

DOI: 10.11883/bzycj-2020-0313

梯度密度黏弹性材料的波传播研究*

李 毅¹, 苗春贺¹, 徐松林^{1,2}, 张金咏³, 王鹏飞¹

(1. 中国科学技术大学中国科学院材料力学行为和 Design 重点实验室, 安徽 合肥 230027;

2. 中国地震局地震预测研究所高压物理与地震科技联合实验室, 北京 100036;

3. 武汉理工大学材料复合新技术国家重点实验室, 湖北 武汉 430070)

摘要: 梯度密度黏弹性材料中波的传播比较复杂。为了研究其在冲击载荷作用下黏弹性响应特征, 基于控制方程的 Euler 形式, 利用 Laplace 变换, 得到了这种材料中的波传播规律的一个理论公式; 并据此分析了双层周期性黏弹性介质中的应力情况。选择具有梯度密度特性的钛-硼化钛 (Ti-TiB₂) 材料和碳纤维树脂材料, 采用不同的叠合方向和方式, 利用分离式霍普金森压杆 (split Hopkinson pressure bar, SHPB) 加载装置进行了动态冲击实验, 并用三波法对得到的实验结果进行处理。同时, 采用数值 Laplace 逆变换方法, 结合 SHPB 测得的人射波与透射波数据, 使用推导的理论公式计算出理论解, 并与实验结果进行了比较。结果表明: (1) 梯度钛-硼化钛材料由于内界面和叠层界面的存在, 表现出一定的黏性特性; 单层 Ti-TiB₂ 材料的计算结果和三波法分析得到的结果基本一致, 双层 Ti-TiB₂ 材料叠合后的计算结果与三波法分析结果存在一定的差异。(2) 双层碳纤维树脂材料表现出较强的黏弹性特征, 应力波的衰减幅度较大, 三波法分析结果与该材料的冲击性能有较大的差异。由此可知, 无论是细微观结构特征产生的黏性, 还是材料本身的黏性, 对材料动力学行为的影响都不可忽略。

关键词: 梯度密度; 黏弹性材料; 多层材料; 冲击性能

中图分类号: O347.4

国标学科代码: 13015

文献标志码: A

Wave propagation in density-graded viscoelastic material

LI Yi¹, MIAO Chunhe¹, XU Songlin^{1,2}, ZHANG Jinyong³, WANG Pengfei¹

(1. CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, Anhui, China;

2. United Laboratory of High Pressure Physics and Earthquake Science, Institute of Earthquake Forecasting, China Earthquake Administration, Beijing 100036, China;

3. State Key Laboratory of Advanced Technology for Materials Synthesis and Processing, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, Hubei, China)

Abstract: Wave propagation in visco-elastic materials with gradient density is really complex. In order to understand the responses of the visco-elastic materials to impact load, a series of theoretical equations for wave propagation in density-graded visco-elastic materials were proposed by employing the Euler form of the governing equations and the Laplace transform method. According to these equations, the wave propagation in the two-layer periodically-superimposed media with perpendicular incidence was analyzed. The Ti-TiB₂ material with gradient density characteristics and the carbon-fiber-reinforced resin composites with strong visco-elastic properties were selected as experimental subjects to carry out dynamic impact tests by applying a split Hopkinson pressure bar (SHPB) device. To better reflect the influences of the gradient

* 收稿日期: 2020-08-31; 修回日期: 2020-10-20

基金项目: 高压物理与地震科技联合实验室室开放基金(2019HPPES01); 国家自然科学基金(11672286, 11602267, 11872361); 安徽省自然科学基金(1708085MA05)

第一作者: 李 毅(1996—), 男, 硕士, ustcliyi@mail.ustc.edu.cn

通信作者: 徐松林(1971—), 男, 博士, 研究员, 博士生导师, slxu99@ustc.edu.cn

characteristics on the dynamic responses of the materials, the experimental specimens were prepared by using different stacking directions and modes. The data obtained by the SHPB device were analyzed by the three-wave method. Moreover, according to the incident wave and transmission wave obtained by the SHPB device, the wave propagation equations proposed for the visco-elastic media with gradient density were applied to obtain the corresponding theoretical solutions. And the calculated theoretical solutions were compared with the experimental results. The comparisons display as follows. (1) Due to the internal interface and the superimposed interface, the graded Ti-TiB₂ materials show certain viscosity properties. For single-layer Ti-TiB₂ specimens, the theoretically calculated results are approximately consistent with the experimental ones analyzed by the three-wave method. But there lie some differences for two-layer Ti-TiB₂ specimens. (2) The two-layer carbon fiber reinforced resin composites exhibit stronger visco-elastic characteristics, and the attenuation amplitude of stress wave is larger. There are obvious differences between the experimental results analyzed by the three-wave method and theoretically calculated ones. As a consequence, the influences of the viscosity produced by the meso-structures and the viscosity of the material itself on the dynamic behaviors of the macro medium cannot be ignored.

Keywords: gradient density; viscoelastic material; multilayer material; impact properties

超结构/材料是解决复杂防护效应问题的关键之一,是一种微观异构、宏观连续的介质,表现出一些特别优异的功能和物理力学性质,例如同时兼具高强度和高韧性,在高技术领域,已经形成了分类众多的工艺和产品。梯度密度材料是近几年制作工艺逐渐成熟的一种超结构/材料,形成了生物功能梯度材料、光学功能梯度材料等,并逐渐在多种领域得到了应用。由于这种介质含有大量的多尺度的细微观结构,这些细微观结构会使得应力波产生波形弥散和衰减现象^[1-2],其宏观响应均具有一定的黏弹性特征。研究冲击载荷作用下这种梯度材料的黏弹性响应特征,有助于揭示介质的细微观结构对应力波传播的影响规律,为材料的优化设计提供依据。本文将结合分离式霍普金森压杆 (SHPB) 实验技术对梯度密度黏弹性材料的冲击响应进行研究。

SHPB 技术广泛应用于测量材料动态力学特性^[3]。Zhao 等^[4]给出了采用黏弹性波导杆时确定试件动态本构关系的方法, Bacon^[5]、王宝珍等^[6]采用传播系数法较系统地分析了黏弹性试件中波传播过程中的弥散和衰减规律,以及动态本构关系的测试方法;朱珏等^[7]分析了试件中传播的黏弹性波对 SHPB 实验过程中应力均匀性等因素的影响规律。黏弹性波的传播理论是研究波传播特性的关键^[8], Ting 等^[9]、Tedsco 等^[10]、Han 等^[11]基于波动方程的 Laplace 变换方法研究了黏性层状介质中弹性波的传播特性和频率域中的等效分析方法, Mukerji^[12]通过测试研究了层状介质中弹性波的衰减和弥散。这些研究对弹性波在不同的多层弹性介质中的传播规律进行了实验和理论探索,揭示了弹性波波速对材料细观结构特征的频率相关性。进一步,周风华等^[13]、郑宇轩等^[14]基于波动方程的 Laplace 变换和数值 Laplace 逆变换对 SHPB 实验过程中黏弹性波的传播做了卓有成效的工作。这些研究都是针对均匀的黏弹性材料进行的,如果黏弹性材料不是均匀的,即其密度具有一定的分布特征,则会给波动分析带来较大的困难。张鸣等^[15]基于 Euler 方程的形式给出了垂直入射情况下梯度密度黏弹性材料中波动传播分析的一个近似解,得到了一些初步结论。

基于此,本文中将在张鸣等^[15]工作的基础上,进行垂直入射情况下多层梯度密度黏弹性材料中波动传播的分析,结合梯度钛-硼化钛材料^[16]和碳纤维增强树脂材料^[17]进行初步实验研究。

1 冲击下多层梯度密度黏弹性介质中波的传播

1.1 控制方程和近似解

梯度密度黏弹性介质中,密度 ρ 是位置 x 的函数,即: $\rho=\rho(x)$ 。其中的变形连续方程、动量守恒方程分别为:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

式中: σ 、 v 、 ε 分别为应力、粒子速度、应变, 且 $\sigma(x, 0^-) = v(x, 0^-) = \varepsilon(x, 0^-) = 0$ 。应力应变关系用 Stieltjes 积分形式表示为^[18]:

$$\sigma(x, t) = \int_0^t g(x, t-t') d\varepsilon(x, t') \quad (3)$$

式中: 弛豫模量 $g(x, t) = \lambda(x, t) + 2\mu(x, t)$, λ 和 μ 为拉梅常数。

方程 (1)~(3) 组成了求解梯度密度黏弹性介质中波传播特性的偏微分方程组。若求解其频域特性, 可采用 Fourier 变换的方法进行分析。本文中基于 Ting 等^[9]的方法, 采用 Laplace 变换方法进行分析, 即: 对变量进行 $\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ 变换。对方程 (1)~(3) 进行 Laplace 变换, 可以得到:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial x^2} - \frac{d\rho}{dx} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} - \frac{s\rho^2}{\bar{g}} \bar{\sigma} = 0 \quad (4)$$

式中: 含上标 “-” 的变量为对应变量的 Laplace 变换, 本文中所有变量均采用这种记法。对于一维问题, 式 (4) 为常微分方程。此微分方程的一般形式求解比较困难, 可以借用 Euler 方程的形式求得一种特殊情况的解。由式 (4), 当密度 ρ 和弛豫模量 g 分别满足: $\rho = A(x+\delta)^p$, $\bar{g} = \bar{B}(x+\delta)^{p+2}$ 时, 式 (4) 退化为 Euler 方程的形式, 即:

$$(x+\delta)^2 \bar{\sigma}'' - p(x+\delta) \bar{\sigma}' - \frac{As}{\bar{B}} \bar{\sigma} = 0 \quad (5)$$

式中: $\frac{d(\cdot)}{dx} = (\cdot)'$ 。 A 、 \bar{B} 、 δ 、 p 为材料参数, 通过调整这 4 个参数可以描述材料的梯度密度分布。 A 为 $x=0$ 时材料端部密度的初始值。 \bar{B} 为 $x=0$ 时材料端部弛豫模量的初始值。当指数 $p > 0$ 时, 材料的密度和弛豫模量随位置 x 的增加而递增, 为正梯度密度材料, 黏性随位置 x 的增加而减小; 当 $p < 0$ 时, 材料密度和弛豫模量随位置 x 的增加而减少, 为负梯度密度材料, 黏性随位置 x 的增加而增大。 δ 是为了避免在 $x=0$ 时材料的密度为零, 从而设置的补充参数。一般将 δ 取为 1, 这样可以简化计算过程。常微分方程 (5) 的解为:

$$\bar{\sigma}(x, s) = \bar{C}(s)(x+\delta)^{\xi_1} + \bar{D}(s)(x+\delta)^{\xi_2} \quad (6)$$

此即为梯度密度材料中应力波的一个近似解, 其密度 ρ 和弛豫模量 g 须满足上述关系。式中: \bar{C} 和 \bar{D} 为 Laplace 变换后的积分常量。 ξ_1 和 ξ_2 为常微分方程 (5) 的两个特征根, 即:

$$\xi_1 = \frac{p+1 + \sqrt{(p+1)^2 + 4As/\bar{B}}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{p+1 - \sqrt{(p+1)^2 + 4As/\bar{B}}}{2} \quad (7)$$

对于均匀黏弹性介质, 这个解可以退化为文献 [9] 中的式 (12a)。

1.2 垂直入射多层梯度介质中波的传播

首先考虑多层介质由如图 1 所示的双层材料周期性叠合组成, 应力波垂直于材料的接触界面进行传播, 基于半无限长杆中的应力波传播理论研究其波动特性。双层梯度密度材料的厚度分别为 h_1 和 h_2 , 梯度密度和弛豫模量分别表示为: $\rho_i = A_i(x+\delta_i)^{p_i}$, $\bar{g}_i = \bar{B}_i(x+\delta_i)^{p_i+2}$, 其中 A_i , \bar{B}_i , p_i 和 δ_i ($i=1, 2$) 为对应的材料参数。由式 (6), 双层材料中的应力分别表示为:

$$\bar{\sigma}_1(x, s) = \bar{C}_1(x+\delta_1)^{T_1} + \bar{D}_1(x+\delta_1)^{Q_1} \quad (8a)$$

$$\bar{\sigma}_2(x, s) = \bar{C}_2(x-h_1+\delta_2)^{T_2} + \bar{D}_2(x-h_1+\delta_2)^{Q_2} \quad (8b)$$

式中: \bar{C}_1 、 \bar{C}_2 、 \bar{D}_1 和 \bar{D}_2 均为 s 的函数, T_1 、 T_2 、 Q_1 和 Q_2 为双层材料对应的特征根:

$$T_i = \frac{p_i + 1 + \sqrt{(p_i + 1)^2 + 4A_i s / \bar{B}_i}}{2}, \quad Q_i = \frac{p_i + 1 - \sqrt{(p_i + 1)^2 + 4A_i s / \bar{B}_i}}{2} \quad i = 1, 2$$

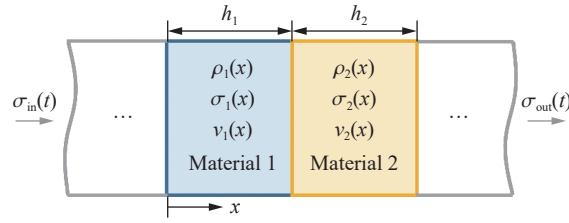


图 1 垂直入射双层周期性叠合介质示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a two-layer periodically-superimposed medium with normal incidence

由控制方程式 (2) 的 Laplace 变换, 可以得到双层材料中粒子速度的表达式分别为:

$$\bar{v}_1(x, s) = \frac{1}{A_1 s} [\bar{C}_1 T_1 (x + \delta_1)^{T_1 - p_1 - 1} + \bar{D}_1 Q_1 (x + \delta_1)^{Q_1 - p_1 - 1}] \quad (9a)$$

$$\bar{v}_2(x, s) = \frac{1}{A_2 s} [\bar{C}_2 T_2 (x - h_1 + \delta_2)^{T_2 - p_2 - 1} + \bar{D}_2 Q_2 (x - h_1 + \delta_2)^{Q_2 - p_2 - 1}] \quad (9b)$$

应力波作用过程中, 双层材料的接触界面满足牛顿第三定律和位移连续条件, 即:

$$\bar{\sigma}_2(h_1, s) = \bar{\sigma}_1(h_1, s) \quad (10a)$$

$$\bar{v}_2(h_1, s) = \bar{v}_1(h_1, s) \quad (10b)$$

基于 Floquet 理论, 双层材料叠合的周期性介质中应力和位移分别满足:

$$\bar{\sigma}_i(n(h_1 + h_2) + x, s) = \bar{\sigma}_i(x, s) e^{-n(h_1 + h_2)\kappa} \quad i = 1, 2 \quad (11a)$$

$$\bar{v}_i(n(h_1 + h_2) + x, s) = \bar{v}_i(x, s) e^{-n(h_1 + h_2)\kappa} \quad i = 1, 2 \quad (11b)$$

式中: n 为双层材料叠合的层数。在第 2 层材料的右边界处, 根据 Floquet 理论对周期性结构的处理方法^[9], 有:

$$\bar{\sigma}_2(h_1 + h_2, s) = \bar{\sigma}_1(0, s) e^{-(h_1 + h_2)\kappa} \quad (12a)$$

$$\bar{v}_2(h_1 + h_2, s) = \bar{v}_1(0, s) e^{-(h_1 + h_2)\kappa} \quad (12b)$$

式中: κ 为结构的特征指数, $\kappa = \sqrt{\rho s/g}$ 。此处, ρ 为双层材料的等效密度, $\rho = (h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2)/(h_1 + h_2)$, 即将叠合材料视为单层均匀的黏弹性材料时的平均密度; g 为双层材料的等效弛豫模量, 由式 (13) 来确定, 即将叠合材料视为单层均匀的黏弹性材料时的等效弛豫模量。

将式 (8)~(9) 代入式 (10)、(12) 中, 可以得到关于 4 个系数 (\bar{C}_1 、 \bar{C}_2 、 \bar{D}_1 和 \bar{D}_2) 的齐次线性方程组。方程有解的充要条件是: 关于 4 个系数的行列式等于 0。由此, 得到如下方程:

$$R_1 e^{-2(h_1 + h_2)\kappa} + R_2 e^{-(h_1 + h_2)\kappa} + R_3 = 0 \quad (13)$$

式中:

$$R_1 = \delta_1^{Q_1 + T_1 - p_1 - 1} \delta_2^{Q_2 + T_2 - p_1 - 1} (Q_1 - T_1)(Q_2 - T_2)$$

$$R_2 = \frac{[\delta_1^{Q_1} (h_1 + \delta_1)^{T_1} - \delta_1^{T_1} (h_1 + \delta_1)^{Q_1}][\delta_2^{Q_2} (h_2 + \delta_2)^{T_2} - \delta_2^{T_2} (h_2 + \delta_2)^{Q_2}][A_1^2 Q_2 T_2 (h_1 + \delta_1)^{p_1 + 1} + A_2^2 Q_1 T_1 (h_2 + \delta_2)^{p_2 + 1}]}{A_1 A_2 \delta_1^{p_1 + 1} \delta_2^{p_2 + 1} (h_1 + \delta_1)^{p_1 + 1} (h_2 + \delta_2)^{p_2 + 1}}$$

$$\frac{[Q_1 \delta_1^{T_1} (h_1 + \delta_1)^{Q_1} - T_1 \delta_1^{Q_1} (h_1 + \delta_1)^{T_1}][Q_2 \delta_2^{T_2} (h_2 + \delta_2)^{Q_2} - T_2 \delta_2^{Q_2} (h_2 + \delta_2)^{T_2}]}{(h_1 + \delta_1)^{p_1 + 1} (h_2 + \delta_2)^{p_2 + 1}}$$

$$\frac{[Q_1 \delta_1^{Q_1} (h_1 + \delta_1)^{T_1} - T_1 \delta_1^{T_1} (h_1 + \delta_1)^{Q_1}][Q_2 \delta_2^{Q_2} (h_2 + \delta_2)^{T_2} - T_2 \delta_2^{T_2} (h_2 + \delta_2)^{Q_2}]}{\delta_1^{p_1 + 1} \delta_2^{p_2 + 1}}$$

$$R_3 = (h_1 + \delta_1)^{Q_1 + T_1 - p_1 - 1} (h_2 + \delta_2)^{Q_2 + T_2 - p_1 - 1} (Q_1 - T_1)(Q_2 - T_2)$$

由此方程可以求解双层材料的等效弛豫模量 g 。

关于 4 个系数 (\bar{C}_1 、 \bar{C}_2 、 \bar{D}_1 和 \bar{D}_2) 的确定, 本文中将结合 SHPB 实验过程来讨论。周风华等^[13]、郑

宇轩等^[14]基于 SHPB 实验原理, 考虑入射波、反射波和透射波之间的关系进行了分析。与入射波比较, 黏弹性介质中反射波和透射波的脉宽和波形结构都有明显的变化, 相互关系非常复杂^[6,8]。因此, 本文中主要考虑波的传播过程, 即基于入射波信号 $\sigma_{in}(t)$ 和透射波信号 $\sigma_{out}(t)$ 来讨论这些系数的确定方法。此时, 双层材料的接触界面应力和位移条件满足式 (10), 试件两端的边界条件须满足:

$$\bar{\sigma}_1(0, s) = \bar{\sigma}_{in}(s) \quad (14a)$$

$$\bar{\sigma}_2(L, s) = \bar{\sigma}_{out}(s) \quad (14b)$$

式中: L 为试件长度。由式 (11a), 有:

$$\bar{\sigma}_2(L, s) = \bar{\sigma}_2(h_2, s)e^{-[L-(h_1+h_2)]k} \quad (15)$$

由此, 联立式 (10)、(14)~(15), 可以基于入射波信号和透射波信号求解 4 个系数 (\bar{C}_1 、 \bar{C}_2 、 \bar{D}_1 和 \bar{D}_2), 得到相应冲击条件下双层材料的动态响应特性, 进而可以研究此双层材料周期性叠合组成的多层介质的动力学行为。

对于 M 层的多层介质, 每种材料的厚度 ($h_i, i=1, 2, \dots, M$)、梯度密度 (ρ_i)、弛豫模量 (\bar{g}_i) 都存在差异, 其内部结构不具有周期性, 式 (13) 不再适用。此时, 需要求解 $2M$ 个系数 (\bar{C}_i 和 \bar{D}_i)。求解过程需要的方程组的组成如下。

(1) 介质内部的接触界面有 $(M-1)$ 个, 应力和位移条件式 (10) 要使用这 $(M-1)$ 个接触界面, 由此, 可建立 $2(M-1)$ 个方程。

(2) 试件两端的边界条件须满足: $\bar{\sigma}_1(0, s) = \bar{\sigma}_{in}(s)$, $\bar{\sigma}_M(h_M, s) = \bar{\sigma}_{out}(s)$, 其中 h_M 为第 M 层的厚度。

联立上述的 $2M$ 个方程来求解系数 \bar{C}_i 和 \bar{D}_i 。

下面将结合梯度钛-硼化钛^[16]和碳纤维增强树脂^[17]两种材料进行分析。

2 梯度密度钛-硼化钛材料的动力学行为

2.1 材料

梯度钛-硼化钛 (TiB₂-TiB-Ti) 陶瓷材料由武汉理工大学材料复合新技术国家重点实验室采用沉积烧结的工艺制备^[16]。梯度材料的第 1 层为纯钛, 后续各层中逐次减少 10% 的钛, 并以同体积的硼化钛进行填充, 由此制备的样品从光亮的白色 (钛) 逐渐转变为暗淡的灰黑色 (硼化钛), 如图 2 所示。随着硼化钛含量的增加, 样品的硬度^[16]逐渐增加, 表现出较强的梯度分布特征。对 3 个样品中的密度分布进行统计, 沿厚度方向均匀地切取 6 个直径 (4±0.1) mm、厚度 (1.5±0.1) mm 的圆柱体测量其密度, 结果如图 2 所示, 随着硼化钛含量的增加, 样品的密度逐渐增加。

采用 $\rho = A(x+\delta)^p$ 对梯度密度分布进行拟合, δ 取为 1.0, 可得到密度递增时的参数为: $A=4.45 \text{ g/cm}^3$, $p=2.0$ 。将此样品反过来, 可得到密度递减时的参数为: $A=4.56 \text{ g/cm}^3$, $p=-2.45$ 。采用相似的形式也可对梯度硬度的分布进行拟合。

应用 SHPB 加载装置分别对单个试件和两个样品组合试件进行动态加载实验, 以对应研究单层梯度介质与双层梯度介质中应力波的传播。实验采用了比较低的冲击速度, 例如本实验中的 5.0 m/s, 以研究介质的黏弹性行为。单个试件尺寸为: 直径 (13±0.1) mm, 厚度 (10±0.1) mm。

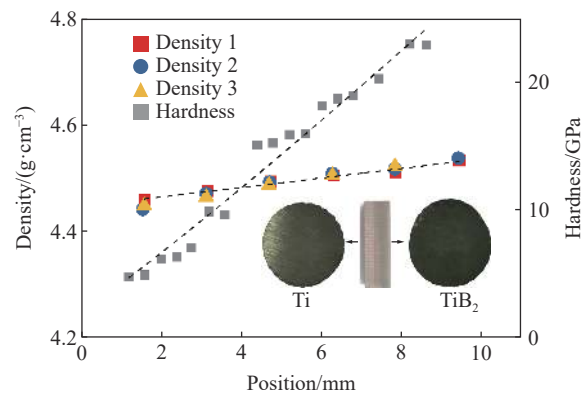


图 2 梯度钛-硼化钛样品中密度和硬度^[16]分布

Fig. 2 Distributions of density and hardness^[16] in gradient Ti-TiB₂ specimen

2.2 单层和双层梯度钛-硼化钛材料的波传播

实验中入射波信号如图 3(a) 所示, 所有实验中基本控制不变。测得的透射信号如图 3(b) 所示, 包含有: 单层密度递增、单层密度递减、双层密度递增叠合、双层密度递减叠合、单层密度递增与单层密度递减叠合, 以及单层密度递减与单层密度递增叠合等 6 组实验, 每组重复 3~5 次。

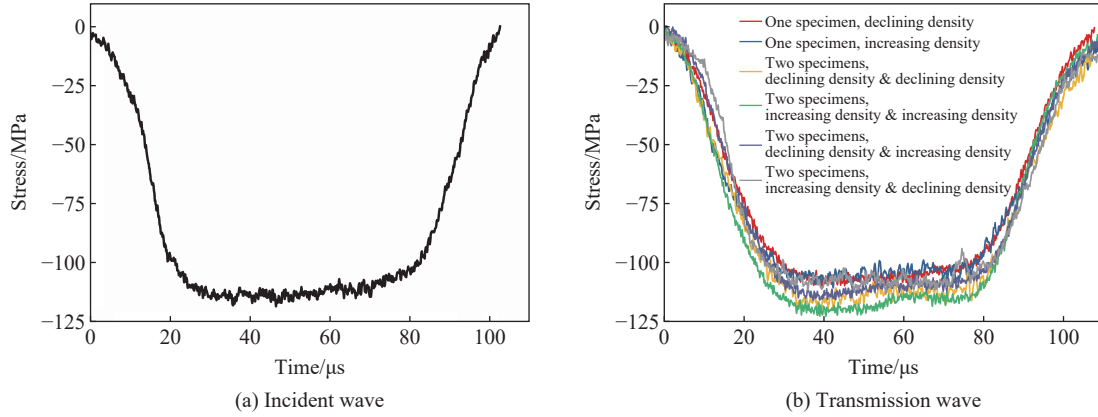


图 3 梯度钛-硼化钛实验波形

Fig. 3 Recorded wave profiles in the gradient Ti-TiB₂ specimens

基于上述理论分析, 对于单层试件, 由解的形式 (6) 和试件两端入射波信号 $\sigma_{in}(t)$ 、透射波信号 $\sigma_{out}(t)$, 可以得到:

$$\bar{C} = \frac{1}{(L+\delta)^{\xi_1-\xi_2} - \delta^{\xi_1-\xi_2}} \left[\frac{\bar{\sigma}_{out}(s)}{(L+\delta)^{\xi_2}} - \frac{\bar{\sigma}_{in}(s)}{\delta^{\xi_2}} \right] \quad (16a)$$

$$\bar{D} = \frac{1}{(L+\delta)^{\xi_2-\xi_1} - \delta^{\xi_2-\xi_1}} \left[\frac{\bar{\sigma}_{out}(s)}{(L+\delta)^{\xi_1}} - \frac{\bar{\sigma}_{in}(s)}{\delta^{\xi_1}} \right] \quad (16b)$$

对于双层材料组成的试件, $L=h_1+h_2$ 。联立式 (10)、(14)~(15), 可以得到:

$$\bar{C}_1 = \frac{\bar{\sigma}_{in}[A_1(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1}[T_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - Q_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}] + A_2Q_1\delta_2^{\rho_2+1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}[\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - \delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}]}{A_1[\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1} - \delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1}][Q_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - T_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}] + A_2[\delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - \delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}][Q_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - T_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}]} \quad (17a)$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\bar{\sigma}_{in}[A_1(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1}[Q_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - T_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}] + A_2T_1\delta_2^{\rho_2+1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}[\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - \delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}]}{A_1[\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1} - \delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1}][Q_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - T_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}] + A_2[\delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - \delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}][Q_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - T_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}]} \quad (17b)$$

$$\bar{C}_2 = \frac{\bar{\sigma}_{out}[A_2Q_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2+1}[\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - \delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}] + A_2\delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}[Q_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - T_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}]}{A_1[\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1} - \delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1}][Q_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - T_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}] + A_2[\delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - \delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}][Q_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - T_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}]} \quad (17c)$$

$$\bar{D}_2 = \frac{\bar{\sigma}_{out}[A_1T_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2+1}[\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - \delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}] + A_2\delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}[T_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - Q_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}]}{A_1[\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1} - \delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1+\rho_1+1}][Q_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - T_2\delta_2^{\xi_2}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}] + A_2[\delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2} - \delta_2^{\xi_2+\rho_2+1}(h_2+\delta_2)^{\xi_2}][Q_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1} - T_1\delta_1^{\xi_1}(h_1+\delta_1)^{\xi_1}]} \quad (17d)$$

将不同试件的入射波信号和透射波信号代入式 (16) 或式 (17) 进行计算。由于入射波信号 $\sigma_{in}(t)$ 与透射波信号 $\sigma_{out}(t)$ 均为离散的数据, 进行 Laplace 数值逆变换计算比较麻烦, 因此, 为简化分析过程, 对波形的加载部分均采用 $A \sin(\omega t)$ 的形式进行拟合, 然后进行 Laplace 逆变换。图 4 为单层试件的分析结果, 其中实线为采用 SHPB 实验的三波法进行处理的结果, 虚线为上述理论模型计算的结果, 分别进行了试件的撞击端 ($x=0$)、支撑端 ($x=L$), 以及试件中部 ($x=L/2$) 的应力波形的计算。由此可见: (1) 三个位置计算得到的应力-时间曲线有一定的差异, 说明此梯度钛-硼化钛陶瓷材料中内界面的存在, 使得梯度材料表现出一定的黏性, 虽然还很弱; (2) 计算得到的应力-时间曲线与 SHPB 三波法处理得到的结果非常接近, 此时反射波的波形结构比较简单, 黏性对 SHPB 三波法分析影响不大。

图 5 为双层材料叠合试件的计算结果。实线为采用 SHPB 实验的三波法进行处理的结果, 虚线为计算结果, 包含了试件的撞击端 ($x=0$)、支撑端 ($x=2L$), 以及两个试件之间 ($x=L$) 的计算波形, 以作对比。由此可见: 三波法处理得到的结果与两个试件中部的计算结果比较接近; 3 个位置计算得到的应力-时间曲

线的幅值有一定的差别, 且密度递减介质中随传播距离的增加, 应力幅值减小的幅度相对较大。虽然单层梯度钛-硼化钛陶瓷材料中由于内界面的存在产生的黏性不是很强, 但是双层密度梯度材料的叠合制造了新的宏观界面, 使叠合介质整体表现出更强的黏弹性特征, 这主要表现在应力幅值和应力波形的上升过程随传播距离的增加都出现了明显变化, 反映出一种介质中多种微结构组成导致的黏弹性机制^[12]。叠合试件的黏性使 SHPB 三波法分析结果与材料的性能之间存在一定的差异。

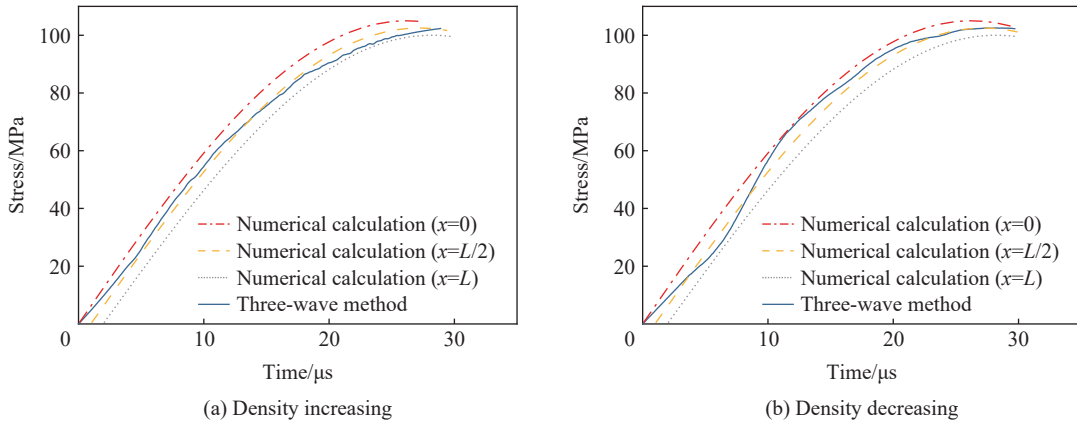


图 4 单层试件中的应力波形

Fig. 4 Stress-time curves in single-layer specimens

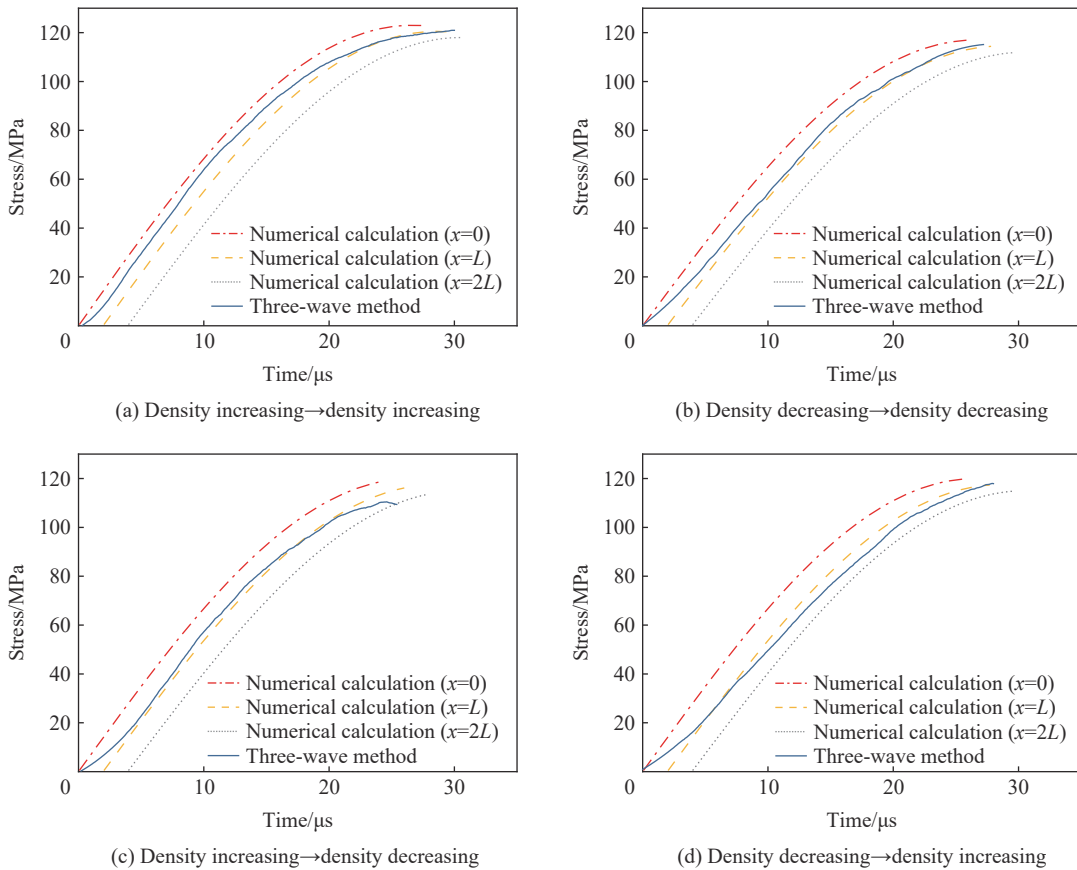


图 5 双层叠合试件中的应力波形

Fig. 5 Stress-time curves in two-layer superimposed specimens

3 碳纤维增强树脂材料的动力学行为

3.1 复合材料

碳纤维增强环氧树脂材料^[17]中碳纤维粉末的型号为 XGCP-300, 密度为 1.75 g/cm^3 。在环氧树脂中加入 4 种质量分数 (0%、10%、30%、50%) 的碳纤维粉末来制备 4 种密度的复合材料, 制得的材料如图 6 所示, 随着碳纤维含量的增加, 样品的密度显著增加, 即从质量分数 0% 时密度为 $(1.17 \pm 0.1) \text{ g/cm}^3$, 增加到质量分数 10% 时密度为 $(1.21 \pm 0.1) \text{ g/cm}^3$ 、质量分数 30% 时密度为 $(1.35 \pm 0.2) \text{ g/cm}^3$, 最后增加到质量分数 50% 时密度为 $(1.57 \pm 0.2) \text{ g/cm}^3$ 。环氧树脂 (碳纤维含量 0%) 弛豫模量为 $(1.20 \pm 0.1) \text{ GPa}$, 其布洛克菲尔德黏度为 $800 \text{ MPa}\cdot\text{s}$ 。随碳纤维含量增加, 弛豫模量增加到质量分数为 10% 时的 $(1.24 \pm 0.1) \text{ GPa}$ 、质量分数为 30% 时的 $(1.38 \pm 0.2) \text{ GPa}$, 最后增加到质量分数为 50% 时的 $(1.61 \pm 0.2) \text{ GPa}$ 。同时, 随着碳纤维粉末含量的增加, 样品由透明状逐渐变为黑色; 样品的灰度统计基于试样表面显微镜拍摄图片分析处理而来, 灰度分布随碳纤维含量的增加向灰度值较小的黑色区域移动, 灰度分布区域随含量的增加越来越集中, 样品的均匀性相对也较好。碳纤维增强环氧树脂试件表现出明显的黏性特性; 但随着碳纤维含量的增加, 试件显得越来越脆^[17]。

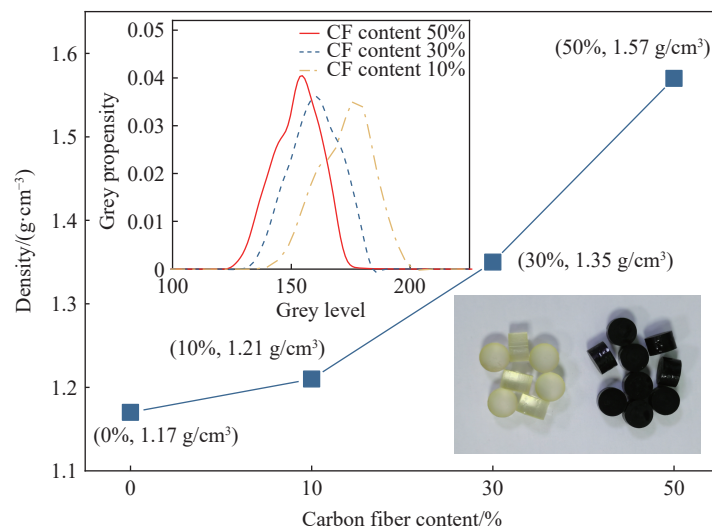


图 6 制备的碳纤维增强树脂复合材料的密度随碳纤维质量分数的变化

Fig. 6 Density change of prepared carbon-fiber reinforced resin composites with carbon fiber mass fraction

梯度密度黏弹性材料的制备很困难, 初始拟采用不同密度的多层黏弹性材料来叠合成梯度密度介质, 但是冲击实验成功率非常低, 重复性也不好。因此, 将仅对双层黏弹性材料叠合介质应用 SHPB 加载装置进行动态加载实验, 以研究双层黏弹性介质组成的近似“梯度密度”试件中应力波的传播。实验采用比较低的冲击速度, 例如 5.0 m/s 。单个试件尺寸为: 直径 $(8 \pm 0.1) \text{ mm}$, 厚度 $(4 \pm 0.1) \text{ mm}$ 。

3.2 双层碳纤维增强树脂材料中的波传播

图 7 为双层材料叠合的近似“梯度密度”试件的计算结果。实线为 SHPB 实验三波法处理的结果, 以作对比; 分别进行了试件的撞击端 ($x=0$)、支撑端 ($x=2L$), 以及两个试件之间 ($x=L$) 的应力波形的计算。图 7(a)、(b)、(c) 所示双层叠合材料分别对应碳纤维质量分数由 50% 减小到 30%、10%、0%; 图 7(d)、(e)、(f) 所示双层叠合材料分别对应碳纤维质量分数由 0% 增加到 10%、30%、50%。由此可见: 三波法处理得到的结果与两个试件中部的计算结果比较接近; 三个位置计算得到的应力-时间曲线的幅值有较大的差别, 且随传播距离的增加, 应力幅值出现较大的减小幅度, 表现出比单层材料更强的黏弹性特征。这种黏性特性包含材料本身的黏性和微结构组成导致的黏性等两种机制。叠合试件的黏性使 SHPB 三波法分析结果与材料的性能之间存在较大的差异: 由于 SHPB 三波法选取了入射杆与透射杆得到的入射

波、反射波与透射波, 在进行计算时, 得到的是两杆之间试件应力情况的平均值。而实验所选取的材料具有变密度特性, 而且对于碳纤维增强树脂材料, 其两杆之间的密度变化较大, 在试件的不同位置处, 其应力会有一些的差距。因此采用 SHPB 三波法分析得到的平均应力不能较好地反映试件密度的变化特性, 也较难得到试件不同位置的应力变化情况。

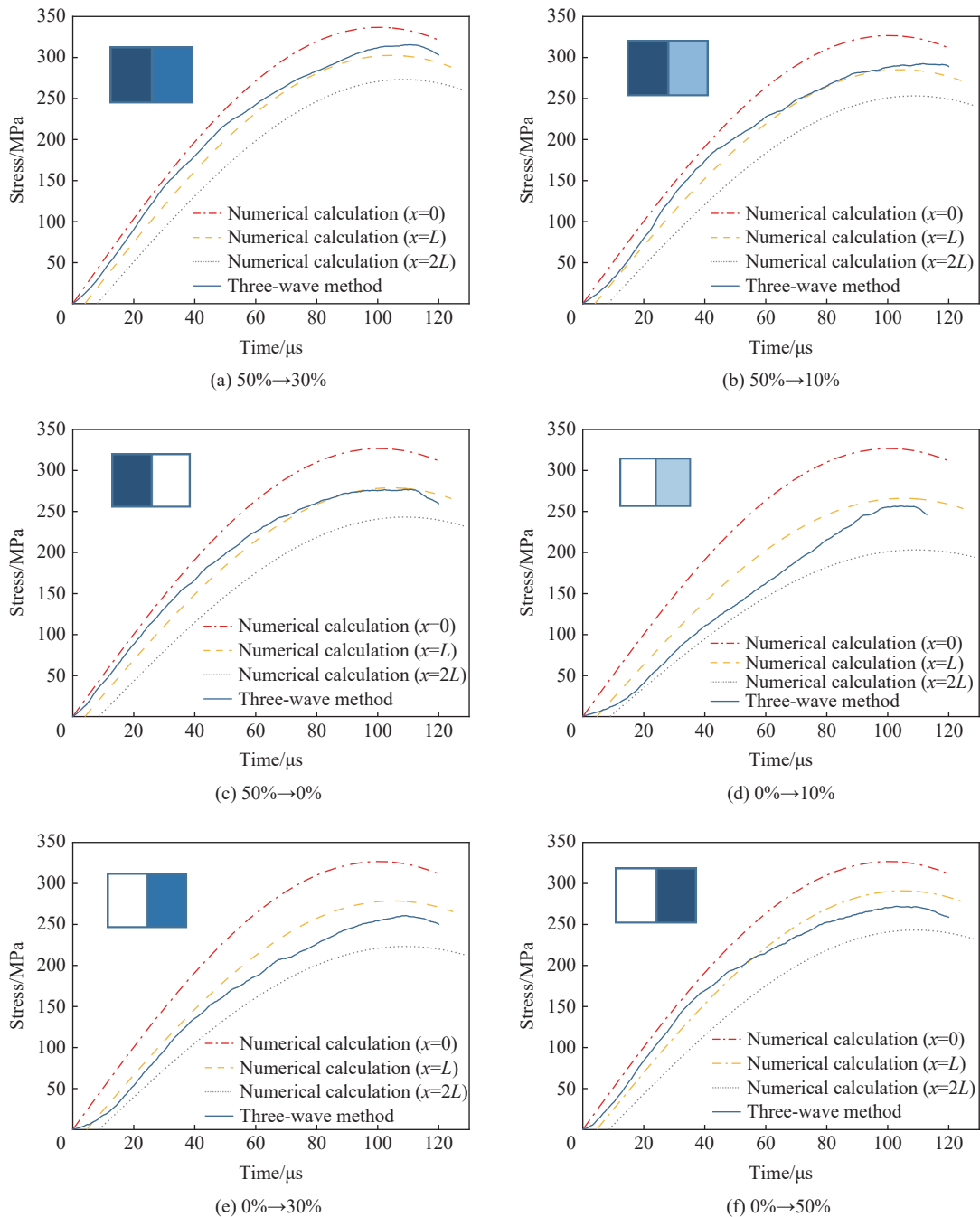


图 7 双层碳纤维增强树脂叠合试件中的应力波形

Fig. 7 Stress-time curves in two-layer superimposed specimens of carbon fiber reinforced resin

将双层材料叠合的试件等效成单层等效的梯度密度黏弹性介质。首先, 采用 $\rho = A(x + \delta)^p$ 的形式对近似梯度密度试件进行拟合, δ 取为 1.0, 可以得到密度递减时的参数分别为: 50% → 30% 时, $A = 1.57 \text{ g/cm}^3$, $p = -18.95$; 50% → 10% 时, $A = 1.57 \text{ g/cm}^3$, $p = -32.69$; 50% → 0% 时, $A = 1.57 \text{ g/cm}^3$, $p = -36.91$ 。以

及密度递增时的参数分别为: 0% → 10% 时, $A=1.17 \text{ g/cm}^3$, $p=4.22$; 0% → 30% 时, $A=1.17 \text{ g/cm}^3$, $p=17.96$; 0% → 50% 时, $A=1.17 \text{ g/cm}^3$, $p=36.91$ 。其次, 采用式 (13) 求解双层材料的等效弛豫模量 g 。由此, 计算等效的梯度密度黏弹性介质中波的传播, 结果如图 8 所示, 图中只列出了两种密度差别较大的情况, 即 50% → 0%(递减) 和 0% → 50%(递增)。可以看出: 两种计算方法在试件两侧得到的结果基本一致; 在试件夹层中间的位置, 两种计算方法得到的结果差别不是很大, 但有一些差异, 随密度梯度增大, 这种差异也越大。这体现了叠合试件中各种微结构对应力波形产生了影响。

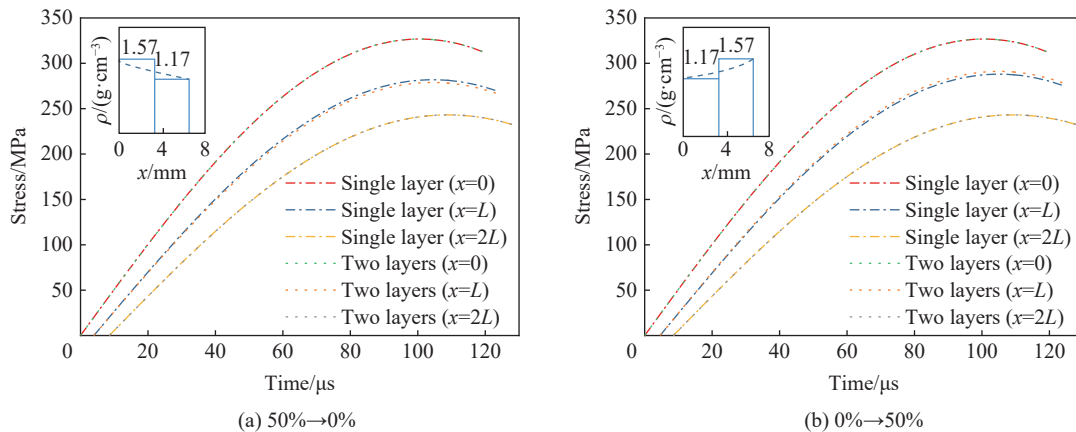


图 8 等效梯度密度材料和双层叠合试件中的应力波形的对比

Fig. 8 Comparison of stress-time curves in the equivalent gradient-density materials with those in two-layer superimposed specimens

4 结 论

推导了多层梯度密度黏弹性材料中波传播分析的理论解, 结合 SHPB 动态实验技术, 分析了梯度钛-硼化钛材料与碳纤维增强树脂材料中波的传播过程, 主要结论如下。

(1) 当密度和材料的弹性常数满足一定的形式时, 可得到梯度密度黏弹性材料中波传播特性的一个近似解。原则上, 拟合相关材料系数, 此解能够得到广泛应用。将此解应用于 M 层梯度密度黏弹性材料, 结合层间的应力与位移连续条件和两侧的边界条件, 可以得到多层介质中波传播的理论解。

(2) 将此理论解应用于单层和双层梯度钛-硼化钛材料, 发现: 单层梯度钛-硼化钛材料中存在内界面, 使得其表现出较弱的黏性, 但这种黏性对 SHPB 三波法分析影响不大; 而双层材料的叠合产生了新的宏观界面, 使其整体表现出更强的黏弹性特征, 叠合试件的黏性使 SHPB 三波法分析结果与材料的性能之间存在一定的差异。

(3) 将此理论解应用于双层碳纤维增强树脂材料, 发现: 随传播距离的增加, 碳纤维增强树脂材料中的应力幅值减小较大, 表现出更强的黏弹性特征, 此过程包括材料本身的黏性和微结构组成导致的黏性等两种机制。叠合试件的黏性使 SHPB 三波法分析结果与材料的性能之间存在较大的差异。

基于此分析方法, 为分析材料内部界面的实际情况, 可进一步建立界面斜入射的情况。由于试样制备比较困难, 本文的相关结论尚需更多验证和提高。

参考文献:

- [1] 徐松林, 刘永贵, 席道瑛, 等. 弹性波在含双裂纹岩体中的传播分析 [J]. *地球物理学报*, 2012, 55(3): 944–952. DOI: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.03.024.
XU S L, LIU Y G, XI D Y, et al. Analysis of propagation of elastic wave in rocks with double-crack model [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2012, 55(3): 944–952. DOI: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.03.024.
- [2] 谭子翰, 徐松林, 刘永贵, 等. 含多种尺寸缺陷岩体中的弹性波散射 [J]. *应用数学和力学*, 2013, 34(1): 38–48. DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.005.

- TAN Z H, XU S L, LIU Y G, et al. Scattering of elastic waves by multi-size defects in rock mass [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(1): 38–48. DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.005.
- [3] 胡时胜, 王礼立, 宋力, 等. Hopkinson 压杆技术在中国的发展回顾 [J]. *爆炸与冲击*, 2014, 34(6): 641–657. DOI: 10.11883/1001-1455(2014)06-0641-17.
- HU S S, WANG L L, SONG L, et al. Review of the development of Hopkinson pressure bar technique in China [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2014, 34(6): 641–657. DOI: 10.11883/1001-1455(2014)06-0641-17.
- [4] ZHAO H, GARY G, KLEPACZKO J R. On the use of a viscoelastic split Hopkinson pressure bar [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1997, 19(4): 319–330. DOI: 10.1016/S0734-743X(96)00038-3.
- [5] BACON C. An experimental method for considering dispersion and attenuation in a viscoelastic Hopkinson bar [J]. *Experimental Mechanics*, 1998, 38(4): 242–249. DOI: 10.1007/BF02410385.
- [6] 王宝珍, 胡时胜. 猪肝动态力学性能及本构模型研究 [J]. *力学学报*, 2017, 49(6): 1399–1408. DOI: 10.6052/0459-1879-17-238.
- WANG B Z, HU S S. Research on dynamic mechanical response and constitutive model of porcine liver [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1399–1408. DOI: 10.6052/0459-1879-17-238.
- [7] 朱珏, 胡时胜, 王礼立. SHPB 试验中粘弹性材料的应力均匀性分析 [J]. *爆炸与冲击*, 2006, 26(4): 315–322. DOI: 10.11883/1001-1455(2006)04-0315-08.
- ZHU J, HU S S, WANG L L. Analysis on stress uniformity of viscoelastic materials in split Hopkinson bar tests [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2006, 26(4): 315–322. DOI: 10.11883/1001-1455(2006)04-0315-08.
- [8] 王礼立. 应力波基础 [M]. 2 版. 北京: 国防工业出版社, 2005: 148–177.
- WANG L L. Foundation of stress waves [M]. 2nd ed. Beijing: National Defense Industry Press, 2005: 148–177.
- [9] TING T C T, MUKUNOKI I. A theory of viscoelastic analogy for wave propagation normal to the layering of a layered medium [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1979, 46(2): 329–336. DOI: 10.1115/1.3424550.
- [10] TEDESCO J W, LANDIS D W. Wave propagation through layered systems [J]. *Computers & Structures*, 1989, 32(3/4): 625–638. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90351-9.
- [11] HAN C, SUN C T. Attenuation of stress wave propagation in periodically layered elastic media [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 243(4): 747–761. DOI: 10.1006/jsvi.2000.3420.
- [12] MUKERJI T. Waves and scales in heterogeneous rocks [D]. Stanford: Stanford University, 1995.
- [13] 周风华, 陈亮. SHPB 实验中粘弹性试件内部应力波的传播 [J]. *固体力学学报*, 2010, 31(2): 149–156. DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2010.02.006.
- ZHOU F H, CHEN L. Stress wave propagations in viscoelastic specimen during SHPB tests [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, 31(2): 149–156. DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2010.02.006.
- [14] 郑宇轩, 陈亮, 周风华, 等. Laplace 变换法研究 SHPB 实验中试件的黏弹性波传播问题 [J]. *力学学报*, 2014, 46(6): 843–852. DOI: 10.6052/0459-1879-14-002.
- ZHENG Y X, CHEN L, ZHOU F H, et al. Using Laplace transform to solve the viscoelastic wave problems in the SHPB experiments [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014, 46(6): 843–852. DOI: 10.6052/0459-1879-14-002.
- [15] 张鸣, 王道荣, 单俊芳, 等. 石英纤维布叠层材料冲击性能研究 [J]. *实验力学*, 2018, 33(2): 183–193. DOI: 10.7520/1001-4888-17-201.
- ZHANG M, WANG D R, SHAN J F, et al. Investigation on impact properties of quartz fiber cloth laminated material [J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2018, 33(2): 183–193. DOI: 10.7520/1001-4888-17-201.
- [16] 柯文轩. TiB₂-TiB-Ti 梯度材料的制备与力学性能研究 [D]. 武汉: 武汉理工大学, 2013.
- KE W X. Fabrication and mechanical properties of TiB₂-TiB-Ti functionally gradient materials [D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2013.
- [17] 张鸣. 变密度粘弹性介质中弹性波传播的理论和实验研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2018.
- ZHANG M. Theoretical and experimental study on the propagation of stress wave in viscoelastic medium with variable density [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2018.
- [18] 周光泉, 刘孝敏. 粘弹性理论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1996.
- ZHOU G Q, LIU X M. Viscoelastic theory [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1996.

(责任编辑 曾月蓉)