DOI: 10.11883/1001-1455(2017)04-0585-06

圆筒试验 JWL 状态方程参数的贝叶斯标定

陈 华1,周海兵1,刘国昭1,孙占峰2,张树道1

(1.北京应用物理与计算数学研究所,北京 100094;

2. 中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理实验室,四川 绵阳 621999)

摘要:在研究数值模拟的输入参数引入的不确定性时,通常需要人为给定每个输入参数的概率分布,且 输入参数概率分布的选择可能会对分析结果产生直接影响。利用贝叶斯方法标定了圆筒试验JWL 状态方程 参数,得到了标定参数的估计值和后验分布,并研究了不同统计模型假设对标定参数的估计值和后验分布的 影响。贝叶斯后验分布融合了基准试验的试验数据的信息,因此将其作为不确定度量化分析时输入参数的初 始概率分布,可以尽量减少分布选择引入的认知不确定性。

关键词:不确定度量化;参数标定;后验概率分布;贝叶斯方法;JWL 状态方程;圆筒试验;高斯过程 中图分类号:O381 国标学科代码:13035 文献标志码:A

随着计算机技术的发展,数值模拟已经成为复杂系统研究及设计的重要手段。以往,研究人员常常 将材料参数、几何尺寸等作为确定性的输入参数,代入程序进行数值模拟,从而得到确定性的结果。然 而实际上,数值模拟过程中存在各种不确定性来源。近十几年,不确定度量化(uncertainty quantification, UQ)方法发展迅速,逐渐成为数值模拟研究的热点^[1-2]。不确定度量化主要关注如何表征、量化、 减小数值模拟过程中的各种不确定性来源,是实现高置信度数值模拟的有效手段。在进行不确定度量 化分析时,为了研究输入参数引入的不确定性,每个输入参数常常需要人为给定概率分布。输入参数概 率分布的选择很可能会对分析结果有直接影响,为了减少分布选择的主观性,输入参数的概率分布最好 能够由试验数据提供。

目前,圆筒试验是评估炸药的做功能力、确定爆轰产物状态方程参数的基准试验,已经得到了广泛应用^[3-8]。标准的圆筒试验方法主要采用电离探针测量炸药爆速,用高速扫描相机记录定常滑移爆轰驱动下圆筒壁的径向膨胀距离随时间的变化关系,并利用经验公式计算圆筒壁的膨胀速度和比动能等表征炸药做功能力的特征量,最后利用这些试验结果标定 JWL(Jones-Wilkins-Lee)状态方程的参数^[9-10]。本文中,利用贝叶斯方法对圆筒试验 JWL 状态方程参数进行标定,给出标定参数的估计值,得到标定参数的后验分布,然后将该后验分布作为不确定度量化分析时输入参数的初始分布,以减小输入参数分布选择引入的不确定性。

1 圆筒试验

圆筒试验的试验装置示意图如图 1 所示,高速相机 VISAR 从狭缝扫描记录的是圆筒壁外表面的 径向膨胀过程,通过对照片底片的处理获得圆筒壁的径向膨胀位移和时间的关系。得到的观测数据如 图 2 所示。炸药爆轰产物 JWL 状态方程形式和等熵条件如下:

$$\begin{cases} p = A [1 - \omega/(R_1 V)] e^{-R_1 V} + B [1 - \omega/(R_2 V)] e^{-R_2 V} + \omega e/V \\ p_s = A e^{-R_1 V} + B e^{-R_2 V} + C/V^{\omega+1} \end{cases}$$
(1)

* 收稿日期: 2015-12-30; 修回日期: 2016-04-25

中国工程物理研究院科学技术发展基金项目(2013A0101004,2015B0201037); 北京应用物理与计算数学研究所所长青年基金项目(ZYSZ1518-13)

第一作者:陈 华(1979—),女,博士,副研究员, chen_hua@iapcm. ac. cn。

基金项目:国家自然科学基金项目(11472060,11671413);

式中:p为压力,下标"S"表示熵,V为相对比容,e为初始体积能量,A、B、C、 R_1 、 R_2 和 ω 为待标定参数。 利用 JWL 状态方程在 C-J 点的特性,由圆筒试验和相关试验的观测数据得到爆压、爆速、密度、内能和 参数 ω ,再构造代数方程组,给定 R_1 和 R_2 ,联立求解A、B和 $C^{[11]}$ 。



2 贝叶斯标定方法

M. Kennedy 和 A. O'Hagan^[12]提出用贝叶斯方法进行参数标定和预测。由此发展出来一系列方法,统称为 KOH 方法^[13-15]。KOH 方法用高斯过程(Gaussian process, GP)对计算结果和观测结果进行建模,同时对模型偏差进行建模。KOH 方法的主要思想是用高斯过程建立代理模型,然后用代理模型计算后验分布和标定参数。下面简单介绍 KOH 方法的框架,更多技术细节参见文献[12]。

2.1 定义和统计模型

v

令 $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(q_X)})$ 为 q_X 维控制变量, $\theta = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(q_\theta)})$ 为 q_θ 维标定参数, Y 为数值模拟计算的输出结果, Z 为试验观测结果。KOH 模型如下:

$$f_i = f_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{s}_i) \qquad \qquad i = 1, \cdots, M$$
(2)

$$z_j = \rho f_{\rm C}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{x}_j) + \varepsilon_j \qquad j = 1, \cdots, N$$
(3)

式中: $f_{c}(\cdot)$ 为计算模型, $b(\cdot)$ 为模型偏差, ε_{j} 为观测误差, ρ 为回归系数,M为数值模拟样本量,N为 试验样本量, x_{i}^{*} 为控制变量在第i次数值模拟中的取值, x_{j} 为控制变量在第j次实验中的取值(按照数 理统计中约定,采用大写字母表示随机变量,相应的小写字母表示该随机变量的取值,本文中,"X"、 "Y"、"Z"、"T"、" R_{1} "、" R_{2} "均采用该约定)。为了得到数值模拟的结果,需要给标定参数赋值,令s表示 数值模拟时输入的标定参数, θ 表示标定参数的真实值,以便于区分。

假设 $ε_j$ 服从均值为零、方差为λ的正态分布; $f_c(\bullet)$ 用高斯过程建模,均值函数为 $m_1(x,s)$,协方 差函数为 $c_1(\bullet, \bullet)$;模型偏差 b(x) 也用高斯过程建模,均值函数为 $m_2(x)$,协方差函数为 $c_2(\bullet, \bullet)$ 。假 设均值函数和协方差函数的形式如下:

$$m_i(\bullet) = h_i(\bullet)^T \beta_i \qquad i = 1,2$$
(4)

$$c_{i}((\boldsymbol{x}_{k},\boldsymbol{s}_{k}),(\boldsymbol{x}_{l},\boldsymbol{s}_{l})) = \sigma_{i}^{2} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{q_{X}} \omega_{Xij} (\boldsymbol{x}_{k}^{(j)} - \boldsymbol{x}_{l}^{(j)})^{2} - \sum_{r=1}^{q_{\theta}} \omega_{\theta r} (\boldsymbol{s}_{k}^{(r)} - \boldsymbol{s}_{l}^{(r)})^{2}\right\} \qquad i = 1,2$$
(5)

式中: h_i (•)为统计建模时任意给定的连接函数, $\sigma_i^2, \omega_{Xi}, \omega_{\theta i}$ 为协方差函数建模中需要估计的未知参数。令 $\psi = (\phi_1, \phi_2), \phi_i$ 是协方差函数 c_i (•,•)中的超参数($\sigma_i^2, \omega_{Xi}, \omega_{\theta i}$),i = 1, 2。KOH 模型的超参数包括 $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ 和 $\varphi = (\rho, \lambda, \phi)$,则全部要估计的参数为(θ, β, φ)。

2.2 数据结构

数据包括观测数据 z 和数值模拟结果 y,即 $d^{T} = (z^{T}, y^{T})$ 。数值模拟过程中输入变量的取值记为 $D_{1} = \{(x_{1}^{*}, s_{1}), \dots, (x_{M}^{*}, s_{M})\}$,试验数据控制变量的取值记为 $D_{2} = \{x_{1}, \dots, x_{N}\}$,与 D_{1} 相对应,可以将 D_{2} 扩充为 $D_{2}(\boldsymbol{\theta}) = \{(x_{1}, \boldsymbol{\theta}), \dots, (x_{N}, \boldsymbol{\theta})\}$ 。

2.3 后验分布

令先验分布 $P(\beta) \propto 1$ 。根据贝叶斯理论,在给定先验分布的条件下,后验分布为:

$$P(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi} \mid \boldsymbol{d}) \propto P(\boldsymbol{\theta}) P(\boldsymbol{\varphi}) f(\boldsymbol{d}; m_{d}(\boldsymbol{\theta}), V_{d}(\boldsymbol{\theta}))$$
(6)

式中:
$$f(\boldsymbol{d}; m_{d}(\boldsymbol{\theta}), V_{d}(\boldsymbol{\theta}))$$
 是多元正态分布 $N(m_{d}(\boldsymbol{\theta}), V_{d}(\boldsymbol{\theta}))$ 的密度函数,且

$$m_{\rm d}(\boldsymbol{\theta}) = E(\boldsymbol{d} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_1(D_1) & \boldsymbol{0} \\ \rho \boldsymbol{H}_1(D_2(\boldsymbol{\theta})) & \boldsymbol{H}_2(D_2) \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}$$
(7)

$$V_{d}(\boldsymbol{\theta}) = V(\boldsymbol{d} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_{1}(D_{1}) & \rho \boldsymbol{C}_{1}(D_{1}, D_{2}(\boldsymbol{\theta}))^{T} \\ \rho \boldsymbol{C}_{1}(D_{1}, D_{2}(\boldsymbol{\theta})) & \lambda \boldsymbol{I}_{N} + \rho^{2} \boldsymbol{V}_{1}(D_{2}(\boldsymbol{\theta})) + \boldsymbol{V}_{2}(D_{2}) \end{pmatrix}$$
(8)

式中: H_1 、 H_2 为由连接函数 h_i 构成的向量, $V_1(D_1)$ 为由集合 D_1 中数据构成的方差矩阵, $V_2(D_2)$ 为由 集合 D_2 中数据构成的方差矩阵, C_1 为 D_1 和 D_2 中数据构成的协方差矩阵, I_N 为 N维单位矩阵。

2.4 计算步骤

直接计算式(6)中的后验分布较困难,因此将计算过程分为4个步骤:步骤1和步骤2是建立GP 模型,步骤3是用建立的GP模型计算后验分布,步骤4是利用步骤3得到的后验分布标定参数。

步骤 1:建立 GP 代理模型,估计 β_1 和 $c_1(\cdot, \cdot)$ 的超参数 ϕ_1 。用数值模拟所得数据 y 估计 β_1 和 ϕ_1 , 得到估计值 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\phi}_1$ 。步骤 2:建立观测数据的 GP 代理模型,估计 ρ,λ,β_2 和 $c_2(\cdot, \cdot)$ 的超参数 ϕ_2 。在 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\phi}_1$ 给定的条件下,用观测数据 z 估计 ρ,λ,β_2 和 $c_2(\cdot)$ 的超参数 ϕ_2 ,从而得到估计值 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\rho},\hat{\lambda},\hat{\phi})$ 。步骤 3:计算标定参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验分布。由于 $P(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{d}) \propto P(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \boldsymbol{d})$,因此通过计算 $P(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \boldsymbol{d})$ 即可得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验分布。步骤 4:利用 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验分布标定参数。标定参数的估计可以定义为 后验分布的均值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(mean)}$ 、中位数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(mid)}$ 或最大概率值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(max)}$,其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(max)}$ 也称为最大后验估计(maximum posterior estimates, MPE)。

3 JWL 状态方程参数的标定

采用 KOH 贝叶斯方法标定圆筒试验 JWL 状态方程参数。将标定参数记为 (R_1, R_2) ;将时间视为 设计变量,记为 T;同时令 M=30, N=10。数值计算过程中, R_1 和 R_2 的抽样区间分别为[4.3,5.5]和 [0.8,1.5],用拉丁超立方抽样(latin hypercube sample, LHS)方法得到 M 组参数并代入模拟程序进行 计算,得到 M 条径向半径随时间变化的曲线。对设计变量 T 进行 LHS 抽样得到 M 个样本。将 T 和 (R_1, R_2) 的样本随机配对得到模拟计算的输入数据 $D_1 = \{(t_1^*, R_{11}, R_{21}), \dots, (t_M^*, R_{1M}, R_{2M})\}$ 。 D_1 对应 的计算输出结果为 $y = \{y_1, \dots, y_M\}$ 。需要注意的是,每次数值计算的结果都是径向半径随时间变化的 曲线,这里只是从曲线上随机取一个抽样点作为输出结果。对时间变量 T 随机抽样得到 N 个样本,即 $D_2 = \{t_1, \dots, t_N\}$ 。将 D_2 扩充为 $D_2(r_1, r_2) = \{(t_1, r_1, r_2), \dots, (t_N, r_1, r_2)\}$,其中 (r_1, r_2) 是标定参数的 真实值。 $D_2(r_1, r_2)$ 对应的径向半径观测数据为 $z = \{z_1, \dots, z_N\}$ 。假设 (R_1, R_2) 的先验分布为均匀分 布,即对 (R_1, R_2) 没有任何知识;超参数 ψ 的先验分布为标准正态分布。数值模拟使用的计算程序为 由北京应用物理与计算数学研究所自主研制的相容拉氏流体动力学工具包 CHAP (compatible hydrodynamics analysis program)^[16]。

下面分别采用两个模型进行建模,其主要区别在于模型中是否包含偏差。模型 1 是 KOH 模型的 通用形式,如式(2)~(3)所示;模型 2 是 KOH 模型的特殊形式,相当于在模型 1 的基础上令 $\rho = 1$, $b(\mathbf{x}_i) \equiv 0$,此时式(3)可以简化为:

$$f_j = f_{\rm C}(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}_j \qquad j = 1, \cdots, N$$
(9)

按照第 2.4 节中的 4 个步骤依次进行计算。第 1 步是建立数值模拟的 GP 代理模型。GP 代理模型中参数的估计值分别为 $\hat{\beta}_1$ = 3.090, $\hat{\sigma}_1^2$ = 2.296, $\hat{\omega}_{x_1}$ = 0.603, $\hat{\omega}_{R_11}$ = 0.064, $\hat{\omega}_{R_21}$ = 0.059。为检验 GP 代理模型预测的能力,重新随机抽样 4 组 (R_1 , R_2) 样本代入数值模拟程序进行计算,将计算得到的结果和采用 GP 模型预测的结果进行比较,如图 3 所示。从图 3 可以看出:代理模型预测曲线和数值计算的曲线基本重合,说明代理模型的预测足够精确。第 2 步是建立观测数据的 GP 代理模型。模型 1 中

第 37 卷

模型参数的估计值分别为 $\hat{\rho}$ =1.057, $\hat{\lambda}$ =1.810, $\hat{\beta}_2$ =-0.607, $\hat{\sigma}_2^2$ =1.585, $\hat{\omega}_{X2}$ =2.220。由于模型 2 忽略 了模型偏差并且 ρ =1,所以该步骤中只需要估计 λ ,估计值为 $\hat{\lambda}$ =2.608×10⁻⁵。第 3 步是计算标定参 数的后验分布。图 4 给出了标定参数 (R_1 , R_2)的后验概率分布等高线,其中后验概率共分为 9 个概率 区间,分别由 9 种颜色进行区分,从小到大依次用 $P_k(k=1,\dots,9)$ 表示, P_9 表示最大概率区间的值域。 图 4(a)为采用模型 1 得到的后验概率分布,可以看出,概率分布从右下角向左上角逐级递增,概率最大 区域 P_9 位于左上角;图 4(b)为采用模型 2 得到的后验概率分布,可以看出,概率分布从右下角和左边 向中间区域逐级递增, P_9 近似位于中间位置。第 4 步是标定参数。由图 4 可知:模型 1 的 MPE 为 $\hat{R}_1^{(max)}$ =4.68258, $\hat{R}_2^{(max)}$ =1.31066;模型 2 的 MPE 为 $\hat{R}_1^{(max)}$ =4.74985, $\hat{R}_2^{(max)}$ =1.10314。两个模型的 MPE 均近似位于 P_9 区域的中心位置。



图 3 GP 代理模型预测的结果和数值计算结果的比较

Fig. 3 Comparison of predictions of the GP surrogate model with numerical simulations





图 5 为模型 1 和模型 2 的预测效果,其中标定结果(红线)是将 MPE 代入数值模拟程序计算得到, 预测结果(绿线)采用观测数据的 GP 代理模型计算得到,试验结果用黑线表示。图 5 显示:两个模型的 预测结果均与试验结果符合很好,说明建立的代理模型都能够比较精确地描述试验数据。模型 2 中试 验结果和标定结果符合得比较好,表明标定的参数值是最佳拟合的估计;但是,当 $t>39 \mu s$ 时,模型 1 的 标定结果和试验结果差异逐渐增大。由于数值模拟和基于观测数据代理模型的预测(即 $\hat{f}_{c}(\mathbf{x}_{j}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 和 $\hat{f}_{c}(\mathbf{x}_{j}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \hat{b}(\mathbf{x}_{j})$)都足够精确,所以两者的差异即为模型偏差的预测 $\hat{b}(\mathbf{x})$,说明模型 1 标定的参数值 是"调和"了模型偏差 $\hat{b}(\mathbf{x})$ 和标定参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的最佳估计。



图 5 径向半径的预测、试验和模拟结果的比较 Fig. 5 Comparison of radius histories obtained by prediction, experiment and simulation

4 结 论

(1)用 KOH 贝叶斯方法标定圆筒试验 JWL 状态方程的参数 R₁ 和 R₂,得到了标定参数的估计值 和后验分布,并将后验分布作为子系统级(或系统级)复杂系统数值模拟不确定度量化分析的输入参数 的初始分布,以尽可能地减少分布选择引入的认知不确定性。(2)分析了两种 KOH 统计模型假设对标 定参数估计值和后验分布的影响。从参数标定的角度分析,模型 2 得到的估计值更好;从不确定度量化 的角度分析,由于模型 1 还分析了模型偏差引入的不确定性,因此模型 1 更合适。

参考文献:

- [1] Oberkampf W L, Roy C J. Verification and validation in scientific computing[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [2] Smith R C. Uncertainty quantification: Theory, implementation, and applications[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [3] Kury J W, Honig H C, Lee E L, et al. Metal acceleration by chemical explosives[C]//4th Symposium on Detonation. Maryland: White Oak, 1966:3-13.
- [4] Lan I F, Hung S C, Chen C Y, et al. An improved simple method of deducing JWL parameters from cylinder expansion test[J]. Propellants, Explosives, Pyrotechnics, 1993,18(1):18-24.
- [5] 于川,刘文翰,李良忠,等. 钝感炸药圆筒试验与爆轰产物 JWL 状态方程研究[J]. 高压物理学报,1997,11(3):227-233.
 Yu Chuan, Liu Wenhan, Li Liangzhong, et al. Studies on cylinder test and JWL equation of state of detonation

Yu Chuan, Liu Wenhan, Li Liangzhong, et al. Studies on cylinder test and JWL equation of state of detonation product for insensitive high explosive[J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 1997,11(3):227-233.

- [6] 陈朗,黄毅民,冯长根.含铝炸药圆筒试验及爆轰产物 JWL 状态方程研究[J].火炸药学报,2001,24(3):13-15.
 Chen Lang, Huang Yimin, Feng Changgen. The cylinder test and JWL equation of state detontion product of aluminized explosives[J]. Chinese Journal of Explosives and Propellants, 2001,24(3):13-15.
- [7] 陈朗,李泽仁. 激光速度干涉仪测量法在炸药圆筒试验中的应用[J]. 爆炸与冲击,2001,21(3):229-232.

Chen Lang, Li Zeren. The cylinder tests measured by VISAR interferometer[J]. Explosion and Shock Waves, 2001,21(3):229-232.

- [8] 徐辉,孙占峰,李庆忠.标准圆筒试验数据处理和不确定度评定方法[J].北京理工大学学报,2010,30(5):626-630.
 Xu Hui, Sun Zhanfeng, Li Qingzhong. Study on data processing and uncertainty evaluation of standard cylinder test
 [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2010,30(5):626-630.
- [9] Lee E L, Tarver C M. Phenomenological model of shock initiation in heterogeneous explosives[J]. Physics of Fluids, 1980,23(12):2362-2372.
- [10] Wescott B L, Stewart D S, Davis W C. Equation of state and reaction rate for condensed-phase explosives[J]. Journal of Applied Physics, 2005,98(5):053514.
- [11] 孙承纬,卫玉章,周之奎.应用爆轰物理[M].北京:国防工业出版社,2000.
- [12] Kennedy M, O'Hagan A. Bayesian calibration of computer models (with discussion)[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 2001,68:425-464.
- [13] Williams B, Higdon D, Gattiker J, et al. Combining experimental data and computer simulations, with an application to flyer plate experiments[J]. Bayesian Analysis, 2006,1(1):765-792.
- [14] Higdon D, Gattiker J, Williams B, et al. Computer model calibration using high-dimensional output[J]. Journal of the American Statistical Association, 2008,103(482):570-583.
- [15] Bayarri M J, Berger J O, Rui P, et al. A framework for validation of computer models[J]. Technometrics, 2007, 49(2):138-154.
- [16] 张树道,周海兵,熊俊.相容拉氏流体动力学 CHAP 程序研制及其应用研究:GF-A0091846G[R]. 2005.

Bayesian calibration for parameters of JWL equation of state in cylinder test

Chen Hua¹, Zhou Haibing¹, Liu Guozhao¹, Sun Zhanfeng², Zhang Shudao¹

 Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China;
 Laboratory for Shock Wave and Detonation Physics Research, Institute of Fluid Physics, Chinese Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, Sichuan, China)

Abstract: Since probability distributions of input parameters are usually assigned subjectively for uncertainty quantification (UQ) in numerical simulations, the selection of distributions may have significant effect on analysis results of UQ. In this paper, to calibrate more precisely the parameters of JWL equation of state in the cylinder test, we proposed to adopt Bayesian methods that provide estimators and posterior distributions of calibration parameters. Further, we investigated the effects of model assumptions on estimators and posterior distributions of calibration of calibration parameters. Our study shows that, owing to the information of cylinder tests they contain, the posterior distributions can be used as initial probability distributions of the input parameters in UQ to reduce the epistemic uncertainty. **Keywords**: uncertainty quantification; calibration; posterior distribution; Bayesian methods; JWL

equation of state; cylinder test; Gaussian process

(责任编辑 王玉锋)