径 r_i 处的质点速度波剖面 $v(r_i, t)$ 、径向应力波剖面 $\sigma_r(r_i, t)$ 、环向应力波剖面 $\sigma_\theta(r_i, t)$ 、径向应变波剖面 $\epsilon_r(r_i, t)$ 和环向应变波剖面 $\epsilon_\theta(r_i, t)$ 分别如图 4~8 所示, 图中各曲线从左到右依次对应于 $r_i = 50, 56, 75, 100, 150$ mm 处的波剖面。图中还用虚线给出了相应的线弹性球面波的计算结果(相当于 θ_M 趋于无穷大), 以供比较。

由图 4 可见, 随着黏弹性球面波的发散传播, 质点速度波剖面 $v(r_i, t)$ 的峰值显著地衰减; 而且即使在恒速边界条件下, 各个位置 r_i 处的 $v(r_i, t)$ 波剖面在到达峰值后, 都呈现类似于应力松弛的随时间逐渐降低的现象。由图 5 中黏弹性球面波与线弹性球面波的对比可见, 如所预期, 径向应力波剖面 $\sigma_r(r_i, t)$ 呈现与图 4 对应的应力松弛现象。径向应变 $\epsilon_r(r_i, t)$ 波剖面则显示相反的类蠕变特性, 即: 即使在恒速边界条件下各个位置 r_i 处的径向应变 $\epsilon_r(r_i, t)$ 仍然随时间不断地增加, 如图 7 所示。这些现象都与式(8b)中包含的 $dr/(C_L \theta_M)$ 项有关。另一个值得关注的则是: 周向应力 $\sigma_\theta(r_i, t)$ 波剖面在经历短暂的压缩状态后, 转变为愈来愈大的拉伸应力, 如图 6 所示; 而周向应变 $\epsilon_\theta(r_i, t)$ 波剖面从一开始就进入拉伸状态, 并且随时间直线般增大, 如图 8 所示, 成为导致介质拉伸失效的主要原因。这些现象都与式(8b)中包含的 dr/r 项有关。

4 强间断黏弹性球面波的传播特性

爆炸冲击波一般具有一个陡峭的波阵面, 通常按强间断波阵面来看待, 需要专门处理。

对于以波速 D 传播的强间断球面波, 根据波阵面上位移连续条件和动量守恒条件, 注意到 u 连续时 ϵ_θ 也必连续(式(1b)), 则由强间断平面波导出的强间断面上运动学相容条件和动力学相容条件对于球面波仍然成立, 即对于垂直于球面波波阵面方向的质点速度 v 、径向应力分量 σ_r 和径向应变分量 ϵ_r , 其间断突跃值(以 $[\]$ 表示)之间有如下的相容性关系:

$$[v] = \mp D [\epsilon_r] \quad (10a)$$

$$[\sigma_r] = \mp \rho_0 D [v] \quad (10b)$$

在本文中所讨论的线性黏弹性球面波情况下, $D = C_L$ (式(8a))。可见在数学表达形式上和一维应变平面波中的完全一样^[1]。球面扩散的影响主要表现在间断值 $[\sigma_r]$ 、 $[v]$ 和 $[\epsilon_r]$ 在球面强间断波的传播过程中是变化的, 即使波阵面的前方是未扰动状态。

对于原先处于静止、未扰动状态的介质, 设在其球形内腔壁 $r = r_0$ 上突加一恒值载荷 σ_{r_0} , 相应的初始条件和边界条件为:

$$\begin{cases} u(r, 0) = v(r, 0) = \sigma_r(r, 0) = \sigma_\theta(r, 0) = 0 & r_0 < r < \infty \\ \sigma_r(r_0, t) = \sigma_{r_0} & t \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

这时, 沿图 3 中 r_0A 线右行传播的是黏弹性强间断球面波, 应满足式(10), 即有:

$$v = -\frac{\sigma_r}{\rho_0 C_L} \quad (12a)$$

$$\epsilon_r = -\frac{v}{C_L} = \frac{\sigma_r}{\rho_0 C_L^2} = \frac{\sigma_r}{K + \frac{4}{3}G} = \frac{3\sigma_r}{3K + 4G} \quad (12b)$$

再考虑到沿 r_0A 线为了满足位移连续条件 $u = 0$, 有

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} = 0 \quad (12c)$$

注意到跨过强间断黏弹性波阵面的力学响应(应变率趋于无穷大)只能是瞬态弹性响应, 式(4a)和(4b)分别简化为弹性球面波的弹性体变率和弹性畸变率(相当于 θ_M 趋于无穷大), 由此知沿 r_0A 线有:

$$\sigma_\theta = \frac{K - \frac{2}{3}G}{K + \frac{4}{3}G} \sigma_r = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_r, \quad \sigma_r - \sigma_\theta = \frac{6G}{3K + 4G} \sigma_r = \frac{2G}{K + \frac{4}{3}G} \sigma_r \quad (12d)$$

另一方面跨过强间断黏弹性波阵面 r_0A , 其右侧本身又是特征线, 因而沿右行波特征线 r_0A 还应满

足特征线上微分形式的相容关系(式(8b))

$$d\sigma_r = \rho_0 C_K dv - \frac{2}{3} \left[\frac{(\sigma_r - \sigma_\theta) - 2G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)}{C_K \theta_M} \right] dr - 2 \left[(\sigma_r - \sigma_\theta) - \left(K - \frac{2}{3}G \right) \frac{v}{C_K} \right] \frac{dr}{r}$$

这时,注意到按式(12a)~(12d)有:

$$[(\sigma_r - \sigma_\theta) - 2G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)] = \frac{2G\sigma_r}{\rho_0 C_K^2} - \frac{2G_a\sigma_r}{\rho_0 C_K^2} = \frac{2G_M\sigma_r}{\rho_0 C_K^2} \quad (12e)$$

$$\left[(\sigma_r - \sigma_\theta) - \left(K - \frac{2}{3}G \right) \frac{v}{C_K} \right] = \frac{2G\sigma_r}{\rho_0 C_K^2} + \frac{(3K - 2G)\sigma_r}{3\rho_0 C_K^2} = \frac{\left(K + \frac{4}{3}G \right) \sigma_r}{\rho_0 C_K^2} = \sigma_r \quad (12f)$$

把上述各式代入式(8b),消去 $v, \epsilon_r, \epsilon_\theta$ 和 σ_θ 后,有

$$d\sigma_r = -d\sigma_r - \frac{2}{3} \frac{2G_M\sigma_r}{\rho_0 C_K^2 \theta_M} dr - 2\sigma_r \frac{dr}{r}$$

经过整理后,有

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r} = -\frac{2G_M}{(3K + 4G)C_K\theta_M} dr - \frac{dr}{r} \quad (13)$$

上式右端第 1 项反映本构黏性效应(与 θ_M 相关),而第 2 项反映球面扩展效应(与 r 相关)。

对上式积分,利用 $r=r_0$ 处 $\sigma_r=\sigma_{r_0}$ 的边界条件,可得 σ_r 沿 r_0A 的衰减规律为

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{r_0} r_0 \exp \left[-\frac{2G_M}{(3K + 4G)C_L\theta_M} (r - r_0) \right]}{r} = \frac{\sigma_{r_0} r_0 \exp [-\alpha(r - r_0)]}{r}, \alpha = \frac{2G_M}{(3K + 4G)C_L\theta_M} \quad (14)$$

上式表明 σ_r 既随 r 的增大成反比地衰减,又按衰减因子 α 呈指数型衰减。由式(12)知,强间断线性黏弹性球面波波阵面上的 $\sigma_\theta, \epsilon_r$ 和 v 均与 σ_r 成正比($\epsilon_\theta=0$),所以它们也以同样的规律衰减。

当 θ_M 趋于无穷大时,黏弹性材料转化为弹性材料,上式转化为

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r} = -\frac{dr}{r} \quad (15a)$$

这正好是描述强间断弹性球面波衰减的已知公式^[1]。利用 $r=r_0$ 处 $\sigma_r=\sigma_{r_0}$ 的边界条件,可得 σ_r 沿 r_0A 的衰减规律为:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{r_0} r_0}{r}, \quad \text{或 } \lg \sigma_r = A_0 - \lg r \quad (15b)$$

上式表明在对数坐标中 $\lg \sigma_r$ 与 $\lg r$ 有斜率为 -1 的直线关系,其截距 $A_0 = \lg(\sigma_{r_0} r_0)$ 。

当 r 趋于无穷大时,球面波解转化为平面波解,式(13)转化为描述强间断黏弹性平面波衰减的公式

$$d\sigma_r = -\frac{2G_M}{(3K + 4G)C_K\theta_M} \sigma_r dr \quad (16a)$$

利用 $r=r_0$ 处 $\sigma_r=\sigma_{r_0}$ 的边界条件,可得这时 σ_r 沿 r_0A 的衰减规律为:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{\sigma_r} &= d \lg \sigma_r = -\frac{2G_M}{(3K + 4G)C_K\theta_M} dr = -\alpha dr \\ \sigma_r &= \sigma_{r_0} \exp \left[-\frac{2G_M}{(3K + 4G)C_K\theta_M} (r - r_0) \right] = \sigma_{r_0} \exp [-\alpha(r - r_0)] \\ \alpha &= \frac{2G_M}{(3K + 4G)C_K\theta_M} \end{aligned} \quad (16b)$$

或者注意到 $r=C_K t, r_0=C_K t_0$,也可改写为

$$\sigma_r = \sigma_{r_0} \exp [-\alpha C_K (t - t_0)] \quad (16c)$$

上式表明这时 σ_r 呈指数式衰减,以 α 为衰减因子。由式(12)知,强间断黏弹性球面波波阵面上的 $\sigma_\theta, \epsilon_r$ 和 v 与 σ_r 成正比,所以它们也都有同样的衰减规律。

对比式(14)、(15b)和(16b)可知,强间断黏弹性球面波的衰减既不同于强间断弹性球面波的衰减只归因于几何扩散效应,也不同于强间断黏弹性平面波的衰减只归因于本构黏性效应,而是 2 种效应的

共同作用。这种差别在衰减的早期尤为明显。有学者观察到黏弹性球面波的衰减早期与 $1/r^2$ 成正比, 而后期与 $1/r$ 成正比^[3], 其实, 更确切的衰减特性可以用式(14)来解析地表述。

5 强间断线性黏弹性球面波的计算实例

仍以有机玻璃 PMMA 为例, 用特征线法对强间断黏弹性球面波的传播特性进行研究。初始条件为: $t=0$ 时各力学量均为零(静止的无扰动状态)。参照王占江等^[8]对 PMMA 中一系列球面波质点速度波形的实验测试结果, 边界载荷条件取为: 在内壁球径 $r_0=5\text{ mm}$ 处受到突加载荷(强间断), 随后呈指数衰减, 即

$$v_i = v_{i0} \exp\left(-\frac{t+0.4}{2.2}\right) - 100 \quad v_{i0} = 675\text{ m/s}, t \geq 0\ \mu\text{s}$$

计算中采用的 PMMA 一维黏弹性本构参数, 除了 E_M 、 θ_M 外均与前一算例相同, 即: $E_0=2.04\text{ GPa}$, $E_1=0.897\text{ GPa}$, $E_M=3.87\text{ GPa}$, $\theta_M=2.05\ \mu\text{s}$ 和 $\rho_0=1.19 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ 。设泊松比 $\nu=0.35$, 与应变率无关。选用不同的 θ_M , 是考虑到图 9 所示实测衰减特性而予以调整的。特征线数值计算得到的不同球径 r_i 处的质点速度波剖面 $v(r_i, t)$ 、径向应力波剖面 $\sigma_r(r_i, t)$ 、环向应力波剖面 $\sigma_\theta(r_i, t)$ 、径向应变波剖面 $\varepsilon_r(r_i, t)$ 和环向应变波剖面 $\varepsilon_\theta(r_i, t)$ 分别如图 10~14 所示。图中各曲线从左到右依次对应于 $r_i=5.0, 5.6, 7.5, 10.0, 15.0\text{ mm}$ 处的波剖面。图中还用虚线给出了相应的线弹性球面波的结果(相当于 θ_M 趋于无穷大), 以供比较。

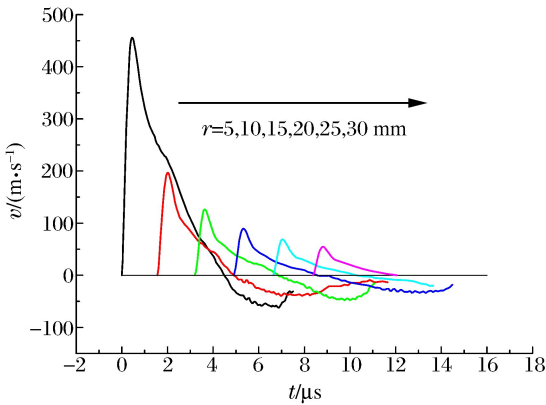


图 9 PMMA 中实测球面质点速度波

Fig. 9 Particle velocities profiles of experimental spherical waves in PMMA

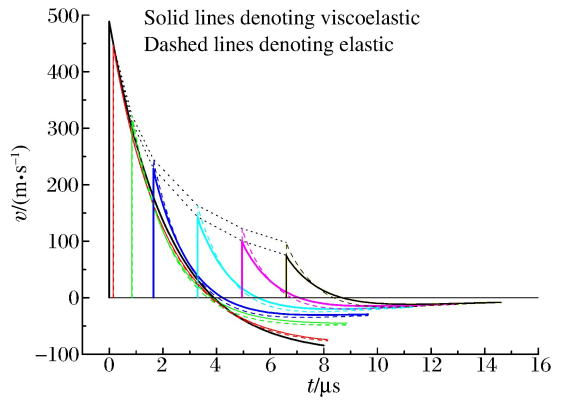


图 10 PMMA 中黏弹性球面质点速度波

Fig. 10 Particle velocities profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

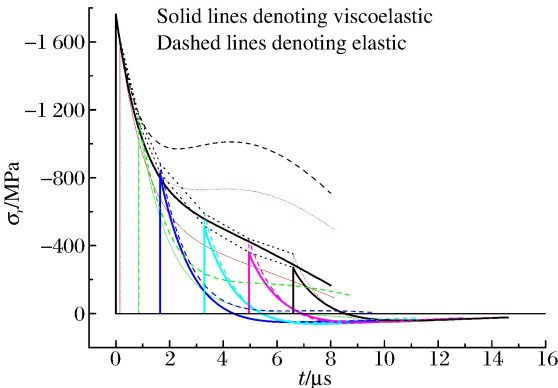


图 11 PMMA 中黏弹性球面径向应力波

Fig. 11 Radial stress profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

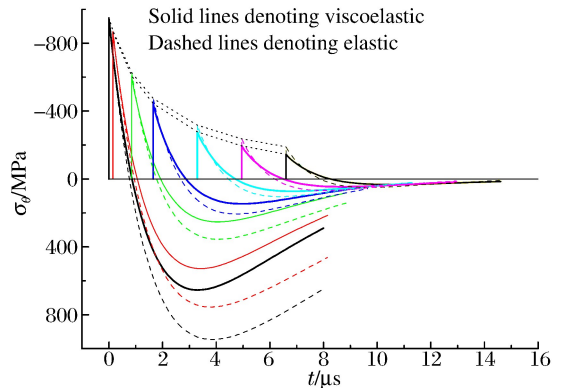


图 12 PMMA 中黏弹性球面周向应力波

Fig. 12 Circumferential stress profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

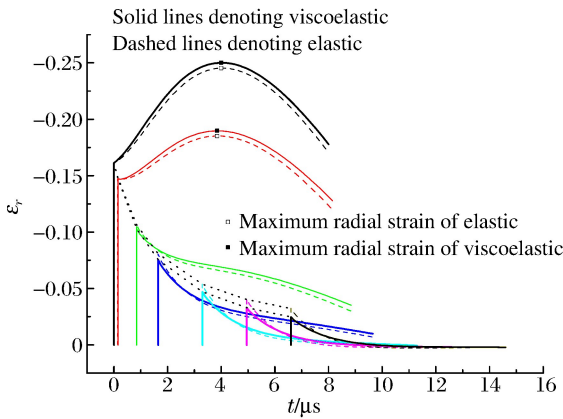


图 13 PMMA 中黏弹性球面径向应变波

Fig. 13 Radial strain profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

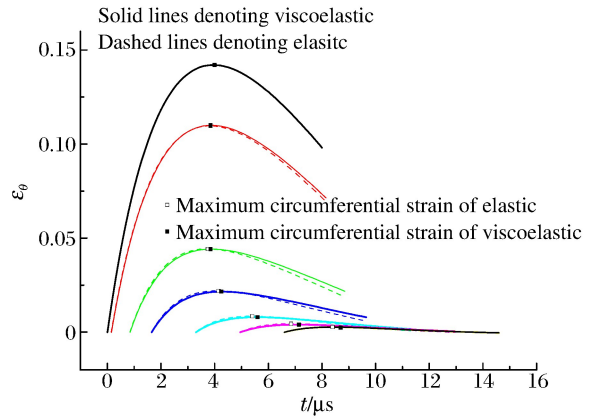


图 14 PMMA 中黏弹性球面周向应变波

Fig. 14 Circumferential strain profiles of viscoelastic spherical waves in PMMA

把这一组图与图 4~8 那组图相比,“突加载荷+指数衰减”形式的边界条件明显影响黏弹性球面波的传播图像,表现在:黏弹性球面波应力和质点速度峰值明显低于线弹性球面波的,并衰减得更快;质点速度出现了由正转负、径向应力也出现由压转拉的现象;环向应力由压转拉后不再是单调增大,而是达到一定最大值后转向减小;同样,径向应变和环向应变也不再是单调增大,而是达到一定最大值后转向减小。尤其值得关注的是,特征线数值模拟得到的质点速度波剖面 $v(r_i, t)$ (图 10)与实测曲线(图 9)在外观上十分接近。这为如何从实测波剖面系列曲线来反推黏弹性本构参数提供了启示。

6 结 论

(1) 黏弹性球面波控制方程中,质量守恒方程和动量守恒方程是普遍适用的,关键是建立适当的本构关系。本文中基于 ZWT 黏弹性本构方程,建立了体现高应变率效应的黏弹性球面波的控制方程组,包含 5 个偏微分方程,解 5 个未知量 v 、 σ_r 、 σ_θ 、 ϵ_r 和 ϵ_θ 。

(2) 采用特征线法,把黏弹性球面波控制方程组的 5 个偏微分方程转化为沿 3 族特征线的 5 个常微分方程,数学上更易于求解,物理上图像更清晰。

(3) 特征线数值分析显示,黏弹性球面波的衰减和弥散程度强于线弹性球面波。球面扩散引起的环向拉应力和环向拉应变是导致介质拉伸破坏的主因,而本构黏性特性能够缓和这一效应。

(4) 导出了强间断黏弹性球面波衰减特性的解析表达式,它是几何扩散效应和本构黏性效应两者共同作用的后果。沿强间断波阵面, σ_r 、 σ_θ 、 ϵ_r 和 v 均遵守此相同的衰减规律($\epsilon_\theta = 0$)。

(5) 本构黏性特性和边界条件中卸载特性明显影响黏弹性球面波的传播图像,工程应用中应重视。

本研究尚限于线性黏弹性适用的情况,文中给出的数值计算示例更主要是起到以数例来阐明本理论和分析方法的作用,或者可看作非线性问题的一个线性化的工程近似处理。实际上,在更高载荷、更大应变下应计及本构非线性的影响。

参考文献:

- [1] 王礼立. 应力波基础[M]. 2 版. 北京:国防工业出版社,2005.
Wang Li-li. Foundations of stress waves[M]. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- [2] Koshelev E A. Spherical stress wave propagation during an explosion in a viscoelastic medium[J]. Journal of Mining Science, 1988,24(6):541-546.
- [3] 邓德全,李兆权. 球面波在线粘弹性介质中的传播[C]//第三届全国岩石动力学学术会议论文选集. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1992:152-161.
- [4] Wegner J L. Propagation of waves from a spherical cavity in an unbounded linear viscoelastic solid[J]. International

Journal of Engineering Science, 1993,31(3):493-508.

- [5] Chu Chao-hsiang, Wang Li-li, Xu Da-ben. A non-linear thermo-viscoelastic constitutive equation for thermoset plastics at high strain rates[C]//Chien Wei-zang. Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics. Beijing: Science Press, 1985:92-97.
- [6] 王礼立,杨黎明. 固体高分子材料非线性粘弹性本构关系[C]//王礼立,余同希,李永池. 冲击动力学进展. 合肥:中国科技大学出版社,1992:88-116.
- [7] Wang L L, Huang D J, Gan S. Nonlinear viscoelastic constitutive relations and nonlinear viscoelastic wave propagation for polymers at high strain rates[C]//Kawata K, Shioiri J. Constitutive Relation in High/Very High Strain Rates. Tokyo, Japan: Springer-Verlag, 1996:137-146.
- [8] 王占江,李孝兰,张若棋,等. 固体介质中球形发散波的实验装置[J]. 爆炸与冲击,2000,20(2):103-109.
Wang Zhan-jiang, Li Xiao-lan, Zhang Ruo-qi, et al. An experimental apparatus for spherical wave propagation in solid[J]. Explosion and Shock Waves, 2000,20(2):103-109.

Characteristics analyses of linear viscoelastic spherical waves^{*}

Lai Hua-wei¹, Wang Zhan-jiang², Yang Li-ming³, Wang Li-li³

(1. Department of Municipal Engineering, Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College, Hangzhou 310018, Zhejiang, China;

2. Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, Shaanxi, China;

3. Mechanics and Materials Science Research Center, Ningbo University, Ningbo 31521, Zhejiang, China)

Abstract: Based on the ZWT viscoelastic constitutive relation, the governing equations which reflect high-strain-rate effects, for viscoelastic spherical waves are established, including five partial differential equations to solve five unknown variables such as v , σ_r , σ_θ , ϵ_r and ϵ_θ . By using the characteristics method, the problem is reduced to solve five ordinary differential equations along three sets of characteristics. The numerical results by the characteristics method show that the degree of attenuation and dispersion for viscoelastic spherical waves are more remarkable than those of linear elastic spherical waves. The tangential tensile stress/strain induced by the surface extension of spherical wave front plays a significant role in tensile failure of medium, while the constitutive viscosity can relieve the tensile stress/strain. An analytic expression for the attenuation of strong-discontinuous viscoelastic spherical wave front is further derived, which analytically illustrates that the more remarkable attenuation of strong-discontinuous viscoelastic spherical wave front is resulted from the combined effects of both the geometrical extension effect and the constitutive viscosity effect.

Key words: mechanics of explosion; viscoelasticity; characteristics method; spherical waves; shock waves; attenuation

* Received 23 September 2011; Revised 7 February 2012

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11032001,11172244)

Corresponding author: Wang Li-li, wanglili@nbu.edu.cn