DOI: 10.11883/bzycj-2019-0041

# 损伤演化对韧性金属碎裂过程的影响\*

祥,汤佳妮,王 珠,郑宇轩,周风华 曹 (宁波大学冲击与安全工程教育部重点实验室,浙江 宁波 315211)

摘要:固体在冲击拉伸载荷作用下会断裂成多个碎片,基于线性内聚力断裂假设的 Mott-Grady 模型能较好地预测 碎裂过程所产生的平均碎片尺度的下限。然而实际上, 韧性金属的损伤演化是多元化的, 为此通过数值模拟方法研究 了不同损伤演化规律对韧性碎裂过程的影响。利用 ABAQUS/Explicit 动态有限元软件数值再现了韧性金属杆(45 钢) 在高应变率下拉伸碎裂的过程,分析了线性和非线性损伤演化对韧性碎裂过程的影响规律。结果表明:损伤演化规律 对韧性金属的碎裂过程具有显著影响,非线性指标α越大,碎裂过程产生的碎片数越少; Grady-Kipp 碎裂公式仍能在一 定范围内预测韧性碎裂过程中产生的碎片尺寸;当非线性指标 a 远大于零时,在较低冲击拉伸载荷作用下,数值模拟 结果和 Grady-Kipp 模型预测值偏差较大,随着应变率增大,数值模拟结果与 Grady-Kipp 模型预测值吻合较好。

关键词: 韧性碎裂;损伤演化; Grady-Kipp 公式;碎片尺寸 中图分类号: O346.1 国标学科代码: 13015

文献标志码: A

## Effect of damage evolution on the fragmentation process of ductile metals

CAO Xiang, TANG Jiani, WANG Zhu, ZHENG Yuxuan, ZHOU Fenghua

(MOE Key Laboratory of Impact and Safety Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, Zhejiang, China)

Abstract: Solids will be broken into multiple fragments under dynamic tension loadings. The Mott-Grady model based on linear cohesive fracture can predict the lower limits of average fragment size during fragmentation process. However, the damage evolution of ductile materials is diversified. In this paper, the ductile fracture processes influenced by different damage evolutions were studied by numerical simulation. Using ABAQUS/Explicit dynamic finite element, we reproduced the tensile fracture process of ductile metal bar (45 steel) at high strain rates. The effects of linear/nonlinear damage evolutions on ductile fracture process were analyzed. The numerical results show that the damage evolution law has a significant influence on the fragmentation process of ductile metals. As the nonlinear parameter increases, the number of fragments decreases during fragmentation process. The Grady-Kipp formula can still reasonably predict the lower limits of the ductile fragment sizes in a certain range. When the non-linear index  $\alpha$  was far greater than zero, there are conspicuous deviations between the numerical experiments and the Grady-Kipp model under the low impact loading. With increasing strain rate, the results by the numerical simulations are in agreement with the ones by the Grady-Kipp theoretical model.

Keywords: ductile fragmentation; damage evolution; Grady-Kipp formula; fragment size

在冲击载荷作用下,韧性金属的损伤演化过程所需时间和冲击加载时间及应力波传播时间相当,塑 性变形集中化、内部孔洞生长等现象在材料内部大范围内同时发生,因此,韧性金属的破坏通常伴随着 大量碎裂的产生<sup>[1-3]</sup>。20世纪40年代, Mott<sup>[4-5]</sup>率先开展了韧性金属在冲击载荷作用下动态拉伸碎裂过 程研究,建立了固体碎裂的一维理论模型,用于分析韧性金属炮弹壳体的动态断(碎)裂过程。理想的简

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2019-02-01; 修回日期: 2019-05-16 基金项目: 国家自然科学基金(11390361,11402130) 第一作者: 曹 祥(1993—), 男, 硕士研究生, 826884599@qq.com 通信作者:郑宇轩(1986—),男,博士,副教授,zhengyuxuan@nbu.edu.cn

化模型为受到均匀拉伸载荷的一维理想弹塑性杆,杆断口的断裂是一个瞬时发生的随机现象,断裂时刻的能量耗散忽略不计,以单个断裂点诱发的卸载波传播距离来衡量碎片尺度。在经典的 Mott 碎裂模型中, Mott 认为断裂能和材料的损伤演化不重要,断裂过程的统计本质决定了碎片尺度及其分布。在 Mott 卸载波传播距离控制碎片尺度的理论基础上, Kipp 等<sup>[6]</sup>、Grady<sup>[7]</sup>进一步认为,材料的分离是一个内 聚断裂(cohesive fracture,亦称黏滞性断裂)过程,因此,引入材料断裂能来表征断裂过程中的耗散能,通 过内聚断裂的线性损伤演化假定,得到了碎片尺寸的解析解。

Grady-Kipp 公式的推导过程涉及了诸多基本假定,例如假定材料应变率率无关、理想塑性、温度无 关、刚性卸载、线性内聚断裂等。Zhang 等<sup>[8]</sup> 实验研究了 1100-O 铝环韧性碎裂过程。Levy 等<sup>[9]</sup> 采用线 性内聚力模型数值分析了韧性碎裂产生的碎片分布。陈磊等<sup>[10]</sup> 采用热黏弹塑性本构模型描述了材料的 动态变形和热软化特性,数值分析了韧性金属碎裂过程中出现的塑性流动、非均匀塑性变形和多重颈缩 失稳、Mott 波卸载和碎裂等多种现象。郑宇轩等<sup>[11]</sup> 在广泛的材料参数和应变率范围内,数值分析了 Grady 基于线性内聚断裂的碎裂公式,发现其均能较好地预测碎裂过程所产生的平均碎片尺度的下限。 在前期的数值模拟中,虽然考虑了材料的应变率效应、温度效应、塑性硬化等真实物理特性,但是描述 材料的破坏和分离过程仍采用线性内聚力失稳断裂准则。而韧性金属实际的损伤演化过程是多样化 的,研究不同损伤演化规律对韧性金属碎裂过程的影响,有助于全面认识材料在冲击载荷作用下的动态 拉伸特性和碎裂特性<sup>[12]</sup>。

脆性材料的碎裂过程中,非线性黏滞性断裂关系对平均碎片尺度的影响主要体现在准静态拉伸断裂区域,黏滞断裂模型的非线性指标越大,在裂纹卸载阶段,随着卸载时间的缩短,达到完全断裂的临界距离增大,计算得到的碎片尺寸更接近 Glenn-Chudnovsky 模型的理论预测,即脆性材料碎片尺寸更小<sup>[13]</sup>。Gilles 等<sup>[14]</sup> 理论分析了不同损伤弱化方式对韧性碎裂过程产生的碎片尺寸的影响。但是,脆性碎裂和韧性碎裂是完全不同的两种卸载方式,脆性材料的卸载以弹性卸载波作用为主,而韧性材料的卸载以刚性卸载的动量扩散机制为主<sup>[15-16]</sup>。韧性金属的损伤演化对其断(碎)裂过程的影响和脆性材料是否相似,需进一步研究。

本文中通过建立受均匀拉伸载荷作用的一维金属杆模型,采用 Johnson-Cook 热黏塑性本构模型描述韧性金属的变形和热软化特征,采用包含非线性内聚力断裂的 Johnson-Cook 损伤断裂模型描述韧性 金属的内聚力分离过程,研究韧性金属不同的损伤演化规律对其碎裂过程的影响,并进一步讨论 Grady-Kipp 碎裂公式的适用性。

## 1 有限元模拟

## 1.1 有限元模型

选取 Mott-Grady 一维碎裂理论分析的杆作为有限元模拟对象,选用一维应力状态的黏弹塑性圆柱 杆(45 钢),杆长 *L* 为 120 mm,横截面直径 *d* 为 1 mm。杆的一端在轴向速度固定,另一端施加一个恒定 速度为 *v*<sub>0</sub> 的拉伸载荷,如图 1 所示。以固定端为原点,在杆轴向施加线性递减的初始速度梯度场 *v=v*<sub>0</sub>*x*/*L*,在 Mott 卸载波出现前加速度始终为恒定值,因此该一维杆受到的是一个均匀的拉伸载荷,避免 了突加载荷产生的应力波对金属杆碎裂过程的干扰。

根据前期工作<sup>[10]</sup>中网格依赖性及步长对计 算结果影响的分析,采用网格尺寸为0.185 mm 的C3D10M 结构的四面体单元能获得较好的数 值模拟结果。

## 1.2 材料的本构模型

采用 Johnson-Cook 热黏塑性本构模型描述 45 钢的运动变形和热软化特征,采用内聚力断





裂的 Johnson-Cook 损伤断裂模型描述 45 钢的损伤起始、演化过程及最终碎裂。用等效塑性应变作为损伤因子 D 的启动准则, 损伤启动的临界应变  $\varepsilon_0^{pl}$  与应力三轴度、应变率和温度相关。

材料发生断裂过程中,其损伤应力与损伤因子、等效应力的关系为:

$$\sigma_{\rm v} = (1 - D)\overline{\sigma} \tag{1}$$

式中:  $\sigma_y$  为断裂点的单元损伤应力;  $\sigma$ 为无损伤材料的等效应力; D 为损伤因子, 当 D=1 时, 即完全损伤, 材料将完全破坏而失去承载能力。在数值计算中, 采用单元消去方法将失效单元(即死亡单元)从整体 结构中消去。

一旦损伤启动,损伤随单元内部塑性变形的发展而逐渐增加至1,应力随塑性变形的发展而逐渐降为零,如图2所示。Grady 假定损伤演化过程是线性关系,可得损伤因子:

$$D = \frac{\sigma_0}{2G_c} u^{\text{pl}} \qquad 0 \leq u^{\text{pl}} \leq \frac{2G_c}{\sigma_0}$$
(2)

式中:  $\sigma_0$  为损伤启动时刻单元的应力;  $G_c$  为材料分离所消耗的表面能, 即损伤启动到材料完全失效 (D=1)时所需的断裂能;  $u^{pl}$  为损伤启动之后单元的塑性位移, 等于单元尺寸 L 与单元等效塑性应变增量  $\Delta \varepsilon^{pl}$ 的乘积。由此可知, 如果发生相同的等效塑性应变增量, 大尺寸单元的损伤发展程度超过小尺寸单 元。事实上, 当材料发生以裂纹演化为主要形式的破坏时, 局部塑性应变往往集中在小单元内, 该损伤 发展模型将材料抵抗损伤发展的能力通过材料的断裂能参数表征, 既可以较好地描述材料的分离过程, 也可以有效修正数值模拟结果对单元尺寸的依赖性。

如果损伤演化过程是非线性关系,假定损伤因子:

$$D = \frac{1 - e^{-\alpha \left(u^{p_i}/u_i^{p_i}\right)}}{1 - e^{-\alpha}} \qquad \alpha \neq 0$$
(3)

式中:  $u_f^{\text{Pl}}$ 为临界塑性位移,即材料完全失效(D=1)时单元的塑性位移;  $\alpha$  为内聚力断裂的非线性指标,代表损伤演化曲线的走势。如图 2(a)所示,当  $\alpha$ >0时,损伤演化的应力位移曲线是下凹的,损伤启动初期,应力快速卸载,但是完全断裂时的塑性位移增大;当  $\alpha$ <0时,损伤演化的应力位移曲线是上凸的,损伤启动初期,应力变化缓慢,后期急剧衰减,完全断裂时的塑性位移较小;当  $\alpha$ =0 时为线性内聚力断裂,损伤因子 D 按式(2)演化发展,如图 2(b)所示。



图 2 非线性损伤演化下内聚力断裂特性和损伤因子



当 α>0 时,材料完全断裂的临界塑性位移极大地依赖于 α 值,材料难以断裂,而事实上,后期大部分的塑性位移仅贡献少量的断裂能,因此,在模拟过程中采用的断裂控制设定为当 D=0.99 时材料即发生 完全断裂。

#### 1.3 材料参数

对于线性内聚力断裂模型,可采用文献 [11] 中45 钢的材料参数进行数值模拟,如表1 所示。其中 ρ为密度, E 为杨氏模量, ν 为泊松比, c 为比热容, T<sub>1</sub>为转变温度, T<sub>m</sub>为熔化温度, G<sub>c</sub>为断裂能, m 为热软 化指数, $\beta$ 为 Taylor-Quinney 因数, $\dot{\epsilon}$ 为等效塑性应变率,A、B、C、n为材料常数。

而对于非线性内聚力断裂模型,损伤演化过程由*u*<sub>f</sub>和α共同决定,且损伤演化函数曲线下方面积为 材料分离所消耗的表面能*G*.:

$$G_{\rm c} = \int_0^{u_{\rm f}^{\rm n}} \sigma_{\rm y} \mathrm{d}u^{\rm pl} \tag{4}$$

结合式(1)和式(3)可得:

$$G_{\rm c} = \sigma_{\rm y_0} u_{\rm f}^{\rm pl} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{{\rm e}^{\alpha} - 1} \right) \qquad \alpha \neq 0 \tag{5}$$

则

$$u_{\rm f}^{\rm pl} = \frac{G_{\rm c}}{\sigma_{\rm y_0}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{{\rm e}^{\alpha} - 1}\right)^{-1} \qquad \alpha \neq 0 \tag{6}$$

由 Grady-Kipp 碎裂公式可知, 碎裂过程中产生的碎片平均尺寸受表面能  $G_c$  的影响显著, 因此, 研究 不同的损伤演化规律对 45 钢一维杆碎裂过程的影响, 必须固定表面能  $G_c=25$  kN/m 不变。由式(6)可知, 材料完全失效时单元的塑性位移  $u_f^{pl}$ 还和损伤启动时刻单元的应力  $\sigma_{y0}$  相关, 而 45 钢是应变率敏感材料, 不同应变率拉伸下的  $\sigma_{y0}$  亦不同。设定初始恒定拉伸速度  $v_0=2$  400 m/s, 即初始应变率为 2×10<sup>4</sup> s<sup>-1</sup>, 通过 改变内聚力断裂的非线性指标  $\alpha$ , 可相应得到不同的塑性位移  $u_f^{pl}$ , 如表 2 所示。

## 表 1 45 钢材料的 Johnson-Cook 本构模型的物理参数

## Table 1 Material parameters of the 45 steel

Material	$ ho/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3})$	E/GPa	ν	$c/(J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$	$T_{\rm t}/{ m K}$	$T_{\rm m}/{ m K}$	$G_{\rm c}/({\rm kN}\cdot{\rm m}^{-1})$
45 steel	7.8×10 <sup>3</sup>	203	0.29	447	298	1 765	25
Material	т	β	$\dot{\epsilon}/\mathrm{s}^{-1}$	A/MPa	<i>B</i> /MPa	С	п
45 steel	1.06	0.9	1	507	320	0.064	0.28

表 2 非线性损伤演化下内聚力断裂参数(断裂能 G<sub>c</sub>=25 kN/m)

Table 2	The cohesive parameters	under nonlinear dam	<b>1age evolutions (</b> <i>G</i> <sub>c</sub> =25 kN/m <b>)</b>
---------	-------------------------	---------------------	--

α	$u_{\rm f}^{\rm pl}/\mu{ m m}$	α	$u_{\rm f}^{\rm pl}/\mu{ m m}$	α	$u_{\rm f}^{\rm pl}/\mu{ m m}$	α	$u_{\rm f}^{\rm pl}/\mu{ m m}$
-10.0	24.1	-5.0	26.9	-1.0	37.3	-0.1	42.7
0.1	44.2	1.0	52.0	5.0	112.0	10.0	217.0

图 3 描绘了多种不同类型的非线性内聚力 断裂曲线。当非线性指标  $\alpha$ =0 时,材料的损伤演 化为线性衰减;当  $\alpha$ >0 时, $\alpha$  越大,在损伤启动 初期,内聚力衰减越迅速,颈缩对周围介质迅速 卸载,同时,由于完全断裂时的塑性位移  $u_f^{pl}$ 增 大,因此,卸载波传播的时间增加;当  $\alpha$ <0 时,  $\alpha$  越小,在损伤启动初期,断裂点的颈缩发展越 缓慢,消耗的断裂时间越长,但在接近临界塑性 位移  $u_f^{pl}$ 时,断裂点几乎瞬时卸载并发生断裂。

## 2 数值模拟及结果分析

## 2.1 损伤演化方式对碎片数的影响

保证 45 钢的基本材料参数不变, 在初始恒







定拉伸速度  $v_0$ =2 400 m/s 下,数值分析了具有不同损伤演化规律的一维圆杆的碎裂情况。图 4 给出了非 线性指标  $\alpha$  分别为-10.0、-5.0、-1.0、-0.1、0.1、1.0、5.0、10.0 和 0(线性)时一维杆碎裂后的形态。一维 杆碎裂产生的碎片通常为 27 块左右;当 $\alpha \ll 0$ 时,如 $\alpha$ =-10.0 和  $\alpha$ =-5.0 时,一维杆碎裂产生的碎片数分 别为 34 和 32;当 $\alpha \gg 0$ 时,如 $\alpha$ =10.0 和  $\alpha$ =5.0 时,一维杆碎裂产生的碎片数分别为 5 和 20,如图 5 所示。 从图 5 可以看出,不同的损伤演化规律对韧性金属碎裂过程中产生的碎片数有显著影响,非线性指标  $\alpha$ 数值越大,碎裂过程产生的碎片数越少,即碎片的平均尺寸越大。







#### 2.2 损伤演化方式对碎裂过程的影响

图 6 和图 7 给出了在恒定初始拉伸速度  $v_0=2$  400 m/s 时,不同损伤演化方式对韧性碎 裂过程的影响。以  $\alpha=0$  的线性损伤演化为基 准, $\alpha$  越大,单个碎片中存在的颈缩越多,碎片在 断口和颈缩处的塑性变形越大,如图 6 所示。 图 7(a)表明,在损伤演化启动之前,碎片断口位 置的温升曲线完全重合;损伤启动后, $\alpha$  越大, 断口处的应力值衰减越迅速,对应的塑性变 形发展越缓慢,因而碎片断口处温升发展也 越缓慢;同时,由于 $\alpha$  越大,材料完全断裂 时的塑性位移更大,碎片断口处的最终温升也 更高。

图 7(b)给出了不同损伤演化规律下一维杆 的平均应力-应变曲线。在损伤发生之前,各曲 线完全重合; α 越大,一维杆最终的表观应变也 越大,损伤演化阶段断口和颈缩的塑性变形提供 了主要的应变增量; 与图 3 所示的材料内聚力断 裂曲线不同,图 7(b)所示曲线反映的是杆的表 观应力-应变关系, α 数值无论正负,曲线的形 状、趋势均一致。

图 8 给出了不同损伤演化规律下一维杆







的平均应力-时程曲线。从图 8 可以看出: α 越小,一维杆的平均应力衰减越快,在整个碎裂过程中断 裂点的瞬时卸载诱发出较大的应力波扰动;当 α=0 时,一维杆的平均应力衰减适中,断裂点处的线性 卸载并未诱发显著的应力波扰动;α 越大,断口处的应力卸载越早,加之材料完全断裂时刻的塑性位 移增加,卸载时间变长,卸载波相互作用导致杆的整体卸载并不干脆,后期一维杆的平均应力在振 荡中衰减。

击



图 7 损伤演化方式对碎裂过程的影响







## 2.3 结果分析与讨论

利用材料的基本物理参数定义特征应变率 ¿0和特征碎片尺度 So:

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{\sigma_{\rm c}^{3/2}}{\rho^{1/2}G_{\rm c}}, \qquad S_0 = \frac{G_{\rm c}}{\sigma_{\rm c}}$$
(7)

式中: $\sigma_{c}$ 为程序计算出的临界应力; $\rho$ 为材料参数; $\dot{\epsilon}_{0}$ 、 $S_{0}$ 由材料参数 $G_{c}$ 、 $\sigma_{c}$ 、 $\rho$ 唯一确定,因而也为材料 参数,为表征碎裂过程的关键特征。定义无量纲应变率 $\dot{\epsilon}$ 和无量纲碎片尺度 $\bar{S}$ :

$$\bar{\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}, \qquad \bar{S} = \frac{S}{S_0} \tag{8}$$

式中: *ċ*为杆发生断裂时的瞬时应变率, *S*为材料碎裂产生碎片的平均尺度。因此, 无量纲化后的 Grady-Kipp 公式简化为:

$$\bar{S} = \left[\frac{12}{\left(\bar{\varepsilon}\right)^2}\right]^{1/3} \tag{9}$$

可见, 无量纲化后的碎片尺度由无量纲应变率唯一确定, 与材料参数不再相关。将不同损伤演化规 律下的碎裂过程产生的碎片尺寸及断裂应变率无量纲化, 结果按双对数形式绘制于图 9。由图 9 可知: 虽然初始应变率相同, 但是由于断裂时刻杆的最终长度不同, 因此, 不同损伤演化规律下一维杆的断裂 应变率相差较大; α 数值越大, 数值模拟得到的平均碎片尺寸和 Grady-Kipp 公式预测的理论值偏差越 大, α 数值过大导致完全断裂时刻的断口塑性位移过大, 完全断裂所需时间过长, 大部分颈缩的发展最终 都被卸载波终止, 从而导致碎片数过少, 即碎片平均尺寸偏大; α 数值越小, 数值模拟得到的平均碎片尺 寸越接近 Grady-Kipp 公式预测的理论值。

值得注意的是, α 数值越大, 韧性碎裂过程产生的碎片平均尺寸越大, 和脆性碎裂结果正好相反。 这是因为: 韧性材料的卸载以刚性卸载的动量扩散机制为主, 卸载波传播的区域将终止塑性变形的发 展; α 数值越大, 卸载波产生时间越早, 持续时间越长, 导致卸载波传播的距离也更长, 即碎片尺寸偏大; 而脆性材料的卸载以弹性卸载为主, α 数值越大, 碎裂过程中诱发的应力波动能越少, 材料内部存储的弹 性能可以完全转化为断裂能, 从而使脆性固体更容易断裂, 即碎片尺寸偏小。

图 9 结果显示,在大部分 α 取值范围内, Grady-Kipp 碎裂公式仍能较好地预测韧性碎裂过程中产生的碎片尺寸,只有当 α 数值很大(如 α=10.0)时,理论和数值模拟结果的偏差较大。针对 α=10.0 的情况, 图 10 给出了更广泛的应变率范围下无量纲碎片尺寸与无量纲断裂应变率的关系。图 10 表明:当 α 数值 很大时,损伤演化规律对韧性碎裂的影响具有显著的率敏感性,应变率越低,数值模拟结果和理论分析 偏差越大;随着应变率的升高,数值模拟结果和理论分析偏差趋于稳定,但仍存在不小偏差。造成此现 象的主要原因是,45 钢为显著的应变率敏感材料,应变率的提高增大了一维杆的损伤启动应力,在断裂 能保持不变的前提下,相应完全断裂时刻的塑性位移将降低,结果更接近线性内聚力断裂的假定。



## 3 结 论

采用 ABAQUS 有限元软件数值模拟再现了一维应力状态下的韧性金属杆(45 钢杆)在高应变率下 均匀拉伸碎裂过程,分析了一维杆在线性和非线性损伤演化下的韧性碎裂过程,得到以下结论。

(1)非线性指标 α 数值越大, 碎裂过程中产生的单个碎片中存在的颈缩越多, 碎片在断口和颈缩处 均具有更大的塑性变形, 相应的断口处温升越明显。

(2)韧性金属的损伤演化规律对其碎裂过程具有显著影响,非线性指标 a 数值越大,碎裂过程中产生的碎片数越少。当非线性指标 a 小于零或略大于零时, Grady-Kipp 碎裂公式仍能较好地预测韧性碎裂过程中产生的碎片尺寸;当非线性指标 a 远大于零时,在较低的冲击拉伸载荷作用下,数值模拟结果和 Grady-Kipp 模型预测值的偏差较大,随着应变率升高,数值模拟结果与 Grady-Kipp 模型预测值吻合较好。

## 参考文献:

- GRADY D E, BENSON D A. Fragmentation of metal rings by electromagnetic loading [J]. Experimental Mechanics, 1983, 23(4): 393–400. DOI: 10.1007/BF02330054.
- [2] GRADY D E, KIPP M E. Experimental measurement of dynamic failure and fragmentation properties of metals [J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, 32(17–18): 2779–2791. DOI: 10.1016/0020-7683(94)00297-a.

- [3] GRADY D E, KIPP M E. Fragmentation properties of metals [J]. International Journal of Impact Engineering, 1997, 20(1–5):
   293–308. DOI: 10.1016/S0734-743X(97)87502-1.
- [4] MOTT N F. A theory of the fragmentation of shells and bombs [M]//GRADY D. Fragmentation of Rings and Shells. Berlin, Germany: Springer, 2006: 243–294. DOI:10.1007/978-3-540-27145-1\_11
- [5] MOTT N F. Fragmentation of shell cases [J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1947, 189(1018): 300–308. DOI: 10.1098/rspa.1947.0042.
- [6] KIPP M E, GRADY D E. Dynamic fracture growth and interaction in one dimension [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1985, 33(4): 399–415. DOI: 10.1016/0022-5096(85)90036-5.
- [7] GRADY D E. Fragmentation of rings and shells: the legacy of N. F. Mott [M]. Berlin: Springer, 2006. DOI: 10.1007/b138675
- [8] ZHANG H, RAVI-CHANDAR K. Dynamic fragmentation of ductile materials [J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2009, 42(21): 214010. DOI: 10.1088/0022-3727/42/21/214010.
- [9] LEVY S, MOLINARI J F, VICARI I I, DAVISON A C. Dynamic fragmentation of a ring: predictable fragment mass distributions [J]. Physical Review E, 2010, 82(6): 066105. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.066105.
- [10] 陈磊,周风华,汤铁钢. 韧性金属圆环高速膨胀碎裂过程的有限元模拟 [J]. 力学学报, 2011, 43(5): 861-870. DOI: 10.6052/0459-1879-2011-5-lxxb2010-675.

CHEN L, ZHOU F H, TANG T G. Finite element simulations of the high velocity expansion and fragmentation of ductile metallic rings [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(5): 861–870. DOI: 10.6052/0459-1879-2011-5-lxxb2010-675.

- [11] 郑宇轩, 胡时胜, 周风华. 韧性材料的高应变率拉伸碎裂过程及材料参数影响 [J]. 固体力学学报, 2012, 33(4): 358–369.
   DOI: 10.3969/j.issn.0254-7805.2012.04.003.
   ZHENG Y X, HU S S, ZHOU F H. High strain rate tensile fragmentation process of ductile materials and the effects of material parameters [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2012, 33(4): 358–369. DOI: 10.3969/j.issn.0254-7805. 2012.04.003.
- [12] GAO X, WANG T, KIM J. On ductile fracture initiation toughness: effects of void volume fraction, void shape and void distribution [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(18–19): 5097–5117. DOI: 10.1016/j.ijsolstr. 2005.02.028.
- [13] 周风华, 郭丽娜, 王礼立. 脆性固体碎裂过程中的最快卸载特性 [J]. 固体力学学报, 2010, 31(3): 286–295. DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2010.03.009.
   ZHOU F H, GUO L N, WNAG L L. The rapidest unloading characteristics in the fragmentation process of brittle solids [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2010, 31(3): 286–295. DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2010.03.009.
- [14] GILLES D, JORIS V, DON-PIERRE Z, et al. Stress release waves in plastic solids [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2019, 128: 21–31. DOI: 10.1016/j.jmps.2019.03.021.
- [15] 郑宇轩,周风华,余同希. 动态碎裂过程中的最快速卸载现象 [J]. 中国科学: 技术科学, 2016, 46(4): 332–338. DOI: 10.1360/N092016-00012.
   ZHENG Y X, ZHOU F H, YU T X. The rapidest unloading in dynamic fragmentation events [J]. Scientia Sinica Technologica, 2016, 46(4): 332–338. DOI: 10.1360/N092016-00012.
- [16] 郑宇轩,周风华,胡时胜,等.固体的冲击拉伸碎裂 [J]. 力学进展, 2016, 46(12): 506-540. DOI: 10.6052/1000-0992-16-004.
   ZHENG Y X, ZHOU F H, HU S S, et al. Fragmentation of solids under impact tension [J]. Advances in Mechanics, 2016, 46(12): 506-540. DOI: 10.6052/1000-0992-16-004.

(责任编辑 蔡国艳)