DOI: 10.11883/bzycj-2019-0252

超材料混凝土的带隙特征及对冲击波的衰减效应*

张 恩¹,路国运¹,杨会伟¹,曹瑞东^{2,3},陈鹏程¹
(1.太原理工大学土木工程学院,山西太原 030024;
2.太原理工大学材料强度与结构冲击山西省重点实验室,山西太原 030024;
3.山西大学土木工程系,山西太原 030013)

摘要:借鉴超材料的研究思路,在混凝土中引入谐振骨料,设计出具有消波特性的超材料混凝土。首先,通过结构动力学方法计算超材料混凝土的有效质量,从而建立了超材料混凝土带隙起始频率及截止频率的简化模型,并给出了带隙起始频率及截止频率的理论表达式。然后,分析了涂层弹性模量、芯柱密度、基体密度、骨料体积占比和芯柱边长与软涂层厚度比对超材料混凝土带隙特征的影响。最后,采用数值模拟的方法,对比了超材料混凝土和普通混凝土对冲击波的衰减效应。研究结果表明:(1)低弹性模量涂层能够形成低频带隙,但带隙宽度较窄,而高弹性模量涂层能够形成较宽的带隙,但带隙起始频率较高;(2)通过选择高密度芯柱材料和低密度基体材料,可以得到低频、宽带隙特征;(3)通过增大骨料体积占比和芯柱边长与软涂层厚度比可以实现扩宽带隙的目的;(4)与普通混凝土相比,超材料混凝土对冲击波具有更好的衰减作用。

关键词: 超材料混凝土;带隙特征;起始频率;截止频率;衰减效应 中图分类号: O382 国标学科代码: 13035 文献标志码: A

Band gap features of metaconcrete and shock wave attenuation in it

ZHANG En¹, LU Guoyun¹, YANG Huiwei¹, CAO Ruidong^{2,3}, CHEN Pengcheng¹

(1. College of Civil Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, Shanxi, China;

2. Shanxi Key Laboratory of Material Strength and Structural Impact, Taiyuan University of Technology,

Taiyuan 030024, Shanxi, China;

3. Department of Civil Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030013, Shanxi, China)

Abstract: Based on the research ideas of metamaterials, a novel concrete with wave-absorbing features was designed by introducing local resonant aggregates into plain concrete. First, the effective mass of the designed metaconcrete was calculated by means of structural dynamics. Simplified models for the start and cutoff frequencies of the band gap in the metaconcrete were established, and the theoretical expressions for the band gap start and cutoff frequencies were proposed. The effects of the following parameters on the band gap features of the metaconcrete were analyzed by the proposed theoretical models, including the coating elastic modulus, core density, matrix density, aggregate volume ratio, and ratio of core length to soft thickness. Finally, the numerical simulations were carried out to compare the attenuation effects of shock waves in the metaconcrete to those in the plain concrete. The research results reveal that the flexible coating results in a low-frequency attenuation domain, but the width of the attenuation domain is narrow; while the high elastic modulus coating can form a wider attenuation domain, but the attenuation domain has a higher start frequency. A low frequency and wide band gap can be obtained by selecting large-density core material and small-density matrix material. A wide band gap can be achieved by

* 收稿日期: 2019-06-25; 修回日期: 2020-04-26
 基金项目: 国家自然科学基金(11372209);山西省自然科学基金(201901D111089)
 第一作者: 张 恩(1991-),男,博士研究生,18734862993@163.com
 通信作者: 路国运(1973-),男,博士,教授,luguoyun@tyut.edu.cn

increasing the proportion of aggregate volume and the ratio of core length to soft thickness. Compared with the plain concrete, the metaconcrete has a better attenuation effect on shock wave.

Keywords: metaconcrete; band gap feature; start frequency; cutoff frequency; attenuation

近年来关于人造具有特殊功能材料的设计和制造成为研究热点,超材料(metamaterials)是人造复合 材料,具有天然材料不具备的非凡的物理性质。这些特性源于其特殊设计的微观结构,而不是化学成 分。超材料的出现代表着一种崭新的材料设计理念,即人类可以在利用现有材料的基础上,按照自己的 意志逆向设计微结构来获得新材料。超材料的研究主要集中在电磁超材料^[1-2]、热学超材料^[3-4]、光学超 材料^[5-6]和声学超材料^[7-13]等领域。

Liu 等^[10-13]提出了局域共振声子晶体,使用橡胶包裹铅球构成局域共振单元。在环氧树脂基体中周 期性地排列上述局域共振单元,可以构成人工周期材料。上述周期材料突破 Bragg 机理的限制,使用弹 性波的局域共振效应实现了在亚波长频段对低频弹性波的衰减,为声学超材料的研究开拓了新思路。 Yang 等^[14-15]使用局域共振的思想设计了薄膜型主动声学超材料,能够对 50~1 000 Hz 的低频声波进行 阻隔,并进一步探索出有效拓宽局域共振声学超材料带隙的方法。吴健等^[16]、张印等^[17]使用局域共振的 思想设计了梁板类声学超材料,并对其带隙计算方法进行改进和完善,最后把该类声学超材料应用于声 隐身和减振降噪等领域。Brûlé等^[18]把局域共振的思想引入到防震工程中,其通过在黏土中打出中心间 距为 1.73 m、深度为 5 m、直径为 0.32 m 的自稳定孔,实现了对频率为 50 Hz 的弹性波的阻断。

本文中,借鉴超材料的研究思路,使用局域共振骨料代替混凝土中的普通骨料,设计一种具有冲击 波衰减效应的超材料混凝土。首先,基于结构动力学计算了超材料混凝土的有效质量,并进一步建立超 材料混凝土带隙起始频率、截止频率的理论模型,讨论涂层弹性模量、芯柱密度、基体密度、骨料体积占 比和芯柱边长与软涂层厚度比等因素对超材料混凝土带隙起始频率、截止频率及带隙宽度的影响;其 次,采用数值模拟的方法,对比超材料混凝土和普通混凝土对冲击波的衰减效应。以期研究结果可为超 材料混凝土的设计及应用提供理论支持。

1 超材料混凝土设计

本文中提出的超材料混凝土(metaconcrete) 如图 1 所示,由局域共振型骨料和砂浆两部分组 成。其中局域共振型骨料由高密度柱体周围包 覆软涂层形成,把该骨料均匀地排列在砂浆中, 形成超材料混凝土。最初,局域共振型结构多被 设计成球形和圆柱形结构^[10-13],但是在实际使用 中,球形和圆柱形结构存在制作难度大、加工复



Fig. 1 Metaconcrete designed in this paper

杂等问题,为此设计了长方体形结构,其具有以下优点:芯柱制作过程简单;软涂层的工艺更易实现;便 于工程应用。当冲击波从一端向另外一端传播时,由于软涂层的存在,芯柱和砂浆可以产生相对运动, 起到衰减冲击波的目的^[19]。

2 有效质量及带隙特征

2.1 有效质量理论模型

图 2(a) 为超材料混凝土单胞,其中砂浆基体质量为 m_1 ,芯柱质量为 m_2 ,软涂层等效为刚度为 k_2 的弹簧,砂浆和芯柱的位移分别为 u_1 和 u_2 。超材料混凝土可视为图 2(b) 所示的一维晶格系统。为了计算超材料混凝土的有效质量,又可以把图 2(b) 假设为如 2(c) 所示的由刚度为 $k_1(k_1 \rightarrow \infty)$ 的外部弹簧连接的一维超材料混凝土晶格系统。

对于图 2(a) 所示的超材料混凝土单胞, 假 设涂层为均匀弹性材料, 在计算软涂层的等效刚 度 k₂时, 只考虑左右两侧软涂层的拉伸和压缩 作用, 忽略前后两侧软涂层的剪切作用, 等效刚 度 k, 可以简化为:

$$k_2 = \frac{2Ebl}{t} \tag{1}$$

式中: *E* 为涂层的弹性模量, *b* 为芯柱的边长, *l* 为 芯柱的高度, *t* 为软涂层厚度。

对于图 2(c) 所示的一维晶格系统, 根据 动力学平衡方程, 可以给出第 *j* 个单胞的运动 方程:

$$m_1^j \ddot{u}_1^j + k_1 \left(2u_1^j - u_1^{j-1} - u_1^{j+1} \right) + k_2 \left(u_1^j - u_2^j \right) = 0 \qquad (2)$$

$$m_2^j \ddot{u}_2^j + k_2 \left(u_2^j - u_1^j \right) = 0 \tag{3}$$

考虑周期系统的稳态简谐振动,可设位移 解^[20]为:

$$u^{j+n} = A e^{i(jqL+nqL-\omega t)}$$
(4)

式中: *A* 为波幅, *q* 为波数, *L* 为单胞的边长, ω 为 激振频率。

从而:

$$\ddot{u}_1^j = -\omega^2 u_1^j, \ \ddot{u}_2^j = -\omega^2 u_2^j \tag{5}$$

for metaconcrete

$$u_1^{j+1} = u_1^j e^{iqL}, \ u_1^{j-1} = u_1^j e^{-iqL}$$
(6)

从而式(2)和式(3)可以简化为:

$$-m_1^j \omega^2 u_1^j + k_1 \left(2u_1^j - u_1^j e^{-iqL} - u_1^j e^{iqL} \right) + k_2 \left(u_1^j - u_2^j \right) = 0$$
⁽⁷⁾

$$-m_2^j \omega^2 u_2^j + k_2 \left(u_2^j - u_1^j \right) = 0 \tag{8}$$

再次使用下列恒等式:

$$e^{iqL} + e^{-iqL} = 2\cos(qL) \tag{9}$$

$$1 - \cos(qL) = 2\sin^2(qL/2)$$
(10)

式(7)和式(8)可以简化为:

$$\left[-m_1^j\omega^2 + k_2 + 4k_1\sin^2\left(\frac{qL}{2}\right)\right]u_1^j - k_2u_2^j = 0$$
(11)

$$-k_2 u_1^j + \left(k_2 - m_2^j \omega^2\right) u_2^j = 0 \tag{12}$$

为了得到系统的色散关系,可以把式(11)和式(12)看成求解矩阵特征值的问题,可以简化为如下形式:

$$\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}} - \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}\right) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

式中: K_r 和 M_r 分别为系统的刚度矩阵和质量矩阵, ω 为频率, u为系统中自由度的位移矢量。从而, 系统的运动方程可以写成下列形式:

$$\begin{pmatrix} -m_1^j \omega^2 + k_2 + 4k_1 \sin^2\left(\frac{qL}{2}\right) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2^j \omega^2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$
(14)



当且仅当 $K_r - \omega^2 M_r = 0$ 时,此特征值问题具有非零解。从而:

$$n_1^j m_2^j \omega^4 - \left[k_2 \left(m_1^j + m_2^j\right) + 4m_2^j k_1 \sin^2\left(\frac{qL}{2}\right)\right] \omega^2 + 4k_1 k_2 \sin^2\left(\frac{qL}{2}\right) = 0$$
(15)

结合式(9)~(10)和(15),可以得到:

1

$$\cos\left(qL\right) = 1 + \frac{\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 k_2 \left(m_1 + m_2\right)}{2k_1 k_2 - 2\omega^2 k_1 m_2} \tag{16}$$

对于图 2(d)中的一维单原子晶格系统,其等效质量 $m_{\text{eff}}^{[20-21]}$ 可以表示为: $m_{\text{eff}}\omega^2 = 2k_1[1 - \cos(qL)]$

$$_{\rm ff}\omega^2 = 2k_1 [1 - \cos(qL)]$$
 (17)

结合公式(16)和(17),可以得到无量纲的 m_{eff} 表达式:

$$\frac{m_{\rm eff}}{m_{\rm st}} = 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \left[\frac{(\omega/\omega_2)^2}{1-(\omega/\omega_2)^2} \right]$$
(18)

式中: $m_{st}=m_1+m_2$, $\theta=m_2/m_1$, $\omega_2=\sqrt{k_2/m_2}$ 。

根据式(18), 当 θ=1, 可以给出有效质量与 激振频率的关系图, 如图 3 所示。

如图 3 所示, 当激振频率接近由弹簧-芯柱 组成的内部系统的自振频率时, 有效质量曲线变 化特别大并且复杂, 当 $\omega > \omega_2$ 时, 达到负值。图 中A、B两点之间的区域, 有效质量达到负值, 波 在该频率范围内会得到衰减, 形成带隙^[16-17]。因 此, 有效质量是激振频率的函数, 正是接近内部 系统自振频率的行为导致材料整体性能的变化, 从而能够形成一种具有消波能力的新颖材料。

2.2 带隙特征分析

结构的带隙是指不能通过该结构的波的频率范围,其特征主要包含带隙起始频率(band gap



start frequency)、带隙截止频率(band gap cutoff frequency)和带隙宽度(band gap width)。对比图 3, 其中 *A* 点对应带隙起始频率,其主要由局域共振骨料的平动振动决定;*B* 点对应带隙截止频率,根据 式(18),求出该点对应的频率,表明该共振模式下,芯柱与基体在涂层的作用下,形成反相位,达到动态 平衡。

采用图4所示模型来进一步描述以上两种共振模式。

图 4 中, *M*₁ 为单个局域共振型骨料中芯柱的等效质量, *M*₂ 为单个周期内砂浆的等效质量, 弹簧 *k* 为骨料涂层的等效刚度。在带隙起始频率处, 芯柱 *M*₁ 在弹簧 *k* 的作用下发生共振; 而在带隙截止频 率处, 芯柱 *M*₁和砂浆 *M*₂在弹簧 *k* 的连接下, 以相对振动的方式发生共振, 弹簧上黑点所示位置保持相 对静止。





对式(18)进行转换,可以得到带隙起始频率f,和带隙截止频率f,的函数表达式:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M_1}} \tag{19}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k(M_1 + M_2)}{M_1 M_2}}$$
(20)

由此可知:能够影响局域共振骨料等效质量或等效刚度的材料和结构参数,均对局域共振带隙的起 始频率产生影响;同时,能够影响局域共振骨料等效质量、等效刚度或基体等效质量的材料和结构参数, 均对局域共振带隙的截止频率产生影响。

3 带隙特征影响因素分析

为了更加深入探究局域共振型超材料混凝土的带隙特征,本文讨论不同参数对超材料混凝土带隙 特征的影响,以加深对此共振结构消波机理的认识,用于指导超材料混凝土的结构设计及材料选择。

3.1 涂层弹性模量对带隙的影响

由式(19)和(20)可知,涂层弹性模量会对等效刚度产生较大的影响。为研究不同涂层材料对带隙 特征的影响,在保证其他参数不变的情况下,仅改变涂层弹性模量。现选取单胞的边长 *L*=20 cm,芯柱的 边长 *b*=10 cm,软涂层厚度 *t*=1 cm,芯柱材料为铅(Pb,密度为 11.6 Mg/m³),基体材料为砂浆(密度为 2 Mg/m³)。涂层材料的相关参数参考文献 [23]。

图 5 给出了涂层弹性模量对带隙特征的影响。从图中可以看出,随着涂层弹性模量的增大,带隙起始频率、截止频率及宽度均增大。根据前文所述,带隙起始频率对应骨料自振,带隙截止频率对应骨料和基体相对某平衡位置产生共振,涂层起到弹簧的作用,涂层弹性模量越大,等效刚度越大,频率越高。当涂层的弹性模量越大,等效刚度越大,频率越高。当涂层的弹性模量为 0.2 MPa 时,其对应的带隙起始频率、截止频率和宽度分别为 20.91、36.69 和 15.78 Hz;当涂层的弹性模量为 1.0 MPa时,其对应的带隙起始频率、截止频率和宽度分别为 46.75、82.04 和 35.29 Hz。可见,柔性的涂层能够形成低频带隙,但是带隙宽度较窄,而高弹性模量涂层能够形成



Fig. 5 Effects of coating elastic modulus on band gap

较宽的带隙,但带隙起始频率较高。因此,可以根据所需衰减的波的频率进行涂层材料的选择。对于用 作防止爆炸等高频载荷的材料,超材料混凝土必须在高频下展现共振行为,应选择高弹性模量的涂层材 料。对于用作防止地震等低频荷载的材料,超材料混凝土必须在低频下展现共振行为,应选择低弹性模 量的涂层材料。

3.2 芯柱密度对带隙的影响

由式(19)和(20)可知, 芯柱密度会对等效质量 *M*₁产生较大影响, 因此, 需要进一步研究芯柱密度对 带隙特征的影响。采用 3.1 节的几何尺寸, 涂层材料选择 silicone(弹性模量为 1 MPa), 芯柱材料选择铝、 钢、铜和铅, 其对应的密度分别为 2.7、7.9、8.89 和 11.6 Mg/m^{3[22]}。

图 6 给出了带隙特征随芯柱密度变化的曲线。从图 6 可以看出,随着芯柱密度的增大,带隙起始频率和截止频率均降低且带隙起始频率降低的速度较快,从而带隙宽度增大。当芯柱材料为 Al 时,带隙起始频率、截止频率和宽度分别为 96.91、118.05 和 21.14 Hz;当芯柱材料为 Pb 时,带隙起始频率、截止频率和宽度分别为 46.75、82.04 和 35.29 Hz。可见,高密度芯柱材料能够形成低频带隙,且带隙宽度较

击

大,而低密度芯柱材料更容易形成高频带隙,且 带隙宽度较低。因此,若需要得到低频、宽带隙 等特征,应选择密度较高的芯柱材料。

3.3 基体密度对带隙的影响

由式(19)和(20)可知,基体密度会对等效质量 M₂产生影响,因此,需要进一步研究基体密度 对带隙特征的影响。采用 3.1 节的几何尺寸,涂 层材料选择 silicone(弹性模量为 1 MPa),芯柱材 料选择 Pb(密度为 11.6 Mg/m³)。

图 7 给出了带隙特征随基体密度变化的曲 线。从图 7 可以看出,随着基体密度的增大,带 隙起始频率保持不变,带隙截止频率和宽度持续 减小。主要原因是:带隙起始频率对应芯柱的自 振,其主要由芯柱等效质量及软涂层等效刚度决 定,基体密度的变化不会影响芯柱的等效质量, 从而带隙起始频率不会产生变化;带隙截止频 率,对应芯柱与基体动态平衡,其主要由芯柱等 效质量、涂层等效刚度和基体等效质量决定,基 体密度的增大会导致基体等效质量增加,从而使 得带隙截止频率持续减小,又因为带隙起始频率 保持不变,最终带隙宽度也会持续减小。因此, 若需要得到低频、宽带隙等特征,应选择密度较 低的基体材料。



3.4 骨料体积占比对带隙的影响

为了解骨料体积占比对带隙特征的影响,对于典型的正方形单元,定义骨料体积占比 $\beta = R^2/a^2$ 。其中, R = b + 2t, b 为芯柱边长, t 为涂层厚度, a 为周期常数。在讨论骨料体积占比对带隙特征的影响时,需要保持参数 $\gamma(\gamma$ 为芯柱边长与软涂层厚度的比值, $\gamma = b/t$)不变。涂层材料选择 silicone(弹性模量为 1 MPa), 芯柱材料选择 Pb(密度为 11.6 Mg/m³),基体密度为 2 Mg/m³, L = 2 cm, $\gamma = 10$ 。

图 8 给出了带隙特征与骨料体积占比(β)的 关系。从图 8 可以看出,带隙起始频率随着 β 的 增大而持续降低,且在 β 从 0.1 到 0.4 时,降低速 度较快,之后降低速度减缓;带隙截止频率随 β 的增大呈现先降低再升高的趋势,其中 β 从 0.1 到 0.4 时,带隙截止频率持续降低,之后,带 隙截止频率随 β 的增大而升高,且在 β 从 0.1 到 0.4 时,带隙起始频率的降低速度大于带隙截止 频率的降低速度,最终带隙宽度随着 β 的增大而 持续增大。因此,可以通过增大骨料体积占比的 方式来实现扩宽带隙的目的。

3.5 芯柱边长与软涂层厚度比对带隙的影响 为了研究参数 γ 对带隙特征的影响,需要保



Fig. 8 Effect of volume fraction of aggregate on band gap when $\gamma=10$

证骨料体积占比β不变。涂层材料选择 silicone (弹性模量为1 MPa),芯柱材料选择 Pb(密度为 11.6 Mg/m³),基体密度为2 Mg/m³, L=2 cm, 骨料 体积占比β=0.36。

图 9 给出了骨料体积占比为 36% 时,参数 γ 对带隙特征的影响。从图 9 可以看出,带隙起 始频率及截止频率均随着 γ 的增大呈现出先减 小再增大的变化趋势,而带隙宽度随着 γ 的增大 而持续增大。其中,带隙起始频率在 γ=2 左右取 得极小值;带隙截止频率在 γ=1 左右取得极小 值。因此,若需要得到宽带隙特征,可以通过增 大参数 γ 来实现。



4.1 有限元模型

为了说明超材料混凝土对冲击波的衰减作用,使用 LS-DYNA 建立如图 10(a)所示的超材料混凝土 有限元模型,其长度为 100 mm,宽度为 60 mm,厚度为 20 mm。整个模型包含 60 000 个单元和 67 771 个 节点,砂浆、软涂层和芯柱均使用八节点的 solid 单元。为了消除边界效应的影响,在上下两个侧面设置 对称性边界条件;为保证混凝土板不发生位移,在前后两个侧面设置固定边界条件^[19]。在模型左侧施加 如图 11 所示冲击波。在保证计算精度的情况下,对模型进行简化。混凝土基体、涂层和芯柱均采用线 弹性材料模型^[23],3种材料之间采用共节点的方式进行连接。同时,为了对比超材料混凝土的优越性能, 建立了如图 10(b)所示的同样条件下的普通混凝土有限元模型。



4.2 超材料混凝土对冲击波的衰减

如图 10 所示,对于超材料混凝土和普通混凝土,均在距离冲击端 20 mm(截面 A-A)、40 mm (B-B 截面)、60 mm(截面 C-C)和 80 mm(截面 D-D)处依次选取 4 个截面,得到各截面的平均应力时程曲线,如图 12 所示。从图 12 可以看出,对于超材料混凝土和普通混凝土,各截面的平均应力均随着时间的增加而降低,但超材料混凝土中的平均应力降低较快。以 1.0 ms 左右为例,超材料混凝土中各截面的平均应力在-0.2~0.2 MPa之间,而普通混凝土中各截面的应力在-0.4~0.4 MPa之间。因此,与普通混凝土相比,超材料混凝土对冲击波具有更好的衰减作用。



击



Fig. 12 Average stress-time curve at each section

5 结 论

借鉴超材料的研究思路,在混凝土中引入谐振骨料,设计出具有消波特性的超材料混凝土,并对其 带隙特征和冲击波衰减效应进行研究,得到以下结论:

(1)低弹性模量的涂层能够形成低频带隙,但是带隙宽度较窄,而高弹性模量涂层能够形成较宽的 带隙,但带隙起始频率较高。因此,应根据所需衰减的波的频率进行涂层材料的选择。

(2)高密度芯柱材料能够形成低频带隙,且带隙宽度较大,而低密度芯柱材料更容易形成高频带隙, 且带隙宽度较小。因此,若需要得到低频、宽带隙等特征,可以选择密度较高的芯柱材料。

(3)基体密度的变化对带隙起始频率没有影响,但基体密度的升高使带隙截止频率降低和带隙宽度 减小。因此,选择低密度的基体材料可以扩宽带隙。

(4)通过增大骨料体积占比和芯柱边长与软涂层厚度比可以实现扩宽带隙的目的。

(5)与普通混凝土相比,超材料混凝土对冲击波具有更好的衰减作用。

参考文献:

- [1] WEGENER M. Metamaterials beyond optics [J]. Science, 2013, 342(6161): 939–940. DOI: 10.1126/science.1246545.
- [2] LANDY N, SMITH D R. A full-parameter unidirectional metamaterial cloak for microwaves [J]. Nature Materials, 2013, 12(1): 25–28. DOI: 10.1038/nmat3476.
- [3] LI B, TAN K T, CHRISTENSEN J. Heat conduction tuning by hyperbranched nanophononic metamaterials [J]. Journal of Applied Physics, 2018, 123(20): 205105. DOI: 10.1063/1.5023487.
- [4] LI B, TAN K T, CHRISTENSEN J. Tailoring the thermal conductivity in nanophononic metamaterials [J]. Physical Review B, 2017, 95(14): 144305. DOI: 10.1103/PhysRevB.95.144305.
- [5] WANG Y Z, LI F M, WANG Y S. Influences of active control on elastic wave propagation in a weakly nonlinear phononic crystal with a monoatomic lattice chain [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 106: 357–362. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2015.12.004.
- [6] BANERJEE B, NAGY P B. An introduction to metamaterials and waves in composites [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2012, 131(2): 1665. DOI: 10.1121/1.3672699.
- [7] AL BA'BA'A H B, NOUH M. Mechanics of longitudinal and flexural locally resonant elastic metamaterials using a structural power flow approach [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 122: 341–354. DOI: 10.1016/j.ijmecsci. 2017.01.034.
- [8] LIU X N, HU G K, HUANG G L, et al. An elastic metamaterial with simultaneously negative mass density and bulk modulus [J]. Applied Physics Letters, 2011, 98(25): 251907. DOI: 10.1063/1.3597651.
- [9] LI J, CHAN C T. Double-negative acoustic metamaterial [J]. Physical Review E, 2004, 70(5): 055602(R). DOI:

10.1103/PhysRevE.70.055602.

- [10] LIU Z Y, ZHANG X X, MAO Y W, et al. Locally resonant sonic materials [J]. Science, 2000, 289(5485): 1734–1736. DOI: 10.1126/science.289.5485.1734.
- [11] LIU Z Y, CHAN C T, SHENG P, et al. Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects: theory and experiment [J]. Physical Review B, 2000, 62(4): 2446–2457. DOI: 10.1103/PhysRevB.62.2446.
- [12] LIU Z Y, CHAN C T, SHENG P. Three-component elastic wave band-gap material [J]. Physical Review B, 2002, 65(16): 165116. DOI: 10.1103/PhysRevB.65.165116.
- [13] LIU Z Y, CHAN C T, SHENG P. Analytic model of phononic crystals with local resonances [J]. Physical Review B, 2005, 71(1): 014103. DOI: 10.1103/PhysRevB.71.014103.
- [14] YANG Z, DAI H M, CHAN N H, et al. Acoustic metamaterial panels for sound attenuation in the 50–1 000 Hz regime [J]. Applied Physics Letters, 2010, 96(4): 041906. DOI: 10.1063/1.3299007.
- [15] YANG Z, MEI J, YANG M, et al. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass [J]. Physical Review Letters, 2008, 101(20): 204301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.204301.
- [16] 吴健, 白晓春, 肖勇, 等. 一种多频局域共振型声子晶体板的低频带隙与减振特性 [J]. 物理学报, 2016, 65(6): 064602.
 DOI: 10.7498/aps.65.064602.
 WU J, BAI X C, XIAO Y, et al. Low frequency band gaps and vibration reduction properties of a multi-frequency locally

resonant phononic plate [J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(6): 064602. DOI: 10.7498/aps.65.064602. [17] 张印, 尹剑飞, 温激鸿, 等. 基于质量放大局域共振型声子晶体的低频减振设计 [J]. 振动与冲击, 2016, 35(17): 26–32. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2016.17.005. ZHANG Y, YIN J F, WEN J H, et al. Low frequency vibration reduction design for inertial local resonance phononic crystals based on inertial amplification [I] Journal of Vibration and Shock 2016 35(17): 26–32. DOI: 10.13465/j.cnki

based on inertial amplification [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(17): 26–32. DOI: 10.13465/j.cnki. jvs.2016.17.005.

- [18] BRÛLÉ S, JAVELAUD E H, ENOCH S, et al. Experiments on seismic metamaterials: molding surface waves [J]. Physical Review Letters, 2014, 112(13): 133901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.133901.
- [19] 部英杰,范华林,张蓓,等. 超材料消波混凝土板在二维平面波作用下的削波效应研究 [J]. 振动与冲击, 2018, 37(20): 39-44. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2016.17.005.
 GAO Y J, FAN H L, ZHANG B, et al. Wave attenuation of super-material wave absorbing concrete panel subjected to twodimensional plane wave [J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(20): 39-44. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2016.17.005.
- [20] LI Q Q, HE Z C, LI E, et al. Design of a multi-resonator metamaterial for mitigating impact force [J]. Journal of Applied Physics, 2019, 125(3): 035104. DOI: 10.1063/1.5029946.
- [21] HUANG H H, SUN C T, HUANG G L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials [J]. International Journal of Engineering Science, 2009, 47(4): 610–617. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2008.12.007.
- [22] SHENG X, ZHAO C Y, YI Q, et al. Engineered metabarrier as shield from longitudinal waves: band gap properties and optimization mechanisms [J]. Journal of Zhejiang University: Science A: Applied Physics and Engineering, 2018, 19(9): 663–675. DOI: 10.1631/jzus.A1700192.
- [23] MITCHELL S J, PANDOLFI A, ORTIZ M. Metaconcrete: designed aggregates to enhance dynamic performance [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2014, 65: 69–81. DOI: 10.1016/j.jmps.2014.01.003.

(责任编辑 张凌云)