

DOI: 10.11883/bzycj-2019-0398

弹性带形域中多个半圆柱形凹陷对 SH 波的散射*

齐 辉, 杨润杰, 郭 晶, 屈恩相

(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 对稳态 SH (shear horizontal) 导波在表面含有多个半圆柱形凹陷的弹性带形介质内的散射问题进行了研究, 并给出了解析解。首先, 运用导波展开法构造平面 SH 导波; 然后, 利用累次镜像法构造出满足带形域上、下两条直边界应力自由条件的散射波; 最后, 根据凹陷边沿的切应力为零的条件得到定解方程。通过算例分析了累次镜像法的精度、凹陷边沿的动应力集中和上、下边界位移幅值的变化情况。数值结果表明: 只有一个凹陷时, 中高频率的入射波和小厚度的带形域会引起凹陷边沿更高的动应力集中, 上边界位移幅值的最大值会出现在凹陷的迎波面附近; 当有两个凹陷时, 大多数情况下, 第二个凹陷对第一个凹陷边沿的动应力集中起放大作用, 并且在理想弹性带形介质内, 两凹陷之间的影响在相距无穷远时也会存在。

关键词: SH 波; 弹性带形域; 半圆柱形凹陷; 动应力集中; 位移幅值

中图分类号: O343.1; P315.3

国标学科代码: 1301510

文献标志码: A

Scattering of SH wave by multiple semi-cylindrical depressions in an elastic strip

QI Hui, YANG Runjie, GUO Jing, QU Enxiang

(College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, Heilongjiang, China)

Abstract: The scattering of steady-state shear horizontal (SH) guided waves from the elastic strip media with multiple semi-cylindrical depressions on the surface was studied and the analytical solution was given. Firstly, the guided wave expansion method was used to construct SH guided waves. Then, the scattered waves satisfying the zero-stress boundary conditions of the upper and lower surfaces in the strip were constructed by employing the repeated image method. Finally, according to the condition that the shear stress of the edge of the depression is zero, the definite solution equation was derived. The accuracy of repeated image method, the dynamic stress concentration around a depression and the displacement amplitude at the upper and lower boundaries were analyzed by examples. The numerical results show that when there is only one depression, the incident waves with middle and high frequency and the strip with small thickness cause higher dynamic stress concentration around the depression, and the maximum displacement amplitude of the upper boundary occurs near the incident surface of the depression. When there are two depressions, in most cases, the second depression amplifies the dynamic stress concentration around the first depression. And in the ideal elastic strip, even if the two depressions are infinitely far apart, the influence between them still exists.

Keywords: SH wave; elastic strip; semi-cylindrical depression; dynamic stress concentration; displacement amplitude

板类材料作为承重构件被广泛应用于土木和水利等工程领域。在实际使用过程中, 板材表面常会因为外界环境腐蚀或人为因素而受到破坏并产生凹陷。当波在这种结构内传播时, 在凹陷处发生散射,

* 收稿日期: 2019-10-17; 修回日期: 2020-07-02

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(3072019CF0205)

第一作者: 齐 辉(1963—), 男, 博士, 教授, qihui205@sina.com

通信作者: 郭 晶(1980—), 女, 硕士, 讲师, gj3041@126.com

并且引起动应力集中和位移幅值增大,会对材料造成破坏,进而威胁人们的生命安全,因此对该问题的研究尤为重要。

在地震波动领域,凹陷作为一种常见的地形,对其已开展了大量的研究: Trifunac^[1]利用波函数展开法分析了半圆柱形峡谷对平面 SH(shear horizontal)波的散射,并给出了地表位移幅值的变化情况。Wong 等^[2]研究了半椭圆柱形凹陷对平面 SH 波的散射,并分析了入射角度和入射波波长对地表位移幅值的影响。Liu 等^[3]将复变函数法引入弹性动力学反平面问题中。随后,借助这种方法,凹陷在均匀介质半空间中的反平面稳态运动得到了系统的研究^[4-7]。Chang 等^[8]采用区域匹配技术研究了平面 SH 波在圆形扇形峡谷中的散射问题,并推导出严格的级数解。Shyu 等^[9]将有限元法与级数展开法相结合,求解了弹性半平面内的两个峡谷对入射平面 SH 波的散射问题。Ba 等^[10]结合区域匹配技术,提出了一种精度高、计算量小的周期性间接边界元法,并研究了地震波作用下层状半空间中周期性冲积河谷的反平面响应。

对于 SH 波在带形域中散射问题的研究: Achenbach^[11]给出了 SH 导波的一般形式。Lu^[12]以连续加筋薄板和钢筋混凝土板的超声检测为背景,分析了周期分布的圆柱形夹杂对 SH 型导波色散特性的影响。Hayir 等^[13]将镜像法拓展为累次镜像法,解决了散射波在带形域上、下边界多次反射带来的求解困难,并得到了带形域中孔洞对 SH 波散射的解析解。近年来,齐辉等^[14]、Qi 等^[15-17]运用和发扬了累次镜像法,研究了压电材料中孔洞和夹杂对 SH 波的散射。注意到以上在带形介质内的研究,都只是对介质内部缺陷的散射问题进行了分析,如孔洞和夹杂,对于表面凹陷的研究还没有看到相关报道,但是这种情况常常出现在工程实践中,如混凝土板表面的排水凹槽、管道线路等。

本文中,将表面存在半圆柱形凹陷的弹性板的反平面问题按照带形域中凹陷对 SH 波的散射问题来近似研究。运用波函数展开法、导波展开法、累次镜像法和多级坐标平移技术对该问题进行理论分析;再通过编程进行数值计算;最后通过算例,分析凹陷边沿的动应力集中和带形域边界位移幅值的变化。

1 理论分析

1.1 问题的描述

如图 1 所示,无限长带形域的厚度为 h ,上边界为 B_u ,下边界为 B_l ,其中上边界存在 g 个半圆柱形凹陷,凹陷的圆心分别为 $O_1, O_2, \dots, O_j, \dots, O_g$,半径分别为 $r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_g$;介质的剪切模量和密度分别为 μ 和 ρ 。分别以各个圆心 $O_1, O_2, \dots, O_j, \dots, O_g$ 为原点建立右手平面直角坐标系 $(O_1, x_1, y_1), (O_2, x_2, y_2), \dots, (O_j, x_j, y_j), \dots, (O_g, x_g, y_g)$,其中 x 轴平行带形域的长度方向, y 轴平行厚度方向;同时以圆心为极点,建立平面极坐标系 $(O_1, r_1, \theta_1), (O_2, r_2, \theta_2), \dots, (O_j, r_j, \theta_j), \dots, (O_g, r_g, \theta_g)$;引入复变量 $z_j = x_j + iy_j = re^{i\theta_j}$, $\bar{z}_j = x_j - iy_j = re^{-i\theta_j}$,其中 $i = \sqrt{-1}$,建立复平面 $(z_j, \bar{z}_j), j=1, 2, 3, \dots, g$ 。本文中对上述二维模型进行分析,假定从带形域左侧入射的 SH 波为平面波,由凹陷产生的散射波为柱面波,质点的振动方向为出平面方向,振幅 w 只是坐标 (O, x, y) 或 (O, r, θ) 的函数。

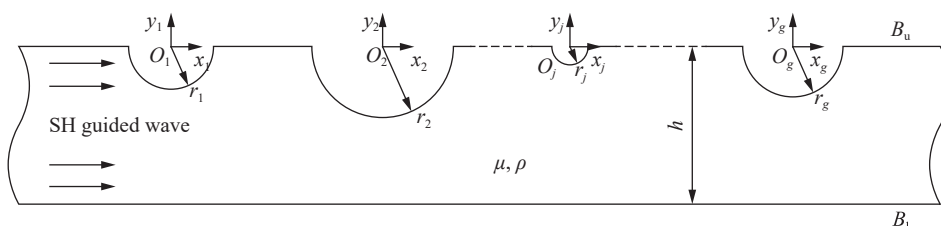


图 1 弹性带形域中的半圆柱形凹陷

Fig. 1 Semi-cylindrical depressions in an elastic strip

1.2 控制方程

弹性动力学反平面问题的控制方程为标量波动方程:

$$\mu \Delta w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

式中: Δ 是二维 Laplace 算子。本文中对稳态 SH 波进行分析, 按分离变量法, 分离空间变量与时间变量后, 略去时间谐和因子 $e^{-i\omega t}$, ω 为圆频率, 得到 Helmholtz 方程, 即位移的控制方程:

$$\Delta w + k^2 w = 0 \tag{2}$$

式中: $k = \omega/c_s$ 为反平面剪切波的波数, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 为相速度。

在复平面内, Helmholtz 方程以及应力应变的关系可以表示为:

$$4 \frac{\partial w}{\partial z \partial \bar{z}} + k^2 w = 0 \tag{3}$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ \tau_{yz} = \mu i \left[\frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial z} - \frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right] \\ \tau_{yz} = \mu i \left[\frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial w(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right] \end{cases} \tag{5}$$

1.3 入射波

在带形域上边界 B_u 的任意一点建立全局坐标系。根据文献 [11], 满足带形域上、下边界应力自由条件 (6) 的 SH 导波表达式为式 (7)。

$$\mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-h,0} = 0 \tag{6}$$

$$w_m = f_m(y) e^{i(k_m x - \omega t)} \tag{7}$$

式中: $f_m(y)$ 为 y 方向的干涉项, 满足式 (8); $e^{i(k_m x - \omega t)}$ 为 x 方向上的传播项; m 为导波阶数, 其物理意义为 y 轴方向上干涉项的节点数, 如图 2 所示; $w_m^{(1)}$ 和 $w_m^{(2)}$ 为对应传播型导波的幅值, m 为偶数时 $w_m^{(1)}=0$, m 为奇数时 $w_m^{(2)}=0$; q_m 满足式 (9); k_m 为 x 轴方向上的视波数, 与 y 方向上的视波数 q_m 满足方程 (10), 只有当 k_m 为实数时, $e^{i(k_m x - \omega t)}$ 才能代表 x 轴方向上传播的行波, 考虑本文中所讨论的问题, 对非传播型波的研究没有任何意义, 所以当入射 m 阶 SH 导波时, 要求波数应满足 $k > m\pi/h$ 。

$$f_m(y) = w_m^{(1)} \sin \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] + w_m^{(2)} \cos \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] \tag{8}$$

$$q_m = \frac{m\pi}{h} \tag{9}$$

$$q_m^2 = k^2 - k_m^2 \tag{10}$$

运用叠加法, 将各阶导波进行叠加, 就可以得到带形介质中满足上、下边界应力自由的全部位移波:

$$w^{(i)} = \sum_{m=0}^{+\infty} w_m = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m(y) e^{i(k_m x - \omega t)} \tag{11}$$

本文中讨论的为稳态 SH 波, 略去时间谐和

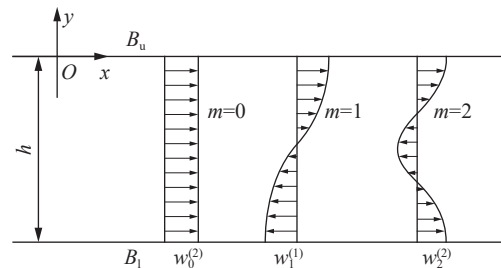


图 2 SH 型导波的振型

Fig. 2 Vibration modes of SH guided waves

因子 $e^{-i\omega t}$, 当入射的导波为 m 阶时, 位移和应力的表达式如下:

$$w^{(i)} = \left\{ w_m^{(1)} \cdot \sin \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] + w_m^{(2)} \cdot \cos \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] \right\} \cdot e^{ik_m x} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz}^{(i)} = i\mu k_m \cdot \left\{ w_m^{(1)} \cdot \sin \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] + w_m^{(2)} \cdot \cos \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] \right\} \cdot e^{ik_m x} \\ \tau_{yz}^{(i)} = q_m \left\{ w_m^{(1)} \cdot \cos \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] - w_m^{(2)} \cdot \sin \left[q_m \left(y + \frac{h}{2} \right) \right] \right\} \cdot e^{ik_m x} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(i)} = \tau_{xz}^{(i)} \cos \theta + \tau_{yz}^{(i)} \sin \theta \\ \tau_{\theta z}^{(i)} = -\tau_{xz}^{(i)} \sin \theta + \tau_{yz}^{(i)} \cos \theta \end{cases} \quad (14)$$

式中: 上标 (i) 代表入射波。

1.4 散射波

在入射 SH 波的作用下, 凹陷会产生散射波。本文运用累次镜像法, 以第 j 个半圆柱形凹陷为例, 对其产生的散射波进行推导说明, 其余 $g-1$ 个凹陷产生的散射波可以通过同样的方法进行求解。

将半圆柱形凹陷 B_j 向介质外延拓为一个整圆, 记为圆孔 \overline{B}_j , 如图 3 所示。按照波函数展开法和复变函数法可得, 由第 j 个圆孔边界 \overline{B}_j 产生的全空间散射波的位移 $w_j^{(s,0)}$ 和应力 $\tau_{j,rz}^{(s,0)}$ 、 $\tau_{j,\theta z}^{(s,0)}$ 满足^[3]:

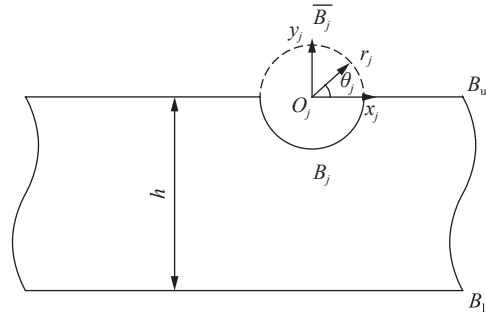


图 3 延拓后的第 j 个凹陷
Fig. 3 The j -th depression after extension

$$w_j^{(s,0)}(z_j) = w_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} H_n^{(1)}(k|z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^n \quad (15)$$

$$\tau_{j,rz}^{(s,0)}(z_j) = \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_j|) \cdot \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-1} e^{i\theta_j} - H_{n+1}^{(1)}(k|z_j|) \cdot \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+1} e^{-i\theta_j} \right] \quad (16)$$

$$\tau_{j,\theta z}^{(s,0)}(z_j) = \frac{ik\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_j|) \cdot \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-1} e^{i\theta_j} + H_{n+1}^{(1)}(k|z_j|) \cdot \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+1} e^{-i\theta_j} \right] \quad (17)$$

第 j 个圆孔边界 \overline{B}_j 产生的散射波 $w_j^{(s,P)}$ 在带形域的边界 B_u 和 B_l 上分别发生第一次反射, 该反射波可以用散射波 $w_j^{(s,0)}$ 对边界 B_u 和 B_l 的镜像 $w_{j,1}^{(s,1)}$ 、 $w_{j,2}^{(s,1)}$ 来表示, 称为一次镜像散射波, 如图 4 所示; 第一次反射波又会在带形域的边界 B_u 和 B_l 上分别发生第二次反射, 该反射波可以用第一次镜像散射波 $w_{j,1}^{(s,1)}$ 、 $w_{j,2}^{(s,1)}$ 对边界 B_u 和 B_l 的镜像 $w_{j,1}^{(s,2)}$ 、 $w_{j,2}^{(s,2)}$ 来表示, 称为二次镜像散射波, 如图 5 所示; 如此反复, 得到第 j 个圆孔边界 B_j 的第 P 次镜像散射波的位移为 $w_{j,1}^{(s,P)}$ 和 $w_{j,2}^{(s,P)}$, 相对应的应力为 $\tau_{j,rz,1}^{(s,P)}$ 、 $\tau_{j,\theta z,1}^{(s,P)}$ 、 $\tau_{j,rz,2}^{(s,P)}$ 、 $\tau_{j,\theta z,2}^{(s,P)}$, 满足式 (18)~(23)。其中第一个上标 (s) 表示散射波, 最后一个上标 (P) 为镜像次数, 第一个下标 j 表示为该散射场由第 j 个凹陷产生, 最后一个下标 1 或 2 代表镜像面为 B_u 或 B_l 。

$$w_{j,1}^{(s,P)}(z_j) = w_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} H_n^{(1)}(k|z_{j,1}^{(P)}|) \left(\frac{z_{j,1}^{(P)}}{|z_{j,1}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P n} \quad (18)$$

$$\tau_{j,rz,1}^{(s,P)}(z_j) = \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_{j,1}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,1}^{(P)}}{|z_{j,1}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P (n-1)} e^{(-1)^P i\theta_j} - H_{n+1}^{(1)}(k|z_{j,1}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,1}^{(P)}}{|z_{j,1}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P (n+1)} e^{(-1)^{P+1} i\theta_j} \right] \quad (19)$$

$$\tau_{j\theta z,1}^{(s,P)}(z_j) = (-1)^P \frac{i k \mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_{j,1}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,1}^{(P)}}{|z_{j,1}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P(n-1)} e^{(-1)^P i \theta_j} + H_{n+1}^{(1)}(k|z_{j,1}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,1}^{(P)}}{|z_{j,1}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P(n+1)} e^{(-1)^{P+1} i \theta_j} \right] \quad (20)$$

$$w_{j,2}^{(s,P)}(z_j) = w_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} H_n^{(1)}(k|z_{j,2}^{(P)}|) \left(\frac{z_{j,2}^{(P)}}{|z_{j,2}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P n} \quad (21)$$

$$\tau_{jrz,2}^{(s,P)}(z_j) = \frac{k \mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_{j,2}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,2}^{(P)}}{|z_{j,2}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P(n-1)} e^{(-1)^P i \theta_j} - H_{n+1}^{(1)}(k|z_{j,2}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,2}^{(P)}}{|z_{j,2}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P(n+1)} e^{(-1)^{P+1} i \theta_j} \right] \quad (22)$$

$$\tau_{j\theta z,2}^{(s,P)}(z_j) = (-1)^P \frac{i k \mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{j,n} \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_{j,2}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,2}^{(P)}}{|z_{j,2}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P(n-1)} e^{(-1)^P i \theta_j} + H_{n+1}^{(1)}(k|z_{j,2}^{(P)}|) \cdot \left(\frac{z_{j,2}^{(P)}}{|z_{j,2}^{(P)}|} \right)^{(-1)^P(n+1)} e^{(-1)^{P+1} i \theta_j} \right] \quad (23)$$

式中:

$$z_{j,1}^{(P)} = z_j - s_{j,1}^{(P)}, \quad z_{j,2}^{(P)} = z_j - s_{j,2}^{(P)} \quad (24)$$

$$s_{j,1}^{(P)} = i h_{j,1}^{(P)}, \quad s_{j,2}^{(P)} = -i(h + h_{j,2}^{(P)}) \quad (25)$$

$$h_{j,1}^{(P)} = \frac{(-1)^P h + h}{2} + (P-1)h \quad (26)$$

$$h_{j,2}^{(P)} = \frac{(-1)^{P+1} h + h}{2} + (P-1)h \quad (27)$$

式(15)~(23)中 $H_{n-1}^{(1)}(\bullet)$ 、 $H_n^{(1)}(\bullet)$ 和 $H_{n+1}^{(1)}(\bullet)$ 分别为 $n-1$ 、 n 和 $n+1$ 阶的第一类 Hankel 函数,由其表示的波函数为向外传播的散射波。

运用叠加法,将每次镜像得到的散射波累加在一起,即可得到第 j 个圆孔 \bar{B}_j 产生的可满足带形域上、下边界应力自由的散射波的位移场为式(28),应力场为式(29)~(30)。

$$w_j^{(s)}(z_j) = w_j^{(s,0)}(z_j) + \sum_{P=1}^{+\infty} [w_{j,1}^{(s,P)}(z_j) + w_{j,2}^{(s,P)}(z_j)] \quad (28)$$

$$\tau_{jrz}^{(s)}(z_j) = \tau_{jrz}^{(s,0)}(z_j) + \sum_{P=1}^{+\infty} [\tau_{jrz,1}^{(s,P)}(z_j) + \tau_{jrz,2}^{(s,P)}(z_j)] \quad (29)$$

$$\tau_{j\theta z}^{(s)}(z_j) = \tau_{j\theta z}^{(s,0)}(z_j) + \sum_{P=1}^{+\infty} [\tau_{j\theta z,1}^{(s,P)}(z_j) + \tau_{j\theta z,2}^{(s,P)}(z_j)] \quad (30)$$

1.5 定解条件

按照上述方法构造的入射波和散射波已经满足了 B_u 和 B_l 边界的剪应力为零的条件,这样凹陷边界 B_1 、 B_2 、 \dots 、 B_j 、 \dots 、 B_g 上应力自由的条件就成为整个问题的定解条件,由此得到关于散射波的波函数级数的系数 $A_{1,n}$ 、 $A_{2,n}$ 、 \dots 、 $A_{j,n}$ 、 \dots 、 $A_{g,n}$ 的方程组(31)。对方程组中第 j 个式子,先利用文献[5]中的坐标平移技术将其他坐标系下求解出的应力表达式平移到复平面 (z_j, \bar{z}_j) 中,再采用 Fourier 展开法,对方程式两端同时乘 $e^{-im\theta_j}$,并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分,这样就得到关于系数 $A_{1,n}$ 、 $A_{2,n}$ 、 \dots 、 $A_{j,n}$ 、 \dots 、 $A_{g,n}$ 的无穷代数方程组,最后对其截断有限项进行求解。

$$\tau_{rz}^{(i)}(z_j) + \sum_{i=1}^g \tau_{rz}^{(s)}(z_i) = 0 \quad z_j \in B_j \quad (31)$$

式中: $j=1, 2, 3, \dots, g$ 。

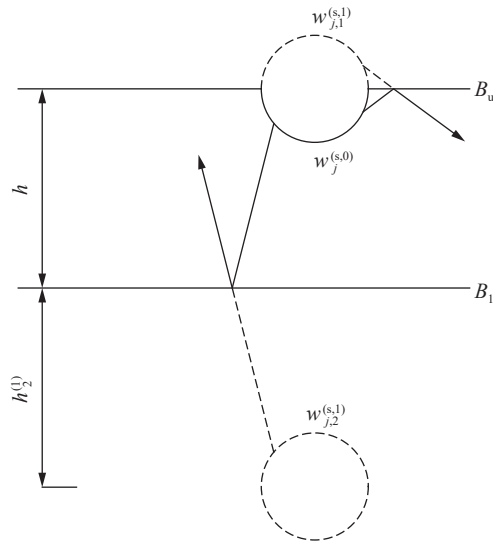


图 4 第一次镜像散射波

Fig. 4 The first image scattered wave

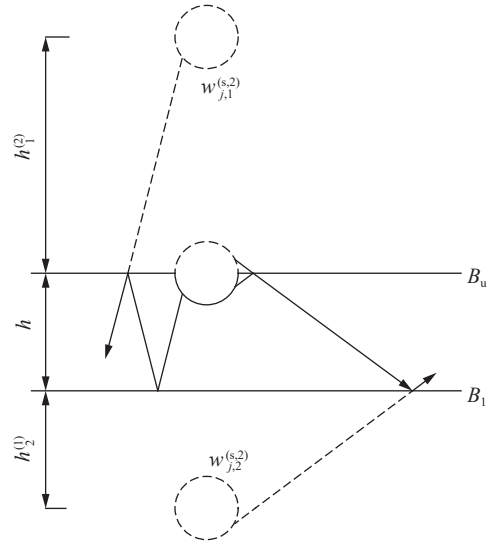


图 5 第二次镜像散射波

Fig. 5 The second image scattered wave

1.6 动力集中系数和位移幅值

在稳态 SH 波作用下, 动力集中系数(dynamic stress concentration factor, DSCF)表征了动力集中的程度, 是一个重要的指标。第 j 个凹陷边沿的动力集中系数:

$$\tau^* = \frac{|\tau_{j,\theta z}|}{|\tau_0|} \tag{32}$$

式中: $\tau_{j,\theta z}$ 为第 j 个凹陷边沿的角向应力, $\tau_0 = \mu k w_0$ 为入射导波的最大剪应力幅值, w_0 为入射导波的最大位移幅值。

对于地震工程、抗暴工程和检测工程, 关心的是观测点的位移值。因此, 本文中给出弹性带形域上下表面的无量纲位移:

$$w^* = \frac{|w^{(i)} + w_1^{(s)} + w_2^{(s)} + \dots + w_j^{(s)} + \dots + w_g^{(s)}|}{|w_0|} \tag{33}$$

式中: $w^{(i)}$ 为入射波产生的位移, $w_j^{(s)}$ 为第 j 个凹陷产生的散射波位移。

2 方法验证

首先, 对带形域上表面有一个凹陷的模型进行研究, 令 $h^* = h/r_1 = 10^6$ (退化半空间), 入射 0 阶 SH 导波。图 6 给出了带形域上边界位移幅值 w 随 $\eta = kr_1/\pi$ 的变化规律, 与文献 [1] 中给出的半空间中半圆柱形峡谷对平面 SH 波散射时表面位移幅值相比, 本文中得到的结果为文献 [1] 中 (见图 7) 的一半。由于平面 SH 波在半空间中传播时, 遇到水平面发生反射, 会造成位移幅值的翻倍, 因此可以验证本文方法的正确性。

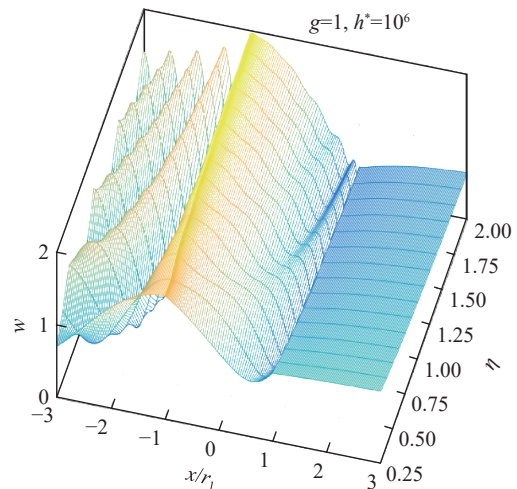


图 6 带形域上边界的位移幅值

Fig. 6 Displacement amplitude of upper boundary

3 计算结果与讨论

本节对 SH 导波入射时, 带形域上边界最多存在两个凹陷的模型进行分析, 用 g 表示凹陷的个数, 当 $g=2$ 时, 如图 8 所示。引入以下无量纲参数:

- (1) 入射波的无量纲波数 $k^*=kr_1$;
- (2) 入射波波长 λ 与凹陷直径 $2r_1$ 的比值 $\lambda^*=\lambda/(2r_1)$;
- (3) 2 号凹陷的无量纲半径 $r^*=r_2/r_1$;
- (4) 两凹陷之间的无量纲距离 $a^*=a/r_1$;
- (5) 带形域的无量纲厚度 $h^*=h/r_1$ 。

根据 $\lambda = 2\pi/k$ 可得 $\lambda^* = \pi/k^*$ 。当 $k^* = 0.1$ 时, $\lambda^* = 10\pi$, 此时入射波的波长远大于凹陷的直径; 当 $k^* = 1$ 和 $k^* = 2$ 时, $\lambda^* = \pi$ 和 $\pi/2 > 1$, 入射波的波长大于凹陷的直径; 当 $k^* = 4$ 时, $\lambda^* = \pi/4 < 1$, 入射波的波长小于凹陷的直径。

3.1 精度分析

凹陷边缘为自由边界, 满足应力分量 $\tau_{yz}=0$, 其数值计算的精度与柱函数级数的截断项数 n 有关, 详见文献 [7]。带形域的上边界 B_u 、下边界 B_l 也是自由边界, 满足应力分量 $\tau_{yz}=0$, 本文中用无量纲应力分量 τ_{yz}^* 来评估数值计算的精度:

$$\tau_{yz}^* = \left| \frac{\tau_{yz}}{\tau_0} \right| \quad (34)$$

式中: τ_{yz} 为 y 方向的应力分量, $\tau_0 = \mu k w_0$ 为入射应力的最大幅值。

根据前文的理论分析可知: 造成 τ_{yz} 不为零的主要原因是对于累次镜像次数 P 的截断。图 9 给出了带形域的上边界存在一个凹陷, 0 阶导波入射, $h^*=10, k^*=2, P$ 为 10、50、100、500 时, 无量纲应力 τ_{yz}^* 在带形域下边界的分布情况。可以看出, 当 P 一定时, τ_{yz}^* 的值在下边界 $(-5r_1 \sim 5r_1)$ 为一条斜率接近 0 的直线。这说明, 当镜像次数一定时, 下边界每一点的精度几乎相同。图 10 给出相同条件下, 下边界 $x_1=0, y_1=$

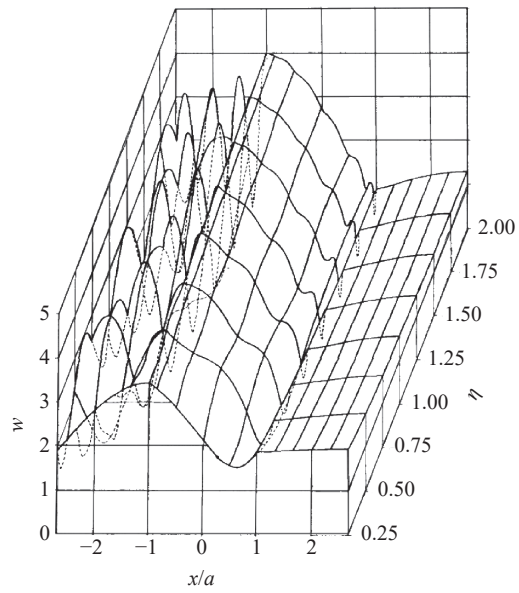


图 7 文献 [1] 中地表位移幅值

Fig. 7 Amplitude of surface displacement in reference [1]

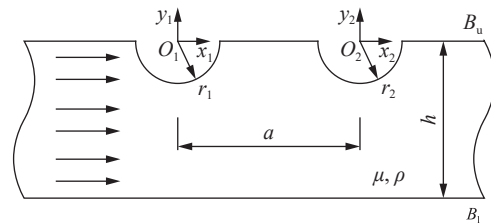


图 8 弹性带形域上边界存在两半圆柱形凹陷

Fig. 8 Two semi-cylindrical depressions on the upper boundary of the elastic strip

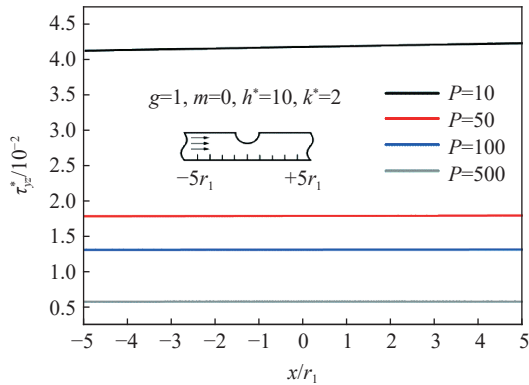


图 9 下边界 τ_{yz}^* 的变化

Fig. 9 Variation of τ_{yz}^* in the lower boundary

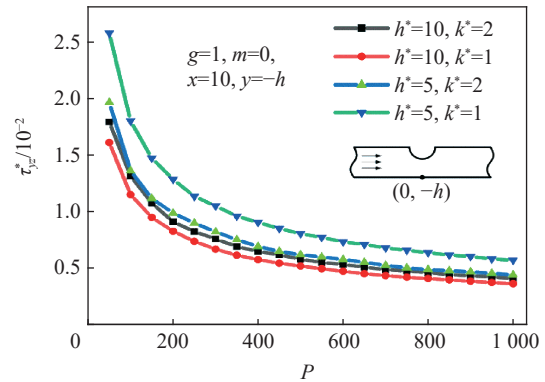


图 10 下边界一点处的 τ_{yz}^* 随 P 的变化规律

Fig. 10 Variation of τ_{yz}^* at a certain point in the lower boundary with P

$-h$ 点的 τ_{yz}^* 随 P 的变化规律。从图 10 中可以看出,随着 P 增加, τ_{yz}^* 的值逐渐减小,曲线的斜率也越来越小。这说明: P 越大,精度越高,但过度增大 P 会降低提升精度的效率。同时, P 越大,求解时间也会增长。因此,应该适当选取累次镜像次数 P 。

图 11 给出带形域的上边界存在一个凹陷, 0 阶导波入射, $h^*=10, k^*=2$, 凹陷边沿 $\theta=-45^\circ, -90^\circ, -135^\circ$ 处的 DSCF 随镜像次数 P 的变化曲线。图 12 给出相同条件下, 下边界 $x_1=1, 0, -1$ 点的无量纲位移幅值 w^* 随 P 的变化规律。可以看出, 两组曲线都是振荡衰减的。当 $P=800$ 时, w^* 已经收敛为定值, DSCF 曲线的振幅也明显减小。同时, 根据图 10 可知: 当 $P=800$ 时, 精度 τ_{yz}^* 小于 10^{-2} 。因此, 下文求解过程中取 $P=800$ 。

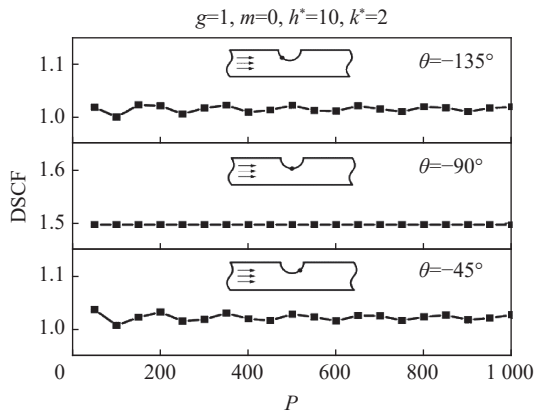


图 11 凹陷边沿动应力集中系数随镜像次数的变化规律

Fig. 11 Variation of dynamic stress concentration factor around the depression with P

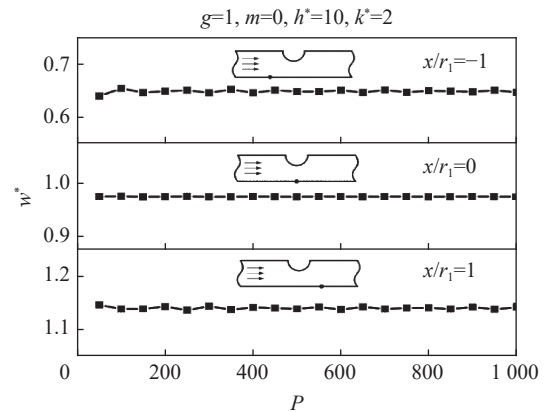


图 12 下边界 w^* 随镜像次数 P 的变化规律

Fig. 12 Variation of w^* in the lower boundary with P

3.2 动应力集中

3.2.1 带形域厚度的影响

图 13 给出了带形域的上边界存在一个凹陷, 0 阶 SH 导波作用下, 无量纲波数 $k^*=0.1, 1.0, 2.0$ 和 4.0 时, 在凹陷边沿 $\theta=-45^\circ, -90^\circ$ 和 -135° 处的 DSCF 随带形域的无量纲厚度 h^* 的变化规律。当 $k^*=0.1$ 时, DSCF 随 h^* 的增大先迅速减小, 后保持不变。当 $k^*=1.0, 2.0$ 和 4.0 时, DSCF 随 h^* 的增大呈振荡性和收敛性, 这种趋势在 $\theta=90^\circ$ 处最明显。并且, DSCF 曲线的波峰按厚度方向重复出现的最小距离与入射波的频率有关, 频率越大, 震荡周期越小。

图 14 给出了带形域的上边界存在一个凹陷, 0 阶 SH 导波入射, k^* 为 $0.1, 1.0, 2.0, 4.0, h^*$ 为 $1.5, 3.0, 5.0, 10.0$ 时, 凹陷边沿的动应力分布。当 $k^*=0.1$ 时, 凹陷边沿 DSCF 曲线形状均为规则的圆形或椭圆形, 在 $h^*=1.5$ 时, 下边界对分布图有明显吸引作用, 而在 $h^*>1.5$ 时, 带形域厚度对凹陷边沿的 DSCF 分布影响较小。相比之下, 当 $k^*=1.0, 2.0$ 和 4.0 时, 随着 h^* 的改变, DSCF 曲线形状变化十分明显。所以, 当入射中高频 SH 导波时, 带形域的厚度对凹陷边沿的 DSCF 分布影响更大。

3.2.2 入射波频率的影响

图 15 给出了带形域的上边界存在一个凹陷, 0 阶 SH 导波入射, $h^*=5.0$ 和 $20.0, k^*$ 为 $0.1, 1.0, 2.0$ 和 4.0 时, 凹陷边沿的动应力分布情况。从两个图中可以看, 当 $k^*=0.1$ 时, 入射波的波长远大于凹陷的直径, 凹陷边沿的动应力分布为圆形, 与静力作用下的相同, 此时为低频准静态。当 $k^*=1.0$ 时, DSCF 随着角度 θ 的增大先增大再减小, 呈现出比较规则的椭圆形。当 $k^*=2.0$ 时, DSCF 分布图变成蝴蝶形。当 $k^*=4.0$ 时, 入射波的波长小于凹陷的直径, 此时 DSCF 曲线随 θ 的变化呈现出十分不规则的图形。因此, 在带形域中入射波的频率越高, 凹陷边沿 DSCF 曲线变化越强烈。

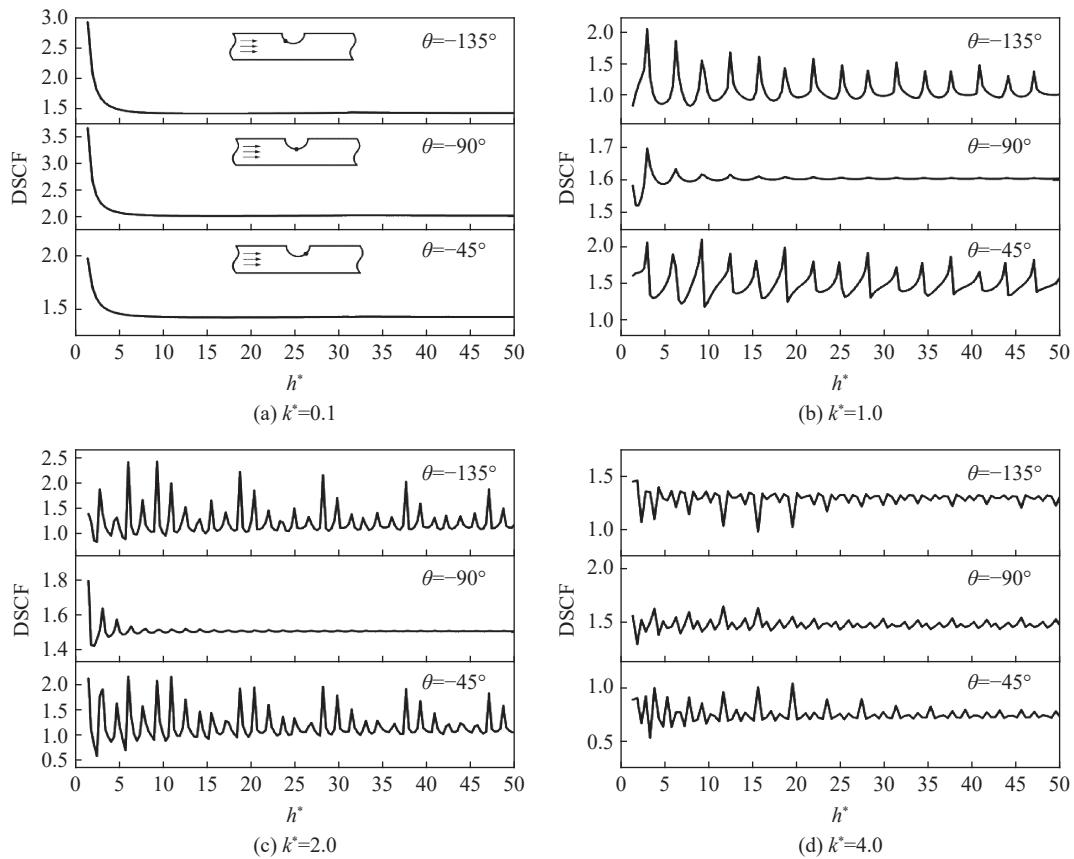


图 13 动应力集中系数随带形域无量纲厚度的变化 ($g=1, m=0$)

Fig. 13 Variation of dynamic stress concentration factor with dimensionless thickness ($g=1, m=0$)

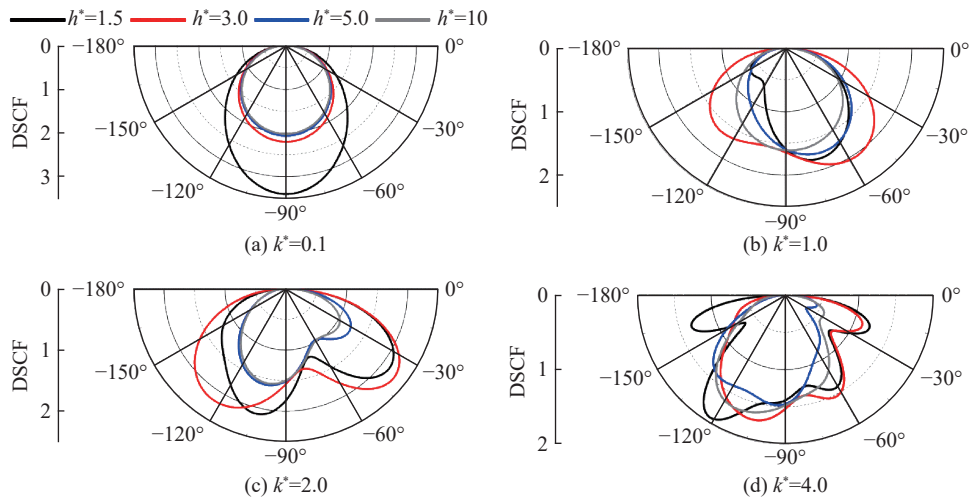


图 14 不同 k^* 时动应力集中系数随角度 θ 变化 ($g=1, m=0$)

Fig. 14 Variation of dynamic stress concentration factor with θ at different k^* ($g=1, m=0$)

图 16 给出了带形域的上边界存在一个凹陷, 0 阶 SH 导波入射, h^* 取不同值时, 凹陷边沿的最大动应力集中系数 (maximum dynamic stress concentration factor, MAX DSCF) 随 k^* 的变化规律。当 h^* 较小时, 曲线在 $k^* > 0.5$ 后会发生波动并出现多个较高的波峰。当 $h^* = 5.0$ 和 7.0 时, MAX DSCF 的最大值都出现在 $k^* = 3.13$ 处, 值为 4.18 和 4.32; 当 $h^* = 10.0$ 时, 在 $k^* = 3.45$ 处, MAX DSCF 取最大值 3.17。当 $h^* > 10.0$ 时, 曲

线虽然也会发生波动,但只出现多个较低的波峰,并且随着 h^* 的增大,曲线震荡幅值越来越小,直到 $h^*=10^6$ 时,曲线变得平滑,最大值发生在低频 $k^*=0.39$ 处,值为 2.10。因此,当带形域的厚度较小时,MAX DSCF 随 k^* 的变化较剧烈,并且最大值会出现在 k^* 的高频区。增大 h^* 可以降低 MAX DSCF 对 k^* 的敏感程度。

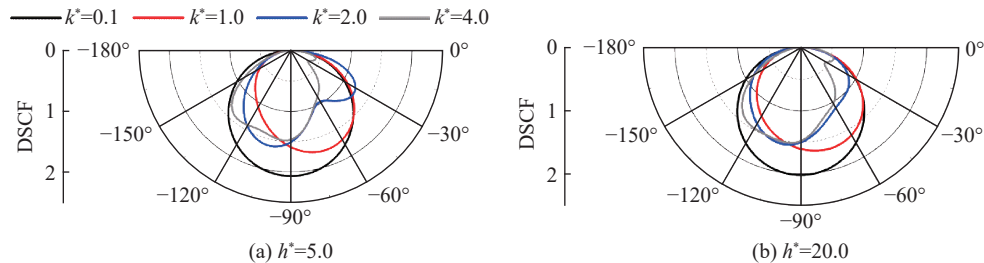


图 15 不同 h^* 时动应力集中系数随角度 θ 的变化 ($g=1, m=0$)

Fig. 15 Variation of dynamic stress concentration factor with θ at different h^* ($g=1, m=0$)

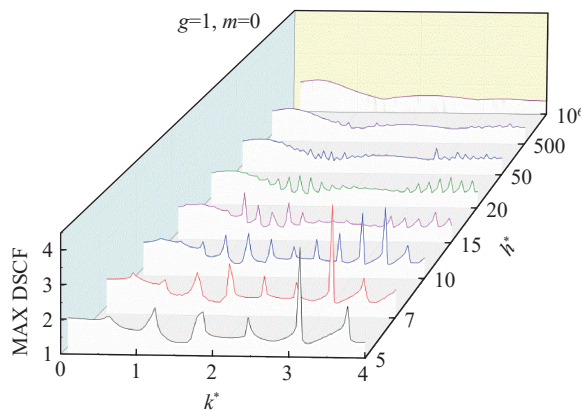


图 16 凹陷边沿最大动应力集中随 k^* 的变化

Fig. 16 Variation of maximum dynamic stress concentration factor with k^* around the depression

3.2.3 两凹陷之间距离的影响

图 17 给出了 0 阶 SH 导波入射,带形域的无量纲厚度 $h^*=10.0, 10^6$ 和无量纲波数 $k^*=0.1, 1.0, 2.0$ 和 4.0 时,凹陷边沿 MAX DSCF 随两个凹陷之间无量纲距离 a^* 的变化规律。图 17(a) 中的黑色线代表带形域的上边界存在两个凹陷时,1 号凹陷边沿的 MAX DSCF 值的变化情况;红色线代表带形域的上边界只有 1 号凹陷时凹陷边沿的 MAX DSCF。可以看出,黑色线的大部分都在红色线的上方,因此大多情况下 2 号凹陷的存在对 1 号凹陷边沿动应力集中有放大作用。

当 $h^*=10, a^*=3 \sim 50$ 时,如图 17(a) 所示,MAX DSCF 曲线随 a^* 的增大只呈现振荡性,无收敛性,这是因为 2 号凹陷产生的散射波会在上、下边界进行多次反射,即使 a^* 较大,散射波的能量也会传到 1 号凹陷处。当 $h^*=10.0, a^* \geq 10^6$ 时(可认为两凹陷相距无穷远),与图 17(a) 相比,曲线已经有收敛趋势但不明显,并且振幅仍然大于 10^{-2} ,这是因为本文中并没有考虑介质黏性对于弹性波衰减的影响。这说明:在理想弹性带形介质内,无论两个凹陷之间的距离有多大,都应考虑它们之间的影响。尽管实际材料大多为黏弹性体,但也应该对工程实践中板内两个或多个凹陷之间的相互作用给予足够的重视。

当 $h^*=10^6$ 时,如图 17(c) ~ (d) 所示,带形域退化成半空间,此时 MAX DSCF 曲线随 a^* 的增大呈现出振荡性和收敛性。当 $a^* \geq 10^6$ 时,曲线上下振荡范围小于 10^{-2} ,这时 2 号凹陷对 1 号凹陷边沿动应力集中系数的影响可以忽略不计,与文献 [5] 中得到结果相同,即两峡谷相距较远时可以作为孤立地形。

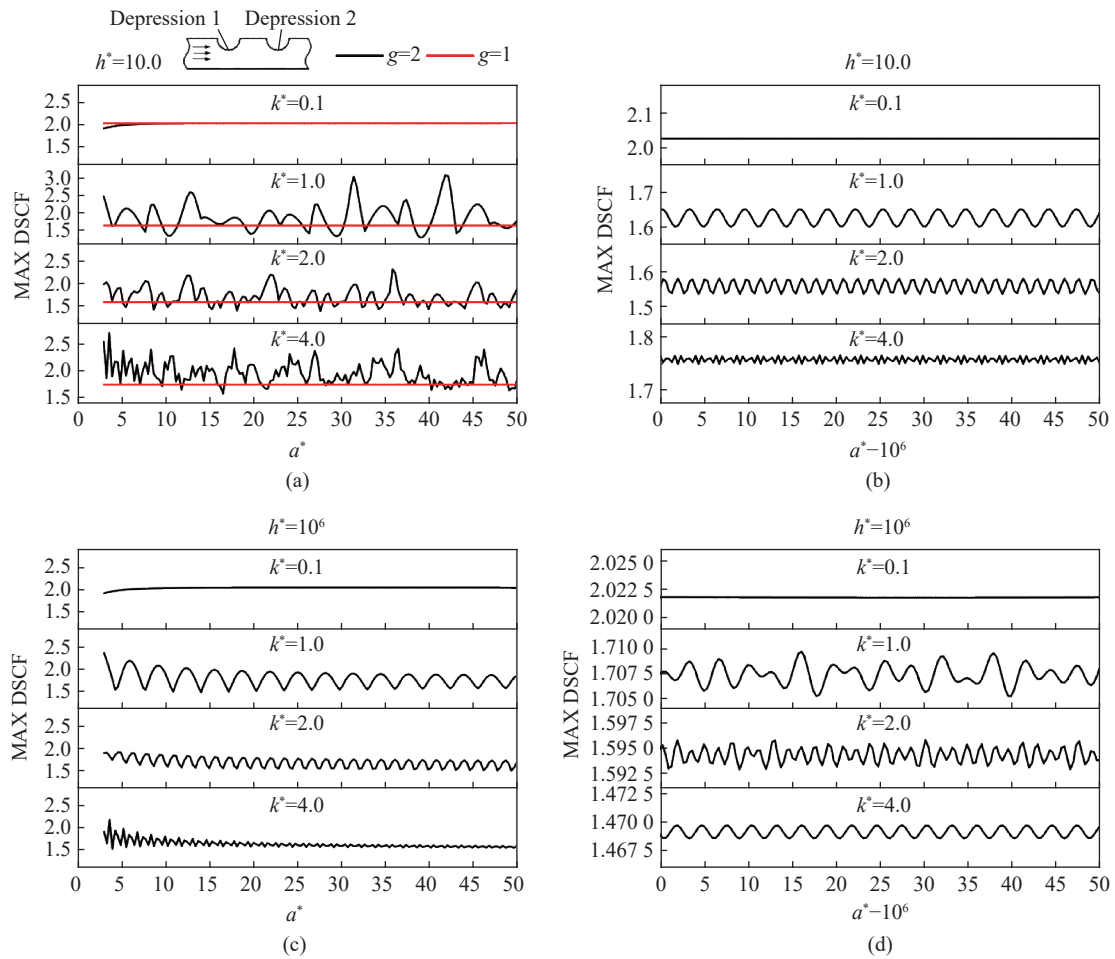


图 17 1号凹陷边沿动应力集中系数的最大值随两凹陷之间量纲距离 a^* 的变化 ($m=0, r^*=1$)

Fig. 17 Variation of maximum dynamic stress concentration factor around the first depression with a^* ($m=0, r^*=1$)

3.3 位移幅值

图 18 给出了带形域的上边界有一个凹陷, 0 阶导波作用下, $h^*=10.0$ 时, 凹陷附近的上、下表面位移幅值 w^* 随入射波无量纲波数 k^* 变化的等高线图。图 19 给出了 $k^*=2.0$, 凹陷附近的上、下表面位移幅值 w^* 随带形域无量纲厚度 h^* 变化的等高线图。

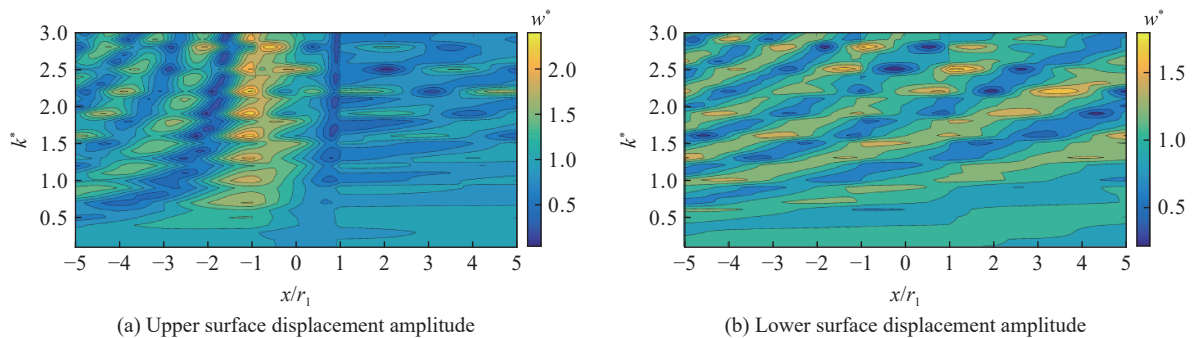


图 18 表面位移幅值随 k^* 的变化 ($g=1, m=0, h^*=10.0$)

Fig. 18 Variation of surface displacement amplitude with k^* ($g=1, m=0, h^*=10.0$)

对于上边界: 从图 18(a) 中可以看出, 无论 k^* 为多少, 上表面位移幅值的最大值均发生在 $x/r_1 = -1$ 点, 该点 w^* 值随着 k^* 的增大而震荡增大, 并在 $k^*=2.2$ 处达到得最大值 2.44。随着入射频率 k^* 的增大, w^*

震荡逐渐加强,出现更多的波峰波谷交替,这种现象在 $x/r_1 < -1$ 时较明显。相比于凹陷右侧($x/r_1 > 1$),凹陷左侧($x/r_1 < -1$)的位移震荡频率和幅值更大。由图19(a)可得,上表面位移幅值的最大值出现在点 $x/r_1 = -1$ 附近的凹陷迎波面,图中 w^* 在 $h^* = 12.55$, $x/r_1 = -1$ 处取最大值3.31。

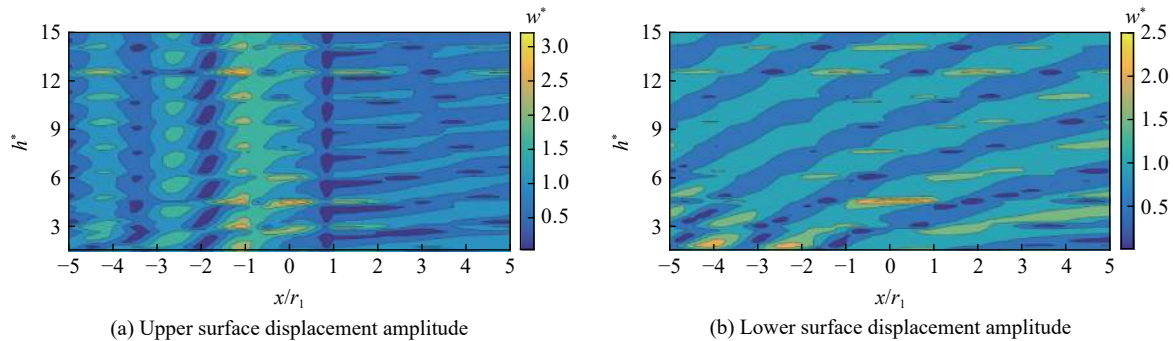


图19 表面位移幅值随 h^* 的变化($g=1, m=0, k^*=2.0$)

Fig. 19 Variation of surface displacement amplitude with h^* ($g=1, m=0, k^*=2.0$)

对于下边界:从图18(b)和图19(b)可以看出, w^* 的震荡幅值和频率在经过凹陷后都有所减小,这种现象随着 k^* 的增大和 h^* 的减小越来越明显。

4 结论

利用复变函数法、波函数展开法、累次镜像法和多极坐标平移技术对带形域中多个半圆柱形凹陷在入射SH导波作用下的散射问题进行了研究,给出了满足上、下水平边界应力自由的SH型导波及带形介质内散射波的表达式。通过凹陷的边界条件建立了方程组,求解出了未知系数,得到了问题的解析解。并通过数值算例对带形域的边界存在一个凹陷和两个凹陷的情况进行了分析。研究表明:0阶SH导波作用下,凹陷的边沿动应力集中会随着带形域厚度的增大而震荡减小;在小厚度的带形域中入射中高频SH波时容易引起更高的动应力集中;上边界位移幅值的最大值会出现在凹陷的迎波面附近。当带形域的上边有两个凹陷时,第二个凹陷大多数情况下会引起第一个凹陷边沿动应力集中的增加,即使两凹陷距离较远,也应对两凹陷的之间影响给予足够的重视。本文的研究可以指导工程实践,如混凝土板表面排水凹陷、线路和管道的设计;也可以为边界元法和有限元法等数值方法提供理论支撑和参考。

参考文献:

- [1] TRIFUNAC M D. Scattering of plane sh waves by a semi-cylindrical canyon [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1972, 1(3): 267–281. DOI: 10.1002/eqe.4290010307.
 - [2] WONG H L, TRIFUNAC M D. Scattering of plane SH waves by a semi-elliptical canyon [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1974, 3(2): 157–169. DOI: 10.1002/eqe.4290030205.
 - [3] LIU D K, GAI B Z, TAO G Y. Applications of the method of complex functions to dynamic stress concentrations [J]. *Wave Motion*, 1982, 4(3): 293–304. DOI: 10.1016/0165-2125(82)90025-7.
 - [4] LIU D K, HAN F. Scattering of plane SH-wave by cylindrical canyon of arbitrary shape [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1991, 10(5): 249–255. DOI: 10.1016/0267-7261(91)90018-U.
 - [5] 许贻燕, 韩峰. 平面SH波在相邻多个半圆形凹陷地形上的散射 [J]. *地震工程与工程振动*, 1992, 12(2): 12–18. DOI: 10.13197/j.eeev.1992.02.002.
- XU Y Y, HAN F. Scattering of SH-waves by multiple semi-cylindrical canyons [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1992, 12(2): 12–18. DOI: 10.13197/j.eeev.1992.02.002.

- [6] 刘刚, 李宏亮, 刘殿魁, 等. SH 波对浅埋裂纹的半圆形凹陷地形的散射 [J]. *爆炸与冲击*, 2007, 27(2): 171–178. DOI: 10.11883/1001-1455(2007)02-0171-08.
LIU G, LI H L, LIU D K, et al. Scattering of a semi-cylindrical canyon and a crack with incident SH waves [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2007, 27(2): 171–178. DOI: 10.11883/1001-1455(2007)02-0171-08.
- [7] 齐辉, 蔡立明, 潘向南, 等. 弹性直角域中半圆形凹陷的 SH 波散射的稳态解 [J]. *天津大学学报 (自然科学与工程技术版)*, 2014, 47(12): 1065–1071. DOI: 10.11784/tdxbz201403015.
QI H, CAI L M, PAN X N, et al. Steady state solution of SH wave scattering of a semi-circular cylindrical canyon in an elastic quarter space [J]. *Journal of Tianjin University (Science and Technology)*, 2014, 47(12): 1065–1071. DOI: 10.11784/tdxbz201403015.
- [8] CHANG K H, TSAUR D H, WANG J H. Scattering of SH waves by a circular sectorial canyon [J]. *Geophysical Journal International*, 2013, 195(1): 532–543. DOI: 10.1093/gji/ggt236.
- [9] SHYU W S, TENG T J, YEH C S. Surface motion of two canyons for incident SH waves by hybrid method [J]. *Procedia Engineering*, 2014, 79: 533–539. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.06.376.
- [10] BA Z N, LIANG J W. Dynamic response analysis of periodic alluvial valleys under incident plane SH-waves [J]. *Journal of Earthquake Engineering*, 2017, 21(4): 531–550. DOI: 10.1080/13632469.2016.1178192.
- [11] ACHENBACH J D. Wave propagation in elastic solids [M]. Amsterdam: North-Holland, 1973: 202–261.
- [12] LU Y C. Guided antiplane shear wave propagation in layers reinforced by periodically spaced cylinders [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, 99(4): 1937–1943. DOI: 10.1121/1.415377.
- [13] HAYIR A, BAKIRTAS I. A note on a plate having a circular cavity excited by plane harmonic SH waves [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 271(1-2): 241–255. DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00751-X.
- [14] 齐辉, 折勇, 赵嘉喜. 带形域内圆柱形夹杂对 SH 型导波的散射 [J]. *振动与冲击*, 2009, 28(5): 142–145. DOI: 10.3969/j.issn.1000-3835.2009.05.032.
QI H, SHI Y, ZHAO J X. Scattering of SH waves from a circular inclusion in an infinite strip region [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(5): 142–145. DOI: 10.3969/j.issn.1000-3835.2009.05.032.
- [15] QI H, ZHANG X M. Scattering of SH guided wave by a circular inclusion in an infinite piezoelectric material strip [J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2019, 29(1): 93–110. DOI: 10.1080/17455030.2017.1413262.
- [16] QI H, XIANG M, GUO J. The dynamic stress analysis of an infinite piezoelectric material strip with a circular cavity [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020. DOI: 10.1080/15376494.2019.1709676.
- [17] QI H, XIANG M, GUO J. Scattering of a shear horizontal wave by a circular cavity in a piezoelectric bi-material strip based on guided wave theory [J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2020, 25(4): 968–985. DOI: 10.1177/1081286519897353.

(责任编辑 张凌云)