

文章编号: 1001-1455(2013)05-0463-08

基于 ZWT 方程的线黏弹性球面波分析*

卢强¹, 王占江¹, 王礼立², 赖华伟³, 杨黎明²

(1. 西北核技术研究所, 陕西 西安 710024;

2. 宁波大学力学和材料科学研究中心, 浙江 宁波 315211;

3. 浙江水利水电高等专科学校市政工程系, 浙江 杭州 310018)

摘要: 针对时间尺度为 1~100 μs 的爆炸冲击加载, 忽略低频 Maxwell 体的松弛效应, 同时为简化分析, 忽略非线性弹簧效应项, 推导了三维应力状态下的线黏弹性 ZWT 本构关系。基于球面波的基本动力学方程, 结合 ZWT 线黏弹性本构关系, 得到了以位移 u 表征的三阶波动方程。利用该方程分析固体介质中线黏弹性球面波传播过程中的吸收和弥散现象, 得知: 高频球面波的衰减因子趋于常数, 相速趋于高频下的纵波速度; 低频球面波的衰减因子和圆频率 ω 的平方成正比, 其相速趋于低频下的纵波速度; 低频球面波的纵波波速低于高频球面波的纵波波速, 两者的比值和介质的泊松比、弹性模量及 Maxwell 体弹性模量相关。

关键词: 爆炸力学; 三阶波动方程; 线黏弹性 ZWT(朱-王-唐)本构关系; 球面波; 冲击波; 衰减

中图分类号: O382; O347.1

国标学科代码: 1303530

文献标志码: A

球面波在固体介质中的传播理论以及球面发散波实验技术对于地下爆炸研究至关重要, 众多学者在球面波理论及实验技术方面开展了大量研究工作。

在理论方面, F. G. Blake^[1] 和 Y. L. Lunts^[2] 对球形弹性波和弹塑性波在固体介质中的传播理论进行了研究。A. Philips 等^[3] 和 M. P. Zabinski 等^[4] 基于黏弹塑性本构方程对加、卸载条件下球面波在黏弹塑性介质中的传播进行了讨论。E. A. Koshelev^[5] 采用了 Maxwell 体作为黏弹性介质的本构描述对球形应力波的传播进行了理论推导, 讨论了在球形空腔边界上施加形式 $p(t) = Bte^{-\beta t}$ (B, β 为常数) 的压力边界时的解析解, 而 S. Banerjee 等^[6] 采用 Kelvin-Voigt 体描述黏弹性介质, 分析了球对称的热黏弹性波的传播特性。李孝兰^[7-8] 对弹性固体介质中的球形空腔爆炸理论进行了较详尽的分析, 所得结果对于实验研究具有重要指导作用。林英睿等^[9-10] 则以花岗岩中实测球面波粒子速度波形为基础, 采用拉格朗日分析方法对花岗岩的本构进行了研究, 得到了一些初步结论。刘文韬等^[11] 采用含损伤的弹塑性本构模型, 对封闭式地下核爆炸波的传播规律也展开了研究, 针对 Piledriver 地下核实验^[12] 进行了数值模拟, 得到的压力和速度峰值衰减、质点位移和速度波形以及爆炸空腔都与文献^[13] 中的模拟结果较接近。周钟^[14] 基于混合物理论建立了水饱和岩石的本构模型, 对 Piledriver 地下核爆^[12] 的自由场运动进行了数值模拟, 系统研究了含水花岗岩中地下爆炸波的传播规律及地下爆炸震源函数的特征。

在球面发散波实验技术方面, 利用微型炸药球实现球面发散波加载, 已成为模拟地下爆炸中介质的应力应变状态最有效的实验技术^[15]。R. P. Swift^[16]、H. C. Rodean 等^[17] 研制了用于模拟地下爆炸加载的微型炸药球并发展了粒子速度、应力测试技术, 一直在持续地开展空腔解耦爆炸动力学现象及解耦系数的理论及数值模拟研究工作, 结合实验数据(粒子速度和应力测量波形)^[15] 和拉格朗日分析方法^[18] 或其他研究方法深入研究了核爆炸现场岩体和土体中应力波的演化规律和介质的动态本构关系。王武林等^[19] 开展了球面波化爆实验, 建立了以“II”形电磁粒子速度计和压电晶体应力计为测量手段、以微秒电雷管起爆的直径为 30 mm 的铸装炸药球作为波源的室内岩石球面波化爆实验装置。王占江等^[20-21] 利用 0.125 g TNT 当量的微型炸药球技术及圆环型粒子速度测试技术得到了部分典型地质介

* 收稿日期: 2012-04-13; 修回日期: 2012-08-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172244)

作者简介: 卢强(1984—), 男, 硕士, 助理研究员。

质中关于球形填实或空腔爆炸的重要实验结果。自 20 世纪 90 年代以来,确定能提供球面发散波路径效应的实验技术和理论研究方法已成为地震核査等研究领域的基础性课题。在地下爆炸研究中,承载波传播的介质往往是地质介质,而大部分地质材料在低应力区具有一定的黏弹性力学行为。为了认识介质本身的黏弹性行为对球面波传播的影响,本文中基于线黏弹性 ZWT 本构方程^[22]分析球面波动力学方程,讨论黏弹性固体介质中球形发散波的传播行为及演化规律。

1 线黏弹性 ZWT 本构方程

ZWT 本构模型^[22]由一个非线性弹簧、一个低频 Maxwell 体和一个高频 Maxwell 体并联组成,如图 1 所示。众多研究表明,ZWT 本构方程能够描述高聚物类介质等从准静态到爆炸冲击载荷下(应变率 $10^{-4} \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$)的力学响应^[23]。朱珏等^[24]、陈江瑛等^[25-26]、陶俊林等^[27]的研究表明,ZWT 本构方程能够在一定程度上描述水泥砂浆、混凝土、岩石等介质的黏弹塑性力学行为。在图 1 中,假定 $f(\epsilon) = E_0 \epsilon$,即不考虑非线性项, E_0 是线性弹性常数, θ_1 和 θ_M 分别表示低频和高频 Maxwell 体的松弛时间。对大多数介质, θ_1 的量级通常是 $10 \sim 10^2 \text{ s}$, θ_M 的量级通常是 $10^{-4} \sim 10^{-6} \text{ s}$ ^[23]。对时间尺度为 $1 \sim 10^2 \mu\text{s}$ 的爆炸冲击载荷,ZWT 本构关系中可忽略低频 Maxwell 体的松弛效应,则 ZWT 本构方程可表示为:

$$\sigma = E_a \epsilon + E_M \int_0^t \dot{\epsilon} e^{-\frac{t-\tau}{\theta_M}} d\tau \tag{1}$$

式中: $E_a = E_0 + E_1$ 。可以看出,式(1)给出的线黏弹性 ZWT 本构方程实际是一个标准线性固体模型,即一个线性弹性体和一个高频 Maxwell 体的并联,如图 2 所示。

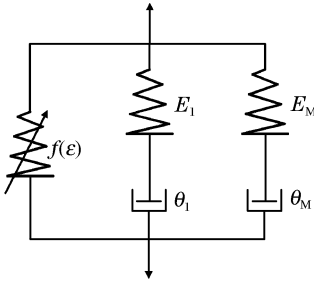


图 1 非线性黏弹性 ZWT 本构模型

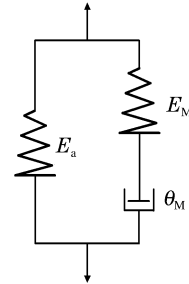


图 2 线性黏弹性 ZWT 本构模型

Fig. 1 Non-linear visco-elastic ZWT constitutive model

Fig. 2 Linear visco-elastic ZWT constitutive model

为精确描述球面波加载下的三维应力状态,需将上述式(1)表示的本构方程扩展至三维状态。在各项同性及体积无黏性假设下,参考三维弹性本构关系的推导^[28-30],则容变律可表示为:

$$\sigma_r + 2\sigma_\theta = \frac{E_a + E_M}{1 - 2\mu} (\epsilon_r + 2\epsilon_\theta) \tag{2}$$

以率形式表示的容变律方程为:

$$\dot{\sigma}_r + 2\dot{\sigma}_\theta = \frac{E_a + E_M}{1 - 2\mu} (\dot{\epsilon}_r + 2\dot{\epsilon}_\theta) \tag{3}$$

以率形式表示的畸变律方程为:

$$\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta = \frac{E_a + E_M}{1 + \mu} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta) - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta - \frac{E_a}{1 + \mu} (\epsilon_r - \epsilon_\theta)}{\theta_M} \tag{4}$$

令 $K = \frac{E_a + E_M}{3(1 - 2\mu)}$, $G = \frac{E_a + E_M}{2(1 + \mu)}$, $G_a = \frac{E_a}{2(1 + \mu)}$, $G_M = G - G_a$, $E = E_a + E_M$, 则线黏弹性 ZWT 本构

方程容变律及畸变律的率形式可以分别写为:

$$\dot{\sigma}_r + 2\dot{\sigma}_\theta = 3K(\dot{\epsilon}_r + 2\dot{\epsilon}_\theta) \tag{5}$$

$$\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta = 2G(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta) - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta - 2G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)}{\theta_M} \tag{6}$$

至此,球坐标下线黏弹性ZWT本构方程的微分形式已得到,可用于黏弹性球面波波动方程的推导。

2 黏弹性球面波波动方程及其谐波解

介质在球面波加载下的应力状态是三维应力应变状态,不同于一维应变或一维应力状态。在球坐标下,以位移 u 表示的应变分量分别为:

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \epsilon_\varphi = \frac{u}{r} \\ \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{r\varphi} = \epsilon_{\theta\varphi} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

球面波加载下平衡方程可以表示为:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8}$$

下面将结合式(2)、(5)~(8)来推导基于 ZWT 线性黏弹性本构方程的球面波波动方程。由式(2)和(5)能够得到:

$$\sigma_\theta = \frac{3K(\epsilon_r + 2\epsilon_\theta) - \sigma_r}{2} \tag{9}$$

$$\dot{\sigma}_\theta = \frac{3K(\dot{\epsilon}_r + 2\dot{\epsilon}_\theta) - \dot{\sigma}_r}{2} \tag{10}$$

把式(9)及(10)代入式(6),得到:

$$\dot{\sigma}_r = K(\dot{\epsilon}_r + 2\dot{\epsilon}_\theta) + \frac{4}{3}G(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta) - \frac{[\sigma_r - K(\epsilon_r + 2\epsilon_\theta)] - \frac{4}{3}G_a(\epsilon_r - \epsilon_\theta)}{\theta_M} \tag{11}$$

将式(11)对物质坐标 r 求导,式(8)对坐标 t 求导,令 $\epsilon_v = \epsilon_r + 2\epsilon_\theta, \epsilon_s = \epsilon_r - \epsilon_\theta$, 则:

$$\left(K \frac{\partial^2 \epsilon_v}{\partial t \partial r} + \frac{4}{3}G \frac{\partial^2 \epsilon_s}{\partial t \partial r} + \frac{K}{\theta_M} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial r} + \frac{4}{3}G_a \frac{\partial \epsilon_s}{\partial r} - \rho_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{3K}{r} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right) r \theta_M = r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - 3\theta_M \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} \tag{12}$$

$$3 \left(K \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} + \frac{4}{3}G \frac{\partial \epsilon_s}{\partial t} - \frac{1}{3}\rho_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{4}{3}G_a \epsilon_s \right) \theta_M = 3\theta_M \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \tag{13}$$

把式(12)、(13)相加并整理,得到以位移 u 表征的波动方程:

$$\begin{aligned} & \left(K + \frac{4}{3}G \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u \right)}{\partial t} \theta_M + \left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u \right) - \\ & \rho_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \theta_M - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

由式(14)可以看出,基于线黏弹性 ZWT 本构方程得到的线黏弹性球面波波动方程是一个三阶方程。文献[23]中给出的标准线性固体杆中的黏弹性纵波方程和式(14)较相似,若在此基础上考虑球面波的几何效应,便可得到式(14)。为简化分析,定义

$$u = -\frac{\partial \left(\frac{\psi}{r} \right)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \psi$$

ψ 和弹性波理论中折合位移势的定义相同,将上式代入式(14),整理得:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{1}{r} \right) - \rho_0 \theta_M \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \frac{1}{r} \right) \right] + \left[\left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{1}{r} \right) - \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \frac{1}{r} \right) \right] \right\} = 0 \tag{15}$$

由式(15)可以看出,大括号内的表达式对物质坐标 r 的导数为 0,则:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho_0 \theta_M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] + \left[\left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = rg(t) \tag{16}$$

式中: $g(t)$ 是满足式(16)的某一时间 t 的函数, 令 $\psi^* = rF(t)$, 代入式(16), 有:

$$\rho_0 \theta_M \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^3} + \rho_0 \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = -g(t) \quad (17)$$

式(17)是三阶常系数偏微分方程, 总能找到一个 $F(t)$ 满足它, 则 $\psi^* = rF(t)$ 是式(16)的一个特解。可以看出, 特解 $\psi^* = rF(t)$ 不影响对位移 u 的计算, 分析式(16)中 ψ 的性质时可只考虑齐次方程, 即:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho_0 \theta_M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] + \left[\left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (18)$$

可以证明, 谐波解 $\psi = A e^{i(\omega t - k_1 r)}$ 满足式(18), 由于 ω 已确定是实数, 则令 $k_1 = k + i\alpha$, 得:

$$\begin{aligned} & - \left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M (k^2 - \alpha^2) \omega i + \rho_0 \theta_M \omega^3 i - 2 \left(K + \frac{4}{3}G_a \right) k \alpha i + 2 \left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M k \alpha \omega - \\ & \left(K + \frac{4}{3}G_a \right) (k^2 - \alpha^2) + \rho_0 \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

若式(19)成立, 则:

$$\begin{cases} k^2 \alpha^2 = (\rho_0 \omega^2)^2 \frac{\left\{ \left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \theta_M \omega - \left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M \omega \right\}^2}{2 \left[\left(K + \frac{4}{3}G \right)^2 \theta_M^2 \omega^2 + \left(K + \frac{4}{3}G_a \right)^2 \right]} = b \\ k^2 - \alpha^2 = \rho_0 \omega^2 \frac{2 \left(K + \frac{4}{3}G \right) \frac{\left(K + \frac{4}{3}G_a \right) \theta_M^2 \omega^2 - \left(K + \frac{4}{3}G \right) \theta_M^2 \omega^2}{2 \left[\left(K + \frac{4}{3}G \right)^2 \theta_M^2 \omega^2 + \left(K + \frac{4}{3}G_a \right)^2 \right]} + 1}{K + \frac{4}{3}G_a} = c \end{cases} \quad (20)$$

由式(20)能够得到:

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{\sqrt{c^2 + 4b} - c}{2} \\ k^2 = \frac{2b}{\sqrt{c^2 + 4b} - c} \end{cases} \quad (21)$$

至此, 得到满足式(18)的谐波解 $\psi = A e^{-\alpha r} e^{i(\omega t - kr)}$, α, k 可由式(21)得到。

3 线黏弹性球面波的吸收和弥散现象

应力波在传播过程中幅值随传播距离的增加而衰减的现象称为吸收现象, 波在传播过程中形状的变化称为弥散现象。为研究线黏弹性球面波的吸收和弥散现象, 对式(21)作进一步分析, 则式(21)中的 b, c 可简化为:

$$\begin{cases} b = \left[\frac{\rho_0 \omega^2}{2 \left(K + \frac{4}{3}G \right)^2 \theta_M \omega} \right]^2 \left(-\frac{4}{3}G_M d \right)^2 \\ c = \frac{\rho_0 \omega^2}{K + \frac{4}{3}G_a} \left(1 - \frac{4G_M}{3K + 4G} d \right) \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{式中: } d = \left[1 + \frac{\left(K + \frac{4}{3}G_a \right)^2}{\left(K + \frac{4}{3}G \right)^2} \frac{1}{\theta_M^2 \omega^2} \right]^{-1}。$$

对于高频球面波, 当 $\theta_M \omega \gg 1$ 时, $d \rightarrow 1$, 则对 $\sqrt{c^2 + 4b} - c$ 作一阶近似为:

$$\sqrt{c^2 + 4b} - c \approx$$

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2}{K + \frac{4}{3}G} \frac{\left[\frac{1}{\left(K + \frac{4}{3}G \right)^2 \theta_M \omega} \right]^2}{\left(K + \frac{4}{3}G_a \right)^2 \left(1 - \frac{4G_M}{3K + 4G} \right)^2} \left(-\frac{4}{3}G_M \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{(4G_M)^2}{\left(K + \frac{4}{3}G \right) (3K + 4G)^2 \theta_M^2} \tag{23}$$

再令 $C_h^2 = \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho_0}$ (高频纵波波速), 则:

$$\begin{cases} \alpha_{\theta_M \omega \gg 1} = \frac{2G_M}{3\rho_0 C_h^3 \theta_M} \\ k_{\theta_M \omega \gg 1} = \frac{\omega}{C_h} \end{cases} \tag{24}$$

对于低频球面波, 当 $\theta_M \omega \ll 1$ 时, 式(20)可简化为:

$$\begin{cases} k^2 a^2 \approx (\rho_0 \omega^2)^2 \left[\frac{-\frac{4}{3}G_M}{2\left(K + \frac{4}{3}G_a \right)^2} \right]^2 \theta_M^2 \omega^2 = b \\ k^2 - \alpha^2 \approx \frac{\rho_0 \omega^2}{K + \frac{4}{3}G_a} \left[1 + \frac{-\frac{4}{3}G_M \left(K + \frac{4}{3}G \right)}{\left(K + \frac{4}{3}G_a \right)^2} \theta_M^2 \omega^2 \right] = c \end{cases} \tag{25}$$

则对式(25)作一阶近似, 令 $C_1^2 = \frac{K + \frac{4}{3}G_a}{\rho_0}$ (低频纵波波速), 不难得出:

$$\begin{cases} \alpha_{\theta_M \omega \ll 1} = \frac{2G_M \theta_M \omega^2}{3\rho_0 C_1^3} \\ k_{\theta_M \omega \ll 1} = \frac{\omega}{C_1} \end{cases} \tag{26}$$

由式(24)可以看出, 高频球面波的衰减指数趋于常值 α_∞ , 线黏弹性 ZWT 本构方程中的 Maxwell 体是导致球面波衰减的重要因素。衰减指数 α_∞ 的大小由材料的密度 ρ_0 、高频纵波波速 C_h 、Maxwell 体松弛剪切模量 G_M 以及松弛时间 θ_M 决定。高频球面波的相速 ω/k 趋于高频弹性纵波波速 C_h , 其大小和线黏弹性 ZWT 本构方程中 Maxwell 体的黏壶系数无关。高频球面波的上述结果和赖华伟等^[28-29]以特征线法得到的结果是相同的。由式(26)可以看出, 低频球面波的衰减指数和 ω^2 成正比, 比例因子由材料的密度 ρ_0 、低频纵波波速 C_1 、Maxwell 体松弛剪切模量 G_M 以及松弛时间 θ_M 决定。低频球面波的相速 ω/k 趋于低频弹性纵波波速 C_1 , 其大小也和线黏弹性 ZWT 本构方程中 Maxwell 体的黏壶系数无关。由式(24)及(26)总能得出:

$$\frac{C_1}{C_h} = \sqrt{1 - \frac{2(1-2\mu)}{3(1-\mu)} \frac{E_M}{E}} \tag{27}$$

可以看出, 低频和高频下的纵波速度比和介质的泊松比 μ 、ZWT 单元弹性模量 E 及 Maxwell 体单元的弹性模量 E_M 相关。需要强调的是, 对于球面波的衰减及波形弥散效应, 除本构引起的外, 还存在几何因素的影响, 此处没有讨论几何因素的影响。

不同介质有不同的衰减曲线, 选择黄土作为示例材料, 其 ZWT 本构参数^[31]为: $\rho_0 = 1.80 \text{ t/m}^3$, $E_a = 1.602 \text{ GPa}$, $E_M = 0.325 \text{ GPa}$, $\theta_M = 21.0 \text{ } \mu\text{s}$, $\mu = 0.25$ 。设 $\omega_0 = 1/\theta_M$, 通过式(21), 图 3 给出了黄土中球面波的衰减因子 α 随频率 ω/ω_0 变化的关系曲线。可以看出, 当 $\theta_M \omega \gg 1$ 时, α_∞ 趋于常数, 常数由式

(24)计算得到的值一致。当 $\theta_M \omega \ll 1$ 时,由式(26)可知,衰减因子和 ω^2 成正比,图3中的直线即式(26)确定的衰减因子随频率的变化关系,在低频段其和式(21)确定的衰减因子随频率的变化关系基本重合。考虑黏弹性介质中球面波的弥散效应,同样通过式(21),图4给出了黄土中球面波归一化相速 $\omega/(kC_h)$ (C_h 代表纵波波速)随频率 ω/ω_0 变化的关系曲线。可以看出,在线黏弹性介质中高频波的相速和高频纵波波速一致,低频波的相速和低频纵波波速一致。

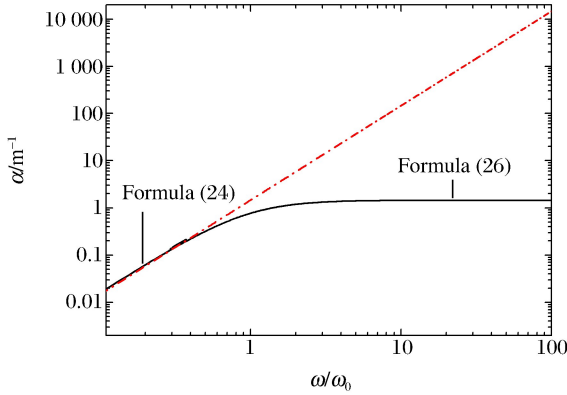


图3 黄土中球面波的衰减因子随频率的变化曲线
Fig. 3 Attenuation factor of spherical wave in loess varied with frequency

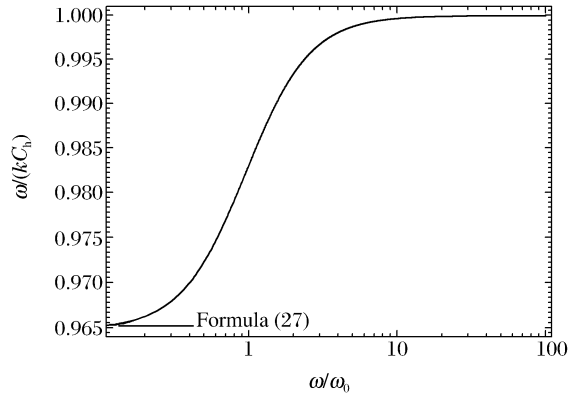


图4 黄土中球面波归一化相速随频率的变化曲线
Fig. 4 Normalized phase velocity of spherical wave in loess varied with frequency

4 结论

对球面波在固体介质中传播特性的研究是地下爆炸研究中的基础性课题,对于认识球面波加载实验中的某些力学现象至关重要。本文中基于线黏弹性ZWT本构方程,从球面波动力学基本方程出发,得到了以位移 u 为变量的三阶波动方程并对线黏弹性介质对球面波的吸收和弥散现象进行了讨论,得到如下结论:(1)由对式(18)的谐波解 $\psi = Ae^{i(\omega t - kr)}$ 的分析可知,高频球面波的衰减因子趋于常数 α_∞ ,其是由材料自身的密度 ρ_0 、高频纵波波速 C_h 、松弛剪切模量 G_M 以及松弛时间 θ_M 决定的;(2)低频球面波的衰减因子 $\alpha_{\theta_M \omega \ll 1}$ 和圆频率 ω 的平方成正比,比例因子由材料自身的密度 ρ_0 、低频纵波波速 C_l 、松弛剪切模量 G_M 以及松弛时间 θ_M 决定;(3)低频球面波的相速趋于低频纵波波速,高频球面波的相速趋于高频纵波波速,其比值与介质的泊松比 μ 、ZWT单元弹性模量 E 及Maxwell体单元的弹性模量 E_M 相关。

参考文献:

- [1] Blake F G. Spherical wave propagation in solid media[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1952, 24(2):211-215.
- [2] Lunts Y L. Propagation of spherical elastoplastic waves[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1949, 13(1):184-188.
- [3] Phillips A, Zabinski M P. Spherical wave propagation in a viscoplastic medium[J]. Ingenieur-Archiv, 1972, 41(6):367-376.
- [4] Zabinski M P, Phillips A. Spherical wave propagation in a viscoplastic medium: The case of unloading[J]. Acta Mechanica, 1974, 20(3):153-166.
- [5] Koshelev E A. Spherical stress wave propagation during an explosion in a viscoelastic medium[J]. Soviet Mining, 1988, 24(6):541-546.
- [6] Banerjee S, Roychoudhuri S K. Spherically symmetric thermo-visco-elastic waves in a visco-elastic medium with a spherical cavity[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1995, 30(1):91-98.
- [7] 李孝兰. 空腔解耦爆炸实验研究的理论基础: I[J]. 爆炸与冲击, 2000, 20(2):186-192.
Li Xiao-lan. Basic theory of decoupled explosions in cavities: I[J]. Explosion and Shock Waves, 2000, 20(2):186-

192.

- [8] 李孝兰. 空腔解耦爆炸实验研究的理论基础:II[J]. 爆炸与冲击, 2000, 20(3):283-288.
Li Xiao-lan. Basic theory of decoupled explosions in cavities: II[J]. Explosion and Shock Waves, 2000, 20(3):283-288.
- [9] 林英睿. 花岗岩中微药量爆炸应力波传播的 Lagrange 分析[D]. 西安:西北核技术研究所, 2007:16-42.
- [10] 林英睿, 王占江, 李运良, 等. 依球面波粒子速度研究材料本构关系[J]. 解放军理工大学学报:自然科学版, 2007, 8(6):606-610.
Lin Ying-rui, Wang Zhan-jiang, Li Yun-liang, et al. Constitutive relation using particle velocity data of spherical waves[J]. Journal of PLA University of Science and Technology, 2007, 8(6):606-610.
- [11] 刘文韬, 王肖钧, 周钟, 等. 岩石的连续损伤本构模型及其在地下爆炸波数值计算中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(13):2149-2156.
Liu Wen-tao, Wang Xiao-jun, Zhou Zhong, et al. Continuously damaged constitutive model of rock and its application to numerical simulation for underground strong explosion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(13):2149-2156.
- [12] Stevens J L, Rimer N, Day S M. Constraints on modeling of underground explosions in granite[R]. AD-A-178288/SSS-R-87-8312, 1986:1-32.
- [13] Antoun T H, Vorobiev O Y, Lomov I N, et al. Simulations of an underground explosion in granite[R]. UCRL-JC-134524, 1999:1-5.
- [14] 周钟. 水饱和和岩石本构模型和地下爆炸力学效应的数值研究[D]. 合肥:中国科学技术大学, 2005:32-65.
- [15] Grady D E. Experimental analysis of spherical wave propagation[J]. Journal of Geophysical Research, 1973, 78(8):1299-1307.
- [16] Swift R P. The dynamic response of westerly granite to spherical stress waves[R]. AD-729688, 1971:1-63.
- [17] Rodean H C, Larson D B, Hearst J R, et al. ARPA-AEC seismic/evasion research program: Progress on small-scale HE experiments and computer-code verification[R]. UCID-15696, 1970:1-38.
- [18] Seaman L. Lagrangian analysis for multiple stress or velocity gages in attenuating waves[J]. Journal of Applied Physics, 1974, 45(10):4303-4314.
- [19] 王武林, 黄理兴, 盛桂山, 等. 室内岩石球面波爆炸试验装置的研制[C]//岩石力学在工程中的应用:第二届全国岩石力学与工程学术会议. 广州, 1989:365-372.
- [20] 王占江, 李孝兰, 张若棋, 等. 固体介质中球形发散波的实验装置[J]. 爆炸与冲击, 2000, 20(2):103-109.
Wang Zhan-jiang, Li Xiao-lan, Zhang Ruo-qi, et al. An experimental apparatus for spherical wave propagation in solid[J]. Explosion and Shock Waves, 2000, 20(2):103-109.
- [21] 王占江. 岩土中填充与空腔解耦爆炸的化爆模拟实验研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2003:20-44.
- [22] 唐志平, 田兰桥, 朱兆祥, 等. 高应变率下环氧树脂的力学性能研究[C]//全国第二届爆炸力学会议论文集. 扬州:1981:4-12.
- [23] 王礼立. 应力波基础[M]. 2版. 北京:国防工业出版社, 2005:148-177.
- [24] 朱珏, 胡时胜, 王礼立. 率相关混凝土类材料 SHPB 试验的若干问题[J]. 工程力学, 2007, 24(1):78-87.
Zhu Jue, Hu Shi-sheng, Wang Li-li. Problems of SHPB technique used for rate-dependent concrete-sort materials [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(1):78-87.
- [25] 陈江瑛, 王礼立. 水泥砂浆的率型本构方程[J]. 宁波大学学报:理工版, 2000, 13(2):1-5.
Chen Jiang-ying, Wang Li-li. Rate-dependent constitutive equation of cement mortar[J]. Journal of Ningbo University: Natural Science Engineering, 2000, 13(2):1-5.
- [26] 陈江瑛, 黄旭升, 王礼立. 水泥砂浆的率型损伤演化[J]. 中国矿业大学学报, 1998, 27(2):189-191.
Chen Jiang-ying, Huang Xu-sheng, Wang Li-li. Study on rate-dependent damage evolution of cement mortar[J]. Journal of China University of Mining and Technology, 1998, 27(2):189-191.
- [27] 陶俊林, 李奎. 水泥砂浆的一个热黏弹性率型损伤本构模型[J]. 爆炸与冲击, 2011, 31(3):268-273.
Tao Jun-lin, Li Kui. A thermo-viscoelastic rate-dependent constitutive equation for cement mortar with damage [J]. Explosion and Shock Waves, 2011, 31(3):268-273.

- [28] 赖华伟,王占江,杨黎明,等.线性黏弹性球面波的特征线分析[J].爆炸与冲击,2013,33(1):1-10.
Lai Hua-wei, Wang Zhan-jiang, Yang Li-ming, et al. Characteristics analyses of linear viscoelastic spherical waves [J]. Explosion and Shock waves, 2013,33(1):1-10.
- [29] 赖华伟,王占江,杨黎明,等.由球面波径向质点速度实测数据反演材料黏弹性本构参数[J].高压物理学报,2013,27(2):245-252.
Lai Hua-wei, Wang Zhan-jiang, Yang Li-ming, et al. Inversion of constitutive parameters for viscoelastic materials from radial velocity measurements of spherical wave experiments[J]. Journal of High Pressure Physics, 2013, 27(2):245-252.
- [30] Wang Li-li, Lai Hua-wei, Wang Zhan-jiang, et al. Studies on nonlinear visco-elastic spherical waves by characteristics analyses and its application[J]. International Journal of Impact Engineering, 2013,55:1-10.
- [31] 卢强,王占江,李进,等.球面波加载下黄土线黏弹性本构关系[J].岩土力学,2012,33(11):3292-3298.
Lu Qiang, Wang Zhan-jiang, Li Jin, et al. Linear viscoelastic constitutive relation of loess under spherical stress wave[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012,33(11):3292-3298.

Analysis of linear visco-elastic spherical waves based on ZWT constitutive equation*

Lu Qiang¹, Wang Zhan-jiang¹, Wang Li-li², Lai Hua-wei³, Yang Li-ming²

(1. Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, Shaanxi, China;

2. Mechanics and Materials Science Research Center, Ningbo University,
Ningbo 315211, Zhejiang, China;

3. Department of Municipal Engineering, Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College,
Hangzhou 310018, Zhejiang, China)

Abstract: For the explosion and shock loading in the 1–100 μs time scale, the linear visco-elastic ZWT constitutive equation under a three-dimensional stress state was derived by ignoring the relaxation effect of the low-frequency Maxwell element and the nonlinear spring element. Based on the basic kinetic equation of the spherical wave and the linear visco-elastic ZWT constitutive equation, the third-order wave equation depicted by the displacement u was obtained. The absorption and dispersion phenomena of the spherical wave propagation in the visco-elastic solid were analyzed. Conclusions are as follows: the attenuation factor of the high-frequency spherical wave is inclined to constant, and its phase velocity to that of high-frequency longitudinal wave; the attenuation factor of the low-frequency spherical wave is in direct proportion to the square ω^2 of the circular frequency, and its phase velocity is inclined to that of the low-frequency longitudinal wave; the phase velocity of the low-frequency spherical wave is less than that of the high-frequency spherical wave, and the ratio between them is related to the Poisson ratio as well as the elastic modules of the ZWT and Maxwell elements.

Key words: mechanics of explosion; third-order wave equation; linear visco-elastic ZWT (Zhu-Wang-Tang) constitutive equation; spherical wave; shock wave; attenuation

* Received 13 April 2012; Revised 9 August 2012

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11172244)

Corresponding author: Wang Zhan-jiang, wzhj_nint@163.com