

DOI: 10.11883/bzycj-2020-0024

## 聊聊动态塑性和黏塑性\*

王礼立, 董新龙

(宁波大学冲击与安全工程教育部重点实验室, 浙江 宁波 315211)

**摘要:** 固体力学研究者致力于具有应力-应变本构关系(以下简称为形变型本构关系)的变形体的力学响应研究, 而流体力学研究者致力于具有应力-应变率本构关系(以下简称为流动型本构关系)的流动体的力学响应研究。当涉及结构和材料的动态塑性时, 到底应该用“塑性变形”还是“塑性流动”来表示? 本文从宏观塑性本构理论和微观位错动力学机理两个角度, 分别讨论并指出塑性本构关系属于流动型黏塑性率相关本构关系, 且同时适用于加载和卸载; 因而不应该用应力-应变图来描述塑性加-卸载过程。弹塑性本构关系则是一种形变型和流动型本构关系的耦合。

**关键词:** 动态塑性; 塑性变形; 塑性流动; 位错动力学; 黏塑性

中图分类号: O347.1 国标学科代码: 13015 文献标志码: A

## Talk about dynamic plasticity and viscoplasticity

WANG Lili, DONG Xinlong

(Key Laboratory of Impact and Safety Engineering, Ministry of Education, Ningbo University,  
Ningbo 315211, Zhejiang, China)

**Abstract:** The researchers in solid mechanics are interested in studying the mechanical response of deformed solids with stress-strain constitutive relationships (referred to as deformation-type constitutive relations), while the researchers in fluid mechanics are interested in studying the mechanical responses of fluids with stress-strain rate constitutive relationships (referred to as flow-type constitutive relations). When the dynamic plasticity of structures and materials is concerned, should it be in terms of plastic deformation or plastic flow? This paper discusses this problem from the macroscopic plastic constitutive theory and the microscopic dislocation dynamic mechanism, respectively, and points out that the plastic constitutive relation belongs to the flow-type viscoplastic rate-dependent constitutive relation, which is suitable for both loading and unloading processes. Therefore, the stress-strain diagram should not be used to describe the plastic loading and unloading processes. The elastic-plastic constitutive relation is the coupling of the deformation-type and flow-type constitutive relations.

**Keywords:** dynamic plasticity; plastic deformation; plastic flow; dislocation dynamics; visco-plasticity

在爆炸/冲击载荷下, 材料本构关系通常分解为球量部分(容变律)和偏量部分(畸变律)分别加以处理。前者归结为高压下不同形式状态方程(非线性弹性律)的研究, 而后者则归结为率相关剪切律的研究<sup>[1-2]</sup>。

就偏量部分而言, 当涉及结构和材料的动态塑性时, 出现一个基本概念性问题: 到底应该使用术语“塑性变形”(plastic deformation)还是“塑性流动”(plastic flow)来表示? 这其实涉及到对材料塑性本构关系基本类型的认识。

变形和流动的差别主要在哪儿呢? 这可以从材料本构关系角度来讨论。

\* 收稿日期: 2020-01-15; 修回日期: 2020-02-20

第一作者: 王礼立(1934—), 男, 教授, 博士生导师, wanglili@nbu.edu.cn

本文根据作者在 2019 年全国冲击动力学前沿论坛(2019 年 12 月 13~15 日, 海南万宁)的大会报告《聊聊动态塑性、黏塑性和损伤演化》删减整理而成。

在固体力学中,人们讨论应力作用下的变形,其偏量本构关系表现为应力与应变之间的函数关系,例如图1(a)所示的Hooke弹性定律:

$$\tau=G\gamma \quad (1)$$

应力与应变一一对应,不随时间变化。

在流体力学中,人们讨论应力作用下的流动,其偏量本构关系表现为应力与应变率之间的函数关系,例如图1(b)所示的Newton黏性定律:

$$\tau=\eta\dot{\gamma} \quad (2)$$

应力与应变率一一对应;而应变 $\gamma$ 则随时间变化,是通过 $\dot{\gamma}(t)$ 对时间 $t$ 积分确定的。如果想在应力-应变坐标中刻画Newton黏性定律,则如图1(c)所示,表现为恒应变率下给定应力下的一条水平线,这条水平线隐含着应变在给定应力和应变率下随时间增长的过程。

固体力学的学者从应力-应变型本构关系出发,习惯于用应力-应变坐标来表述材料受应力作用时的变形;但当材料进入到遵循应力-应变率型本构关系的塑性流动(下文将详细讨论)时,如果还继续用应力-应变坐标来表述材料的塑性流动,就将在到达屈服点后出现类似于图1(c)那样的所谓“理想塑性”平台。

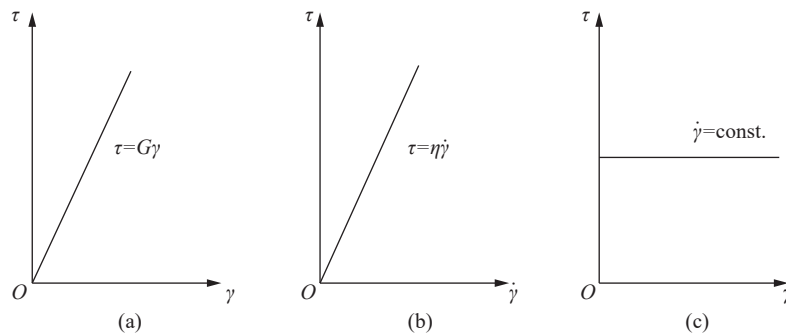


图1 (a)在 $\tau$ - $\gamma$ 坐标中表示的Hooke弹性定律( $\tau=G\gamma$ );(b)在 $\tau$ - $\dot{\gamma}$ 坐标中表示的Newton黏性定律( $\tau=\eta\dot{\gamma}$ );(c)在 $\tau$ - $\gamma$ 坐标中表示的Newton黏性定律( $\tau=\eta\dot{\gamma}$ )

Fig. 1 (a) The Hooke's elastic law ( $\tau=G\gamma$ ) described in  $\tau$ - $\gamma$  coordinates; (b) The Newton's viscous law ( $\tau=\eta\dot{\gamma}$ ) described in  $\tau$ - $\dot{\gamma}$  coordinates; (c) The Newton's viscous law ( $\tau=\eta\dot{\gamma}$ ) described in  $\tau$ - $\gamma$  coordinates

其实,力学的主要二级分支学科,如一般力学(刚体系力学)、固体力学及流体力学等的划分,正是基于不同的材料偏量本构关系类型进行区分的:一般力学研究的是不会变形不会流动的刚体,固体力学研究的是具有应力-应变本构关系(以下简称为形变型本构关系)的变形体,而流体力学研究的是具有应力-应变率本构关系(以下简称为流动型本构关系)的流动体。这些都是理想化模型。

对于实际材料,常常需要处理更复杂的、变形与流动相耦合的情况。按照流变学(rheology)的观点,万物皆变,万物皆流,变形与流动共存。弹塑性本构模型正是弹性变形与塑性流动的耦合模型。朱兆祥先生曾经回忆当年在深圳罗湖桥接待钱学森先生回国时,看到钱学森先生在入关填写表格时,在填写“专业”一栏写过一项“流变学”,这在当时是跨固体-流体、跨力学-材料学的前沿学科。

那么塑性是像弹性固体那样遵循形变型本构关系(塑性应力-应变关系),还是像黏性流体那样遵循流动型本构关系(黏塑性应力-应变率本构关系)呢?下面,我们将从宏观塑性本构理论和微观位错动力学理论角度分别加以讨论。

## 1 从宏观塑性本构理论的角度来看

由经典塑性力学的发展史知<sup>[3-4]</sup>,塑性增量理论先于全量理论。从本构关系类型的角度看,前者属于流动型本构关系,而后者则属于形变型本构关系,实际上是前者在简单加载(比例加载)条件下的特殊情况。

从塑性增量理论出发, 按照 Levy(1871)-Mises(1913)最早提出的塑性增量理论, 塑性应变偏量增量  $de_{ij}^p$  正比于应力偏量  $S_{ij}$ :

$$de_{ij}^p = d\lambda S_{ij} \quad (3a)$$

式中:  $d\lambda$  是非负标量比例因子。式 (3a) 两侧同除以  $dt$  后, 可改写为以应变率表征的形式:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda S_{ij} \quad (3b)$$

有时称为 St. Venant-Levy-Mises 方程。更一般的 Prandtl-Reuss 理论则进一步考虑了耦合的弹性变形。显然, 当  $1/\lambda = \eta = \text{const.}$  时, 式 (3b) 就化为 Newton 黏性律, 因而 Levy-Mises 增量理论(式 (3))可看作 Newton 黏性律的非线性推广。

当塑性体积变形可忽略时, 无需区分塑性应变率偏量  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  与塑性应变率全量  $\dot{\epsilon}_{\text{eff}}^p$ , 这时式 (3b) 就可以表为:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda S_{ij} \quad (3c)$$

把式 (3c) 等号两侧平方, 演算时注意到等效应力  $\sigma_{\text{eff}}$  和等效塑性应变率  $\dot{\epsilon}_{\text{eff}}^p$  的如下定义:

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{3} (\sigma_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (4a)$$

$$D_2^p = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{4} (\dot{\epsilon}_{\text{eff}}^p)^2 = \frac{1}{6} [(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p)^2 + (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 + (\dot{\epsilon}_3^p - \dot{\epsilon}_1^p)^2] \quad (4b)$$

即可确定:

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{\text{eff}}^p}{\sigma_{\text{eff}}} \quad (5)$$

把式 (5) 代入式 (3c), 可得到以应变率形式表述的如下流动型本构关系:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \left( \frac{D_2^p}{J_2} \right)^{1/2} S_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{\text{eff}}^p}{\sigma_{\text{eff}}} S_{ij} \quad (6)$$

其具体形式取决于  $\dot{\epsilon}_{\text{eff}}^p(\sigma_{\text{eff}})$  的函数形式。

例如, 把忽略弹性应变率并以等效应变率形式表示的 Cowper-Symonds 公式:

$$\dot{\epsilon}_{\text{eff}} = D \left( \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_0} - 1 \right)^q \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (6) 可得:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{D}{\sigma_{\text{eff}}} \left( \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_0} - 1 \right)^q S_{ij} \quad (8)$$

式中:  $\sigma_0$  为准静态流动应力,  $D$  和  $q$  为材料常数。这就是张量形式的基于 Cowper-Symonds 公式的应变率相关的流动型黏塑性本构方程。

注意, 式 (3)~式 (6) 并不依赖于是否存在屈服面或静态应力-应变曲线, 既适用于无屈服面黏塑性理论, 如 Bodner-Parton 的无屈服面模型; 也适用于含屈服面或静态应力-应变曲线理论, 例如基于 Cowper-Symonds 公式(式 (7)) 的式 (8) 以存在屈服面或静态应力-应变曲线为前提, 是所谓超应力类型的黏塑性本构方程。

## 2 从微观位错动力学的角度来看

塑性微观机理的研究曾经经历过从“理想晶体整体滑移”机理到“实际晶体位错运动”机理的发展过程。由下面的讨论可知, 这两种机理实际上分别对应于形变型塑性本构方程和流动型黏塑性本构方程。

### 2.1 “理想晶体整体滑移”机理

考察原子间距为  $b$ 、排距为  $a$  的相邻两排晶体粒子在剪切力  $\tau$  作用下的剪切滑移,如图2所示。由于晶体具有周期性的晶格结构,其结合能(势能)  $U$  和结合力  $\tau(=-\frac{\partial U}{\partial x})$  的分布是周期函数。假设势能  $U$  可近似表示为一余弦函数:

$$U = -2A \cos \frac{2\pi x}{b} \tag{9a}$$

式中:  $2A$  为振幅。则对应的剪切应力  $\tau$  为:

$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{4\pi A}{b} \sin \frac{2\pi x}{b} \tag{9b}$$

当滑移量  $x \ll a$  和  $x \ll b$  时,按照虎克定律  $\tau = G\gamma \approx G\frac{x}{a}$ ,式(9b)可改写为:

$$\tau = \frac{Gb}{2\pi a} \sin \frac{2\pi x}{b} \tag{9c}$$

显然,在平衡位置  $A$  和  $B$  处,式(9a)给出的势能  $U$  最小(能垒谷),对应的式(9b)给出的剪切应力  $\tau$  为零(图2右图)。滑移  $b/4$  原子间距时,  $\tau$  达到最大值  $\tau_{\max} = \frac{Gb}{2\pi a}$ ;滑移到半个原子间距  $b/2$  时,  $\tau$  又为零,但属于亚稳定状态(能垒峰)。当克服这一势垒峰值,滑移一个原子间距  $b$ ,势能又降到最小,产生塑性滑移量  $b$ 。

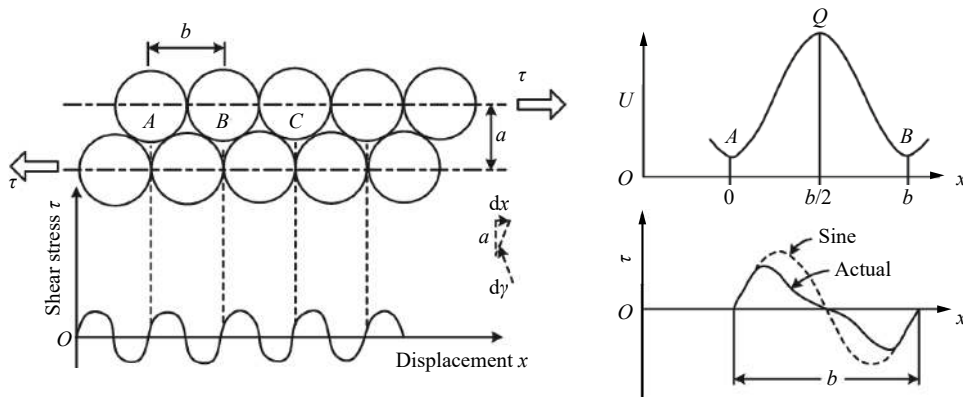


图2 理想晶体的剪切滑移  
Fig. 2 Shear slip in a perfect crystal

因此,能使上排原子相对于下排原子产生整体塑性滑移所需的最大剪切应力  $\tau_b$  表征了理想晶体的所谓理论剪切强度(理论屈服强度),一般  $b$  和  $a$  为同一量级的量,因而近似地有:

$$\tau_b \approx \frac{G}{2\pi} \tag{10}$$

这一机理给出了如下的弹塑性本构关系:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_e &= \tau/G & \tau < \tau_b \\ \gamma_p &= b & \tau = \tau_b \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

式中:应变  $\gamma$  的下标  $e$  和  $p$  分别指弹性和塑性。由此可见,式(11)属于应力-应变——对应的形变型本构关系。

但是,式(10)给出的理论屈服强度与实际金属晶体的实测屈服强度值相对比,有量级性的差别(两者之比达  $10^2 \sim 10^4$  量级)。这归因于实际晶体存在内在缺陷。1934年,Orowan<sup>[5]</sup>、Polanyi<sup>[6]</sup>和Taylor<sup>[7]</sup>几乎同时、又分别独立地,提出了位错的概念,并为随后的实验观察所证实。

## 2.2 “实际晶体位错运动”机理

含位错的实际晶体, 在切应力  $\tau$  作用下, 通过位错在晶体中的一步步运动来完成滑移, 如图 3 所示。

关于这一位错运动机理, 有两点特别值得强调: (1) 由于位错的局域化作用, 使得推动位错一步步移动所需的切应力(实际屈服强度)远比推动晶体整体滑移所需的切应力(理论屈服强度)小得多, 这是含缺陷的实际晶体与完善的理想晶体强度有量级性差别的根本原因。(2) 在“理想晶体整体滑移”机理中, 一旦外加切应力达到晶体理论屈服强度就可瞬时滑移以实现塑性形变。与之相反, 在位错运动机理中, 滑移是通过位错一步步移动的时间相关过程来实现的, 因而是一个与时间相关的、即与位错运动速度  $v_d$  相关的塑性流动过程。

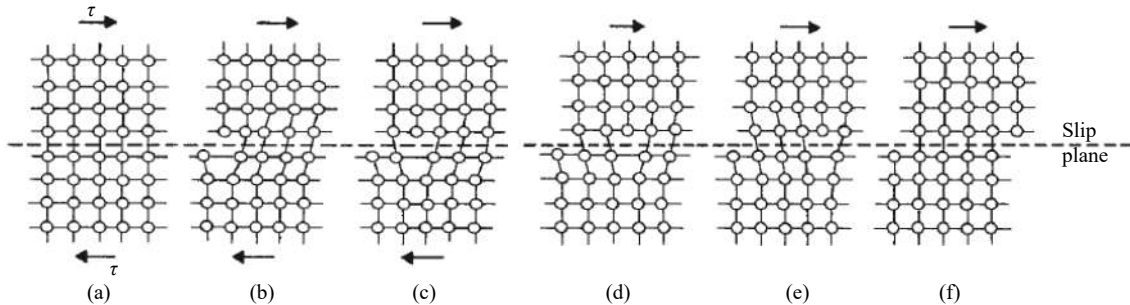


图 3 由位错运动形成的滑移。

Fig. 3 Slip formations due to dislocation movement.

考察在给定的宏观大小为  $l \times l \times l$  的晶体, 在微观尺度上有  $N$  个平行的可动刃型位错, 在切应力  $\tau$  作用下, 位错以某一速度移动, 如图 4 所示。

Orowan<sup>[8]</sup> 提出联系微观位错运动与宏观塑性畸变  $\gamma^p$  的如下方程:

$$\gamma^p = \frac{Nb}{l} = \frac{Nbl}{l^2} = \phi \rho_m b l \quad (12a)$$

在位错运动机理中, 位错运动速度  $v_d (=dl/dt)$  扮演决定性作用, 式 (12a) 对时间  $t$  微分后有:

$$\dot{\gamma}^p = \phi \rho_m b v_d + \phi b l \dot{\rho}_m \quad (12b)$$

式中:  $\phi$  为位相因数,  $\rho_m (=N/l^2)$  为可动位错密度,  $b$  为位错的 Burgers 矢量大小。当可动位错密度对时间的变化率  $\dot{\rho}_m$  是可忽略的小量时, 则近似地有如下的 Orowan 简化式:

$$\dot{\gamma}^p = \phi \rho_m b v_d \quad (12c)$$

Orowan 公式(式 (12))的重要意义在于: 它建立了微观位错运动诸参量与宏观塑性畸变率  $\dot{\gamma}^p$  的联系, 这是跨尺度研究能否实现宏观工程应用的关键所在。

Orowan 公式中的关键性微观参量是位错运动速度  $v_d$ , 实验表明它依赖于作用力  $\tau$  和温度  $T$ 。  $v_d$  实际上反映了位错跨越短程势垒实现塑性滑移的成功概率。位错跨越各种短程势垒一方面靠外力  $\tau$  做功, 另一方面靠晶格热振动(热起伏)的热激活能  $U$ 。由此, 按照统计力学有关热激活过程的分析可得:

$$v_d = f_0 \chi \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = v_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \quad (13)$$

式中:  $v_0$  为位错振动频率  $f_0$  与位错平均运动距离  $\chi$  之乘积,  $k$  为 Boltzmann 常数。式(13)是位错速度  $v_d$  的 Arrhenius 方程, 把它代入 Orowan 简化式(式 (12c)), 就得到塑性应变率的 Arrhenius 方程:

$$\dot{\gamma}^p = \phi \rho_m b v_d = \phi \rho_m b v_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = \dot{\gamma}_0 \exp\left(-\frac{U(\tau)}{kT}\right) \quad (14a)$$

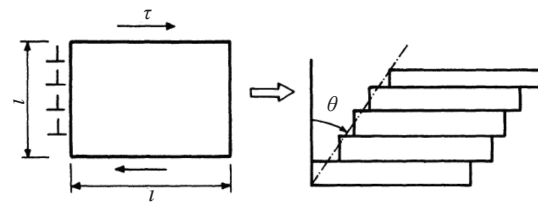


图 4 一系列平行位错的运动造成的宏观塑性切应变

Fig. 4 The macroscopic plastic shear strain  $\gamma^p (= \tan \theta)$  caused by the motion of a row of parallel dislocations

式 (14a) 是基于位错动力学热激活机制的流动型塑性本构关系的一般形式。就本构关系类型而言, 与宏观塑性增量理论是一致的, 为塑性增量理论提供了微观物理机制。至于其具体形式, 则取决于热激活能  $U$  如何依赖于作用力  $\tau$  的函数形式  $U(\tau)$ 。

引入以下无量纲参数:

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_c}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V^*}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\tau_c V^*}, \quad \bar{T} = \frac{kT}{\tau_c V^*}, \quad \bar{\dot{\gamma}} = \frac{\dot{\gamma}^p}{\dot{\gamma}_0^p} \quad (14b)$$

式中:  $\tau_c$  为特征应力,  $V (=blx)$  为激活体积,  $V^*$  为  $\tau=0$  时的激活体积。

则式 (14a) 可改写为如下无量纲形式:

$$\bar{\dot{\gamma}} = \exp\left(-\frac{\bar{U}(\bar{\tau})}{\bar{T}}\right) \quad (14c)$$

注意, 按激活能的定义有:

$$\bar{U}(\bar{\tau}) = \int_{\bar{\tau}}^1 \bar{V}(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \quad (14d)$$

这表示, 在等温条件下, 激活能  $\bar{U}(\bar{\tau})$  表现为在切应力  $\bar{\tau}$  对激活体积  $\bar{V}(\bar{\tau}-\bar{V})$  坐标中的势垒曲线 (图 5)。

显然, 黏塑性本构关系的具体形式取决于  $U(\tau)$  或  $V(\tau)$ , 这是一切基于位错动力学的黏塑性本构关系研究的核心所在。

例如, 按照 Seeger 的林位错模型,  $U(\tau)$  可近似地表为  $\tau$  的线性函数 (对应于  $\tau-V$  坐标中的矩形势垒曲线, 如图 5(a) 所示), 则在  $\tau-\ln \dot{\gamma}$  半对数坐标中显示为一直线,  $\tau$  随  $\dot{\gamma}$  的量级性增加而升高:

$$\tau = \tau_0 + c \ln \frac{\dot{\gamma}^p}{\dot{\gamma}_0^p}, \quad \text{或} \quad \dot{\gamma}^p = \dot{\gamma}_0^p \exp\left(\frac{\tau - \tau_0}{c}\right) \quad (15)$$

式中:  $c$  为表征材料的应变率敏感性的材料参数。

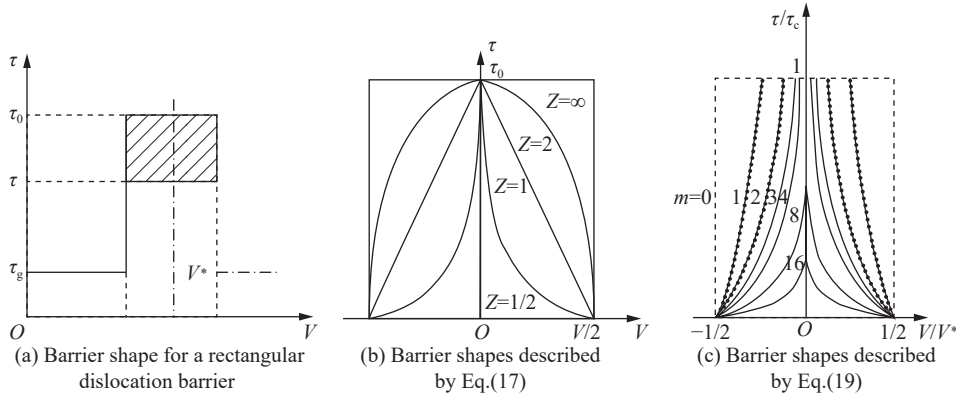


图 5 位错势垒示意图

Fig. 5 Schematics of dislocation barrier

联系到人们熟知的 Johnson-Cook 方程:

$$\sigma = (\sigma_0 + B\varepsilon^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r}\right)^m\right] \quad (16a)$$

其中计及应变率效应的第 2 项  $\left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)$  正是 Seeger 模型的体现。如果把准静态应力-应变关系 (第 1 项) 简化记作  $\sigma_s(\varepsilon)$ , 并暂时不考虑温度效应 (第 3 项), 则式 (16a) 可以改写为:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left[\frac{\sigma - \sigma_s(\varepsilon)}{C\sigma_s(\varepsilon)}\right] \quad (16b)$$

此式与 Seeger 模型 (式 (15)) 一致, 只是做了存在准静态应力-应变关系  $\sigma_s(\varepsilon)$  的假设, 以它代替了式 (15) 的  $\tau_0$ , 并相应地引入了无量纲超应力  $(\sigma - \sigma_s(\varepsilon))/\sigma_s(\varepsilon)$ 。



关于  $U(\tau)$ , 除了 Seeger 线性模型外, 研究者们还建议了众多的非线性关系式, 其中具有代表性的如下。

(1) Davidson-Lindholm 模型<sup>[9]</sup>, 由下式表示:

$$\bar{V} = (1 - \bar{\tau}^Z)^{1/Z} \quad (17)$$

式中:  $Z$  为材料参数, 当  $Z$  取不同值时, 就对应于不同的势垒形状, 如图 5(b) 所示。当  $Z = \infty$  时,  $\bar{V} = 1$ , 就化为 Seeger 模型。

(2) Kocks-Argon-Ashby 模型<sup>[10]</sup>, 如下式所示:

$$U = U_0 \left[ 1 - \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^p \right]^q, \text{ 或即 } \bar{U} = (1 - \bar{\sigma}^p)^q \quad (18)$$

式中:  $U_0 (= \tau_c V^*)$  为应力为零时的激活能。此式由于包含  $p$  和  $q$  两个参数 ( $0 < p \leq 1, 1 \leq q \leq 2$ ), 显然比 Davidson-Lindholm 模型(式 17)更为一般化。

(3) Wang 双曲型势垒谱模型<sup>[11]</sup>, 如式(19)和图 5(c) 所示:

$$\bar{V} = (1 + \bar{\tau})^{-m} \quad m \geq 0 \quad (19a)$$

当  $m=0$ ,  $\bar{V} = 1$ , 就对应于 Seeger's 模型。在式(19a)的基础上, Wang<sup>[11]</sup> 还进一步提出了双曲型势垒谱的概念, 即: 考虑到一个单一的热激活势垒常常在一定的应变率范围和温度范围起主导作用, 而在更广的应变率和温度范围, 则可能存在多个机制, 分别对应于不同的势垒形状。换句话说, 实际上存在一个势垒谱, 在不同条件下有不同的机制起主导作用; 这样以式(19a)为基础, 如果给定的应力  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_i$  和温度  $\bar{T} = \bar{T}_i$ , 总的黏塑性应变率  $\bar{\gamma}$  为各个  $\bar{\gamma}_i$  乘以权重函数  $\psi_i$  之和, 则有:

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \psi_i \bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^n \psi_i \exp \left[ \frac{(1 + \tau)^{1-m_i} - 2^{1-m_i}}{(1 - m_i) \bar{T}} \right] \quad (19b)$$

此处应变率权重函数  $\psi_i$  一般是  $\bar{\gamma}$ 、 $\bar{\gamma}$  和  $T$  的函数, 并满足:

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(\gamma, \dot{\gamma}, T) = 1 \quad (19c)$$

至此, 式(14)至式(19)都是基于 Orowan 简化式(式(12c))展开分析的, 忽略了可动位错密度对时间的变化率  $\rho_m$  的影响, 从而在实质上忽略了以位错增殖机理为基础的应变硬化效应。

Zerilli 等<sup>[12]</sup> 考虑了应变硬化效应, 并且注意到不同晶格结构的应变率敏感性是不同的, 对于体心立方晶格(BCC)和面心立方晶格(FCC)分别提出以下本构关系:

$$\sigma = \sigma_g + C_1 \exp(-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}) + C_5 \varepsilon^n + kd^{-1/2} \quad (\text{for BCC}) \quad (20a)$$

$$\sigma = \sigma_g + C_2 \varepsilon^{1/2} \exp(-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}) + kd^{-1/2} \quad (\text{for FCC}) \quad (20b)$$

被称为 Zerilli-Armstrong 方程, 式中还增加了长程非热应力  $\sigma_g$  项(第 1 项)和考虑了晶粒尺寸  $d$  对于流动应力的影响(最末项),  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  和  $k$  均为材料参数。

在以上讨论中, 在没有热激活的帮助时, 位错为跨过势垒所必需的力学阈值应力(mechanical threshold stress)  $\tau_0$ , 已假定是恒值(参看图 5 中的势垒峰值应力  $\tau_0$ )。实际上, 一旦微结构发生演化,  $\tau_0$  也随之变化, 在宏观上表现为应变率历史效应。对此, Follansbee 等采用 Kocks-Argon-Ashby 的非线性  $\bar{U}(\bar{\tau})$  模型(式(18)), 但把  $\tau_0$  看作应变和应变率的函数  $\tau_0 = \tau_0(\gamma, \dot{\gamma})$ , 则式(18)当以正应力来表示时, 可写成如下无量纲形式<sup>[13]</sup>:

$$\left( \frac{\sigma}{G(T)} \right)^p = \left( \frac{\sigma_0(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}{G(T)} \right)^p \left[ 1 - \left( \frac{kT}{G(T)b^3 g_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}} \right)^{1/q} \right] \quad (21)$$

式中:  $g_0 = U_0 / (G(T)b^3)$  为无量纲归一化激活能,  $G(T)$  为弹性剪切模量, 一般是温度  $T$  的函数。式(21)称为力学阈值应力模型。下一步的关键和难点在于如何确定力学阈值应力演化关系  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , 通常依

靠一系列包含不同应变/应变率历史的“动态预加载-卸载-再加载”实验来确定。

有关  $U(\tau)$  非线性关系式的更详细讨论,可参考文献 [1-2] 的第6章。由上述讨论可知,不论  $U(\tau)$  取什么形式,其实都是式(14)的具体表现,都属于流动型黏塑性本构关系。

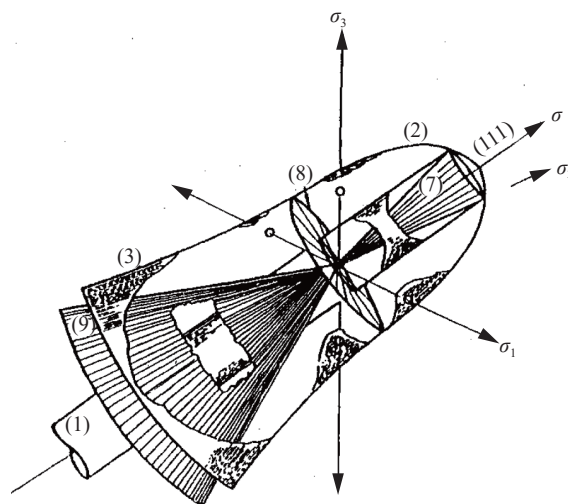
### 3 讨论

由以上从宏观塑性本构理论和微观位错动力学机理两个角度分别对于“塑性”的讨论,一致地表明,所谓“塑性”本质上是速率/时间相关的黏塑性流动,塑性本构关系属于率相关流动型黏塑性本构关系。这一关系同时适用于加载和卸载。

对于流动型本构关系,理应在应力-应变率坐标中讨论,而难以用应力-应变图来描述,除非在给定应变率下,表现为一系列不同应变率下的不同的应力-应变曲线。即使这样,这些所谓的应力-应变曲线其实隐含着应变在给定应力和应变率下随时间增长的过程,不同于形变型本构关系的应力-应变曲线。

不难理解,对于那些习惯于准静态的应力-应变分析(不包含应力波传播的时间效应),以及习惯于在应力-应变坐标中讨论形变型本构关系的研究者,如果继续在应力-应变坐标中讨论本应以应力-应变率所表征的流动型塑性本构关系,难免会遇到各种困扰,以致模糊了黏塑性流动律本身的特征和表现。

特别在弹性形变律与塑性流动律相耦合的弹-黏塑性情况下,尤其需要注意区分形变律与流动律。在主应力( $\sigma, \sigma_2, \sigma_3$ )空间,如图6所示<sup>[14]</sup>,如果加载和卸载路径都落在 Mises 屈服圆柱以内,则服从弹性形变律。如果加载路径落在 Mises 屈服圆柱以外、刘氏断裂钟面以内,则塑性流动遵循黏塑性流动律(式(6)、式(14)),与之相耦合的弹性变形则继续遵循弹性形变律;一旦卸载,黏塑性流动部分将遵循同一黏塑性流动律(式(6)、式(14))卸载,与之相耦合的弹性变形则遵循同一弹性形变律卸载。这时,对于给定的应力加载历史  $\sigma_{\text{eff}}(t)$ ,由塑性流动律可以确定对应的塑性应变率历史  $\dot{\epsilon}_{\text{eff}}(t)$ ,从而进一步通过时间积分可确定相应的塑性应变响应  $\epsilon_{\text{eff}}^p(t)$ 。不过要注意,当应力卸载时,对应的塑性应变率  $\dot{\epsilon}_{\text{eff}}(t)$  当然也跟着降低,但积分所得的塑性应变  $\epsilon_{\text{eff}}(t)$  并不立即减小而会随时间继续增加,直到卸载应力落到和落在 Mises 屈服圆柱以内,塑性流动停止,只剩下弹性卸载;因而实际上并不存在本构关系意义上的塑性应力-应变关系,也不存在基于塑性形变理论假设所提出的所谓“后继屈服面”和“塑性变形的弹性卸载”,等等。现有塑性力学教材的部分相关内容是否应作相应修改,无疑给我们提出了一个挑战。



(1) Yield cylinder (Hencky-Mises); (2) (3) Liu's bell-like rupture surface; (7) Brittle fracture cone; (8) Plane of pure shear; (9) Liu's non-fracturing cone

图6 应力空间中的 Mises 屈服圆柱和刘氏断裂钟面<sup>[14]</sup>

Fig. 6 Mises yielding cylinder and Liu's bell-like fracture surface in principal stress space<sup>[14]</sup>



在爆炸/冲击的高应变率载荷下, 结构动态响应问题常常归结为应力波的传播和相互作用。一旦涉及动态塑性(黏塑性)时, 问题就归结为基于形变型弹性本构关系的弹性波与基于流动型本构关系的黏塑性波耦合传播和相互作用的问题。一旦包含加载过程与卸载过程及其相互作用, 问题变得益发复杂化, 值得今后视具体研究情况作进一步探讨。

### 参考文献:

- [1] 王礼立, 胡时胜, 杨黎明, 等. 材料动力学 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2017.
- [2] WANG L L, YANG L M, DONG X L, et al. Dynamics of materials: experiments, models and applications [M]. London: Elsevier Science and Technology Press, 2019.
- [3] 李敏华, 王仁. 塑性应力应变关系理论的文献总结 [J]. 力学学报, 1958, 2(2): 167–180.
- [4] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论: 修订本 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.
- [5] OROWAN E. Plasticity of crystals [J]. *Zeitschrift für Physik A*, 1934, 89(9-10): 605–659. DOI: 10.1007/BF01341478.
- [6] POLANYI M. Lattice distortion which originates plastic flow [J]. *Zeitschrift für Physik A*, 1934, 89(9-10): 660–662. DOI: 10.1007/BF01341481.
- [7] TAYLOR G I. The mechanism of plastic deformation of crystals: Part I : theoretical [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1934, A145: 362–387. DOI: 10.1098/rspa.1934.0106.
- [8] OROWAN E. Problems of plastic gliding [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1940, 52(1): 8–22. DOI: 10.1088/0959-5309/52/1/303.
- [9] DAVIDSON D L, LINDHOLM U S. The effect of barrier shape in the rate theory of metal plasticity based on crystal dislocations [C] // *Proceedings of the Conference on Mechanical Properties at High Rates of Strain*. Oxford: The Institute of Physics, 1974: 124–137.
- [10] KOCKS U F, ARGON A S, ASHBY M F. Thermodynamics and kinetics of slip [J]. *Progress in Materials Science*, 1975, 19: 1–5. DOI: 10.1016/0079-6425(75)90005-5.
- [11] WANG L L. A thermo-viscoplastic constitutive equation based on hyperbolic shape thermo-activated barriers [J]. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1984, 106(4): 331–336. DOI: 10.1115/1.3225726.
- [12] ZERILLI F J, ARMSTRONG R W. Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations [J]. *Journals of Applied Physics*, 1987, 61(5): 1816–1825. DOI: 10.1063/1.338024.
- [13] FOLLANSBEE P S, KOCKS U F. A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable [J]. *Acta Metallurgica*, 1988, 36(1): 81–93. DOI: 10.1016/0001-6160(88)90030-2.
- [14] 刘叔仪. 关于固体的现实应力空间 [J]. *物理学报*, 1954, 10(1): 13–34. DOI: 10.7498/aps.10.13.

(责任编辑 张凌云)