

# 钨合金弹丸侵彻钢靶的数值模拟方法

位国旭<sup>1</sup>, 崔浩<sup>1</sup>, 周昊<sup>1</sup>, 杨贵涛<sup>1</sup>, 郭锐<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学机械工程学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 为了更好地量化表征钨合金弹丸侵彻靶板过程, 分别采用 FEM、SPG、SPH、FE-SPH 自适应数值仿真方法, 对钨合金弹丸侵彻 Q235A 钢靶开展了数值仿真计算, 对比了四种数值仿真方法在描述弹丸侵彻穿靶后, 弹丸剩余速度、靶板穿孔孔径以及弹丸穿靶后二次破片生成及其分布方面的优势和不足。结果表明: 在描述弹丸剩余速度方面, 由于 FEM 方法在处理材料失效问题时基于单元侵蚀算法, 因此 FEM 方法以及 FE-SPH 自适应方法严格依赖于失效准则以及失效参数的选择, 而 SPG 方法在键失效模式下无需调整失效参数就可以得到相对准确的结果; 在描述靶板穿孔孔径上, FEM 以及 FE-SPH 自适应方法具有精确的物质边界, 可以精确刻画穿孔形貌特征, 但不同失效准则下的靶板穿孔直径相差较大; SPG 方法对失效参数不敏感, 可以准确预测靶板的穿孔直径; 在弹丸穿靶后二次破片的生成及其分布方面, FE-SPH 自适应以及 SPH 方法均能对二次破片进行表征, FE-SPH 自适应方法可以直接获取大质量破片信息, 但相比于 SPH 方法, 求解效率低下。

**关键词:** 数值模拟方法; SPG; SPH; 二次破片; 侵彻

中图分类号: O383; TJ012.4

国标学科代码: 13035

文献标识码: A

## Research on numerical simulation method of tungsten alloy projectile penetrating steel target

WEI Guoxu<sup>1</sup>, CUI Hao<sup>1</sup>, ZHOU Hao<sup>1</sup>, YANG Guitao<sup>1</sup>, GUO Rui<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, Jiangsu, China)

**Abstract:** To better quantify and characterize the process of tungsten alloy projectiles penetrating target plates, Finite Element Method (FEM), Smoothed Particle Galerkin (SPG), Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), and FE-SPH adaptive numerical simulation methods were applied to simulate the penetration of tungsten alloy projectiles into Q235A steel targets. The advantages and limitations of these four methods were compared in predicting the residual velocity of projectiles, the perforation diameter of target plates, and the formation and distribution of secondary fragments resulting from penetration. The FEM method, using an element erosion algorithm, modeled material failure by removing failed elements. The SPG method relied on a bond fracture model to simulate failure without deleting particles, ensuring stability and reduced sensitivity to parameters. SPH, as a mesh-free method, efficiently simulated large deformations and fragmentation. The FE-SPH adaptive method integrated FEM and SPH to balance accuracy in boundary modeling with the capability to represent fragments formation. The results show that, in describing the residual velocity of the projectile, FEM and FE-SPH adaptive methods are highly dependent on the selection of failure criteria and parameters, as FEM employs an element erosion algorithm to model

\*收稿日期: 2024-05-20; 修回日期: 2024-12-12;

基金项目: 国家自然科学基金(12202200, 11972197, 21875109); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX23\_0510); 中国博士后科学基金资助项目(2022M711641);

第一作者: 位国旭(1997-), 男, 博士研究生. E-mail: wei\_guoxu@163.com;

通信作者: 郭锐(1980-), 男, 博士, 教授. E-mail: guorui@njust.edu.cn.

material failure. The SPG method, based on a bond fracture model, simulates material failure by breaking bonds without removing particles, making it less sensitive to failure parameters and capable of achieving accurate results without parameter adjustments. In predicting perforation diameter, FEM and FE-SPH adaptive methods accurately represent material boundaries and perforation morphology, although the perforation diameter varies significantly under different failure criteria. The SPG method, being less dependent on failure parameters, also reliably predicts the perforation diameter. In terms of secondary fragments generation and distribution, both FE-SPH adaptive and SPH methods effectively characterize these phenomena. While the FE-SPH adaptive method provides detailed information on large fragments, it is less computationally efficient than the SPH method. The advantages and limitations of each numerical simulation method were analyzed, providing insights into their suitability for various aspects of projectile–target interactions.

**Keywords:** numerical simulation method; Smoothed Particle Galerkin (SPG); Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH); secondary fragments; penetration

录用稿件，  
非最终出版稿

钨合金球形弹丸作为杀爆类战斗部的主要毁伤元，其对装甲目标的毁伤能力主要体现在弹丸穿靶后的剩余速度、靶板穿孔直径、以及弹丸穿靶后产生的二次破片等方面。为了实现弹丸对靶板毁伤能力的精确表征，国内外学者开展了大量的弹丸侵彻靶板的试验以及数值仿真研究<sup>[1-8]</sup>。

张钰龙<sup>[5]</sup>等通过量纲分析法对钨球侵彻 Q235 钢靶的入口孔径随着靶速度的试验结果进行了分析，得到了相应的数学表达式；何杨<sup>[1]</sup>等采用 LS-DYNA 数值仿真软件中的有限元单元法(Finite Element Method, FEM)方法对大质量破片侵彻陶瓷/钢复合装甲过程进行数值模拟，得到了破片初速、装甲倾角对破片极限穿透速度和后效威力的影响规律；徐豫新<sup>[9]</sup>等采用 AUTODYN 数值仿真软件中的 FEM 方法对钨球侵彻有限厚 Q235A 钢开展了数值仿真计算，数值模拟得到的弹道极限速度与试验结果误差较小；邸德宁<sup>[10]</sup>等、WEN<sup>[11-13]</sup>等采用 AUTODYN 软件中的光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)方法模拟了球形弹丸撞击薄靶形成的破片云，数值仿真结果与 PIEKUTOWSKI<sup>[15]</sup>的实验结果吻合较好，证明了 SPH 方法在模拟弹丸穿靶后形成二次破片方面的有效性；近些年来，He<sup>[14]</sup>等采用有限元-光滑粒子流体动力学(Finite Element-Smoothed Particle Hydrodynamics, FE-SPH)自适应耦合方法开展了球形弹丸超高速侵彻的数值仿真研究，该方法不仅适用于均质靶板，结合细观建模技术，同样可以适用于纤维增强复合材料的仿真建模<sup>[16]</sup>，完美再现了二次破片云的形成过程；Yin<sup>[17]</sup>等分别采用 FEM、光滑粒子伽辽金(Smoothed Particle Galerkin, SPG)方法计算得到了刚性弹丸侵彻超高韧性胶结复合材料(UHTCC)靶板的剩余速度，通过与试验结果对比发现 SPG 方法对失效参数不敏感，相比较于 FEM 方法具有较高的鲁棒性。Wu<sup>[18]</sup>等研究了 FEM 方法的网格大小、SPG 方法的粒子间距、失效参数等对弹丸穿靶后剩余速度的影响，发现 FEM 方法存在严重的失效准则依赖性，与 SPG 方法有很大差异。考虑到不同数值仿真方法在表征弹丸对钢靶的毁伤效应方面独具优势，数值仿真方法的选择以及材料失效参数的选取将严重影响数值仿真结果的准确性，因此开展不同数值模拟方法、失效准则以及失效参数下的系统研究具有重要意义。

本文分别采用 LS\_DYNA 求解器中的 FEM、SPH、SPG 以及 FE-SPH 自适应四种数值仿真方法，对钨合金弹丸侵彻 Q235 钢靶开展了数值仿真计算，并结合弹道试验数据，讨论了材料失效参数对仿真结果的影响，对比了四种数值仿真方法在描述弹丸剩余速度、靶板穿孔孔径以及弹丸穿靶后二次破片的生成等方面的优势和不足。

## 1 试验研究

### 1.1 试验设计

为了获取钨合金弹丸侵彻钢板的弹道试验数据，设计了如图 1 所示的弹道试验装置。该装置由 14.5 mm 口径弹道枪、区间测速装置、靶板、验证靶以及高速摄像组成。为保证弹丸在膛内的正确运动，试验时需要将弹丸和弹托结合在一起发射，出枪口后通过气动脱壳方式使弹丸与弹托分离，通过调整发射药药量控制弹丸的初速度。弹丸的着靶速度、剩余速度由区间测速装置获取，利用高速摄像捕获弹丸的穿靶过程，在靶板后方一定距离处设置验证靶以获取弹丸穿靶后二次破片的散布情况，当在靶板后方设置验证靶时，靶板后方不再设置区间测速装置。

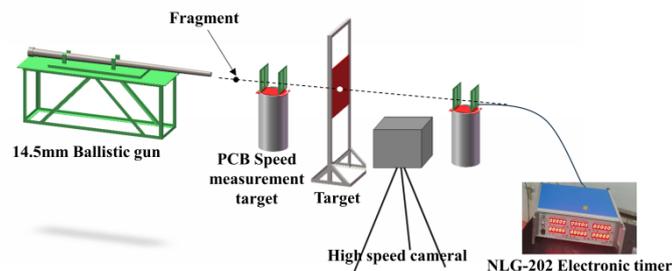


图 1 试验布置示意图

Fig.1 Sketch of the experimental setup

钨合金弹丸材料为 93W，直径 9.5 mm，密度 17.6 g/cm<sup>3</sup>，弹托材料为铝合金。靶板采用尺寸为 540 mm×540 mm，厚度分别为 6 mm、4 mm 的 Q235A 钢板。验证靶采用尺寸为 540 mm×540 mm×1 mm 的 2Al2 铝板。高速摄像采样频率设置为 16000~20000Hz。

## 1.2 试验结果

针对 4 mm、6 mm 厚 Q235 钢板共进行了 8 次实验，钨合金弹丸侵彻不同厚度靶板的试验结果如表 1 所示。

表 1 钨合金弹丸侵彻不同厚度 Q235 钢板的试验结果

Table 1 Experimental results of tungsten alloy projectile penetrating Q235 steel plate of different thickness

实验序号	靶板厚度/mm	着靶速度/(m·s <sup>-1</sup> ) 1)	剩余速度/(m·s <sup>-1</sup> ) 1)	穿孔孔径/mm
1	4	1092.9	888.9	11.72
2	4	1169.6	952.4	12.38
3	4	1204.8	980.4	12.72
4	4	1190.5	—	12.58
5	6	1197.6	—	12.95
6	6	1197.6	865.8	13
7	6	751.9	489	9.95
8	6	619.2	346.6	9.7

注: (1) “—”表示增加了验证靶，未对剩余速度进行测量

(2)穿孔孔径为靶板入口直径与出口直径的平均值

图 2 为弹丸分别以 1197.6 m/s、751.9 m/s 的着靶速度  $v_0$  侵彻 6 mm 厚 Q235 钢板时靶板的穿孔形貌。钨合金弹丸侵彻 Q235 钢板时，靶板正面和背面均出现翻唇，靶板呈韧性破坏模式。着速较高时，由于弹丸发生变形侵蚀，导致穿孔孔径较大；随着着靶速度的降低，弹丸由侵蚀侵彻逐渐转变为塑性侵彻甚至接近刚性侵彻<sup>[4]</sup>，靶板孔壁变得越来越光滑，穿孔孔径逐渐减小。

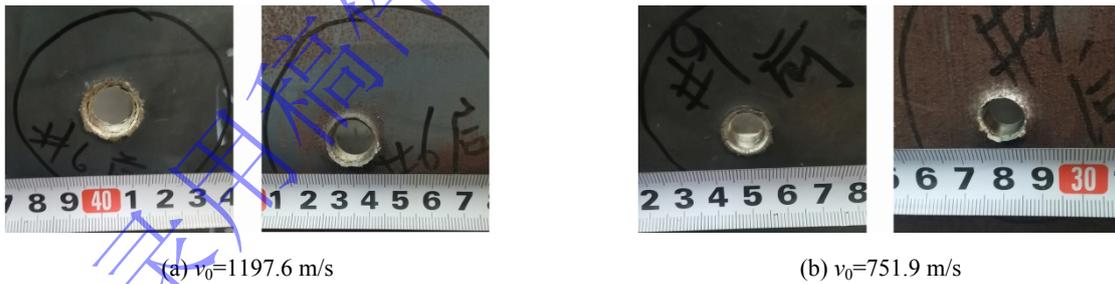


图 2 靶板的出入口形貌

Fig.2 The entrance and exit morphology of the target plate

## 2 数值模拟研究

### 2.1 FEM 方法

#### 2.1.1 概述

拉格朗日(Lagrangian)算法作为传统的有限元方法，能够精确地描述物质边界的运动，因此广泛应用于结构的碰撞、侵彻、穿甲等领域。在爆炸或冲击载荷作用下，材料会经历高应变率下的大变形过程，从而导致网格产生扭曲、畸变，在使用有限元 Lagrangian 方法解决此类问题时，结构大变形

情况下的网格畸变，导致时间步长急剧减小，求解效率下降。因此必须使用单元侵蚀技术将变形较大的网格删除，但随着网格大量的删除，求解精度也会下降。

### 2.1.2 数值仿真模型及参数选择

为了实现对钨合金弹丸侵彻靶板过程的精确表征，采用 LS\_DYNA 数值仿真软件对钨合金弹丸侵彻 Q235A 钢板过程开展了数值模拟，钨合金弹丸尺寸、靶板厚度与试验保持一致。试验后靶板变形仅局限在 2~3 倍弹丸直径范围内，同时为了减少靶板边界对仿真结果的影响，因此靶板直径设置为弹丸直径的 8 倍。同时，为提高计算效率，仅对靶板中心区域网格进行加密处理，靶板加密区域及弹丸网格尺寸均为 0.4 mm，弹、靶的网格划分情况如图 3 所示。

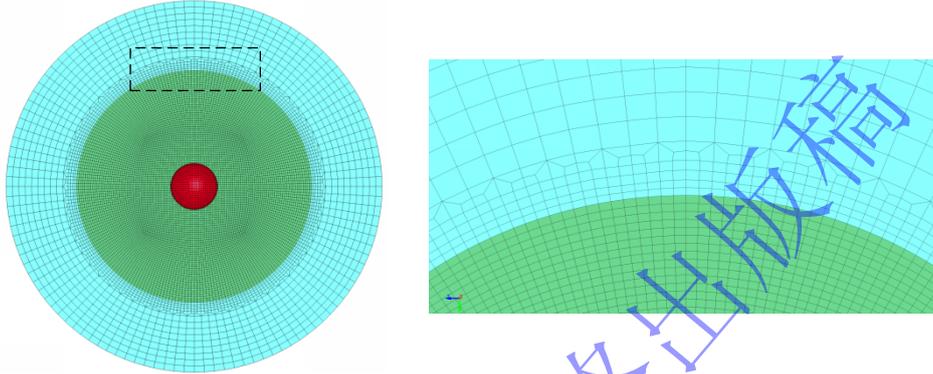


图 3 FEM 方法数值仿真模型

Fig.3 Numerical simulation model of FEM method

弹丸、靶板材料与试验保持一致，均选用 Johnson-Cook 本构模型和 Mie-Gruneisen 状态方程，弹靶材料参数取自文献[9,19]。采用等效塑性应变失效准则、Johnson-Cook 失效准则来模拟侵彻过程中弹、靶材料的失效破坏，具体参数见下文。

## 2.2 SPG 方法

### 2.2.1 概述

光滑粒子伽辽金(Smoothed Particle Galerkin,SPG)算法是一种完全的无网格方法，采用直接点积分(DNI)的伽辽金法，按照位移光滑理论推导出了数值稳定性的增强项，抑制了弱形式常规 DNI 导致的沙漏模式，极大稳定了时间步长，从而提高了求解效率。与 SPH 这类基于配点法的无网格方法相比，SPG 算法无拉伸不稳定和零能伪模态问题，与 FEM 方法相比，SPG 算法在处理大变形破坏与失效问题时，使用一种基于键的失效机制<sup>[20, 21]</sup>(类似于化学键的断开)，来处理材料的断裂破坏，无需删除节点和单元，从而保证了系统的能量守恒。

### 2.2.2 数值仿真模型及参数选择

采用 LS\_DYNA 软件中双精度版本的 R13 求解器，对钨合金弹丸侵彻 Q235A 钢板过程开展数值模拟，仿真模型与 FEM 方法相同，为提高求解效率，仅对弹丸以及靶板中心区域采用 SPG 粒子离散，靶板外围仍然采用有限元网格离散<sup>[22]</sup>，中心区域 SPG 粒子与外围靶板网格采用

\*CONTACT\_TIED\_NODE\_TO\_SURFACE 的点、面固定连接算法，数值仿真模型如图 4 所示。

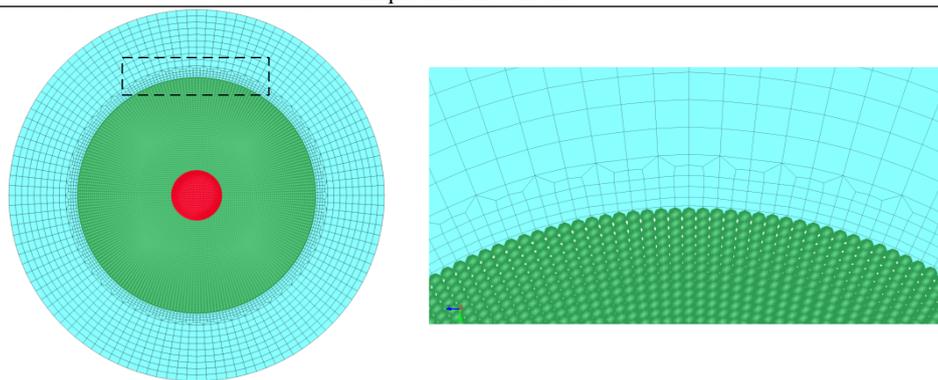


图 4 SPG 方法数值仿真模型

Fig.4 Numerical simulation model of SPG method

弹、靶的本构模型及材料参数与 FEM 方法相同，通过设置\*SECTION\_SOLID\_SPG 关键字卡片中的 ITB = 3，采用动量一致性光滑粒子伽辽金无网格法(Momentum Consistent SPG,MCSPG)，MCSPG 可用于以大变形、张力为主的问题，提供更加光滑稳定的数值结果，搭配使用欧拉核函数的核近似函数类型 KERNEL = 1，通过设置 IDAM = 1 即采用等效塑性应变失效准则来处理材料的断裂破坏问题，其余参数取默认值。

## 2.3 SPH 方法

### 2.3.1 概述

光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics,SPH)算法是一种无网格的拉格朗日算法，该算法通过一系列带有质量、能量、动量的离散粒子来构成计算域，采用流体动力学方程进行控制，SPH 方法不存在网格畸变问题，因此特别适合模拟固体结构的大变形问题。

### 2.3.2 数值仿真模型及参数选择

为提高计算 SPH 算法的计算效率，采用 FEM-SPH 固定耦合的方式，仅对靶板中心区域采用 SPH 粒子离散，中心区域 SPH 粒子与外围靶板网格采用\*CONTACT\_TIED\_NODE\_TO\_SURFACE 的点、面固连接触算法，数值仿真模型如图 5 所示。

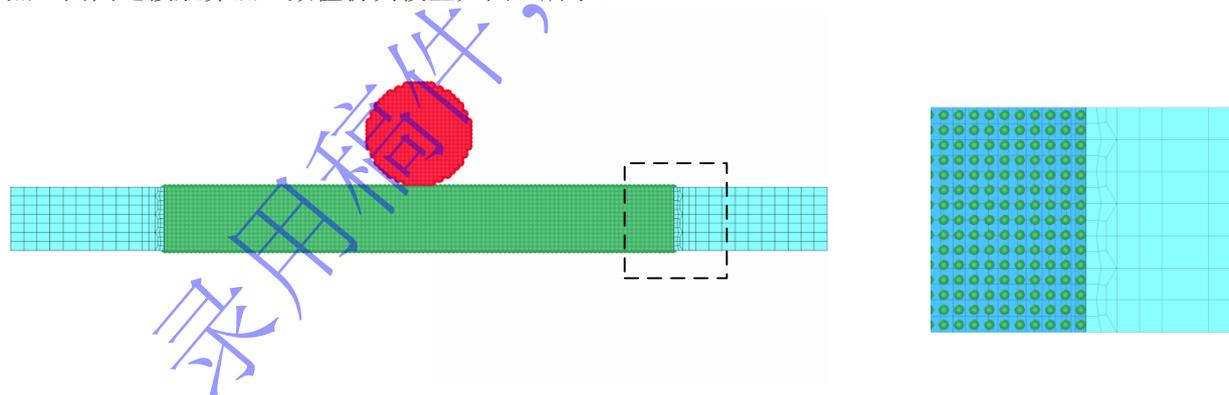


图 5 FEM-SPH 固定耦合方法数值仿真模型

Fig.5 Numerical simulation model of FEM-SPH fixed coupling method

弹、靶的本构模型及材料参数与 FEM 方法相同，采用最大拉应力失效准则<sup>[10]</sup>来模拟弹、靶材料的失效破坏，具体参数见下文。

## 2.4 FE-SPH 自适应方法

### 2.4.1 概述

FE-SPH 自适应耦合方法，将传统有限元方法与无网格方法相结合，在处理单元失效问题时，将失效的 FEM 单元转化成 SPH 粒子继续参与计算，该算法将有限单元法与无网格法的优势相结合，使用无网格 SPH 算法计算大变形区域，FEM 算法计算小变形区域，有效避免了因删除单元导致的系统

能量不守恒问题。

### 2.4.2 数值仿真模型及参数选择

数值仿真模型与 FEM 方法相同，为提高求解效率仅对弹丸以及靶板中心区域采用自适应方法，靶板外围区域仍然采用 FEM 方法，通过\*DEFINE\_ADAPTIVE\_SOLID\_TO\_SPH 关键字将满足失效准则的单元转化成 SPH 粒子，为保证 SPH 粒子与有限元网格的正常接触，参考 He<sup>[15]</sup>等人的设置，将关键字选项中的 ICPL 和 IOPT 均设置为 1。

弹、靶的本构模型及材料参数与 FEM 方法相同，采用最大拉应力失效准则与 Johnson-Cook 失效准则来模拟弹、靶材料的失效破坏，具体参数见下文。

## 3 结果与讨论

当采用有效塑性应变失效准则时，材料的失效参数取自文献[9]；当采用 Johnson-Cook 失效准则时，材料的失效参数取自文献[19]；当采用最大拉应力失效准则时，材料的失效参数的计算方法取自文献[10]。不同数值仿真方法采用的失效准则及失效参数设置列于表 2。

表 2 数值仿真中材料的失效准则及失效参数

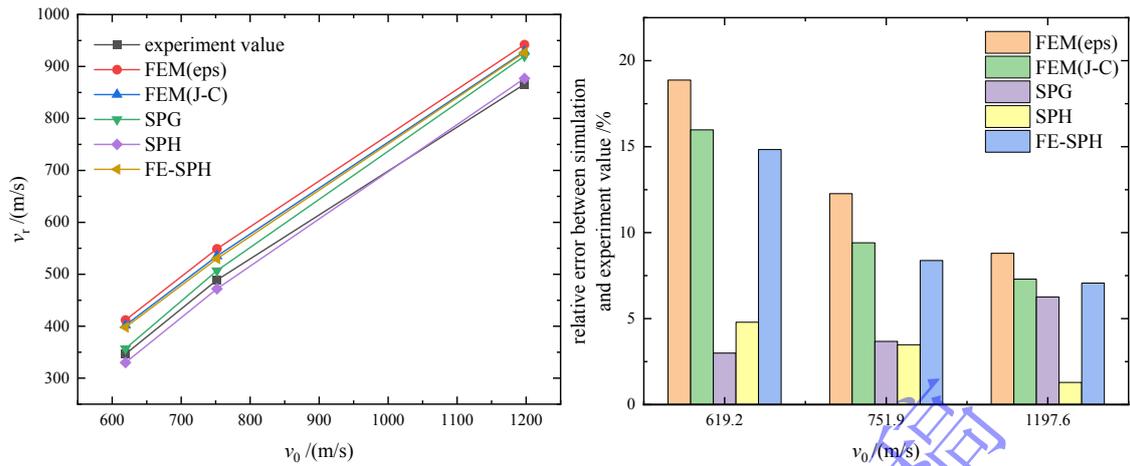
Table 2 Failure criteria and parameters of materials in numerical simulation

数值仿真方法	失效准则	失效参数	
		弹丸材料	靶板材料
FEM	有效塑性应变(eps)	1.6	1.36
	Johnson-Cook 失效准则	—	d1~d3: 0.3、0.9、2.8
SPG	有效塑性应变	Fs: 1.6	Fs: 1.36
SPH	最大拉应力	—	P1: 4GPa
FE-SPH	J-C 失效+最大拉应力	—	d1~d3: 0.3、0.9、2.8;
			P1: 4GPa

注：弹丸材料均采用有效塑性应变失效准则，有效塑性应变取值为 1.6。

### 3.1 弹丸剩余速度

弹丸穿透不同厚度靶板剩余速度  $v_r$  的试验值与仿真值对比如图 6、图 7 所示。SPG、SPH 这两类无网格方法在描述弹丸穿靶后剩余速度方面具有较高精度，在本文所研究的靶厚以及着靶速度范围内，仿真值与试验值最大偏差不超过 10%；而 FEM、FE-SPH 自适应方法，在描述材料失效问题时采用单元侵蚀技术，因此仿真结果严格依赖于失效准则以及失效参数的选取，当弹丸速度较高时，仿真值与试验值较为接近，最大偏差不超过 10%，随着弹丸着速逐渐降低，在当前选定的失效准则以及失效参数下，仿真值与试验值最大偏差接近 20%，无法准确描述弹丸的穿靶过程。

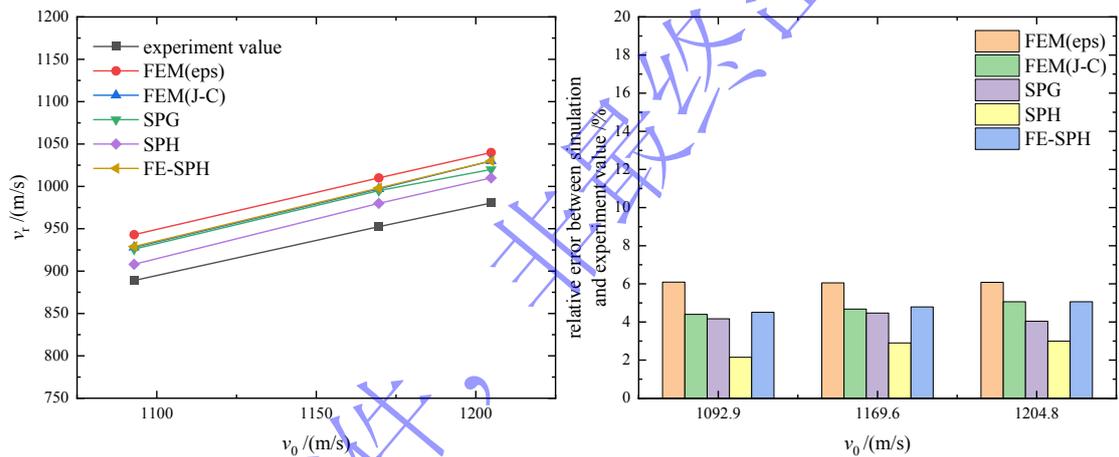


(a) Comparison of the experimental and numerical residual velocity of projectile

(b) Relative error between simulation and experiment value

图6 弹丸侵彻 6mm 厚 Q235 靶板剩余速度试验值与仿真值对比

Fig.6 Comparison of the experimental and numerical residual velocity of projectile in 6mm Q235 targets penetration tests



(a) Comparison of the experimental and numerical residual velocity of projectile

(b) Relative error between simulation and experiment value

图7 弹丸侵彻 4mm 厚 Q235 靶板剩余速度试验值与仿真值对比

Fig.7 Comparison of the experimental and numerical residual velocity of projectile in 4mm Q235 targets penetration tests

### 3.1.1 失效参数的影响

FEM 方法在现有的失效准则以及失效参数下，特别是在低速条件下，仿真值与试验值误差较大。因此，通过调整靶板的失效参数，进一步研究失效参数对数值仿真结果的影响规律。由于 SPH 方法在模拟弹丸穿靶剩余速度方面精度最高，而 FE-SPH 自适应方法本质上也是采用单元侵蚀技术来模拟材料的失效行为，因此，仅对采用 FEM 方法以及 SPG 方法时靶板的失效参数进行调整。

通过调整靶板材料失效时的有效塑性应变，得到了弹丸以 619.2m/s 的速度穿透 6mm 厚 Q235 钢靶剩余速度随有效塑性应变的变化情况，如图 8 所示。

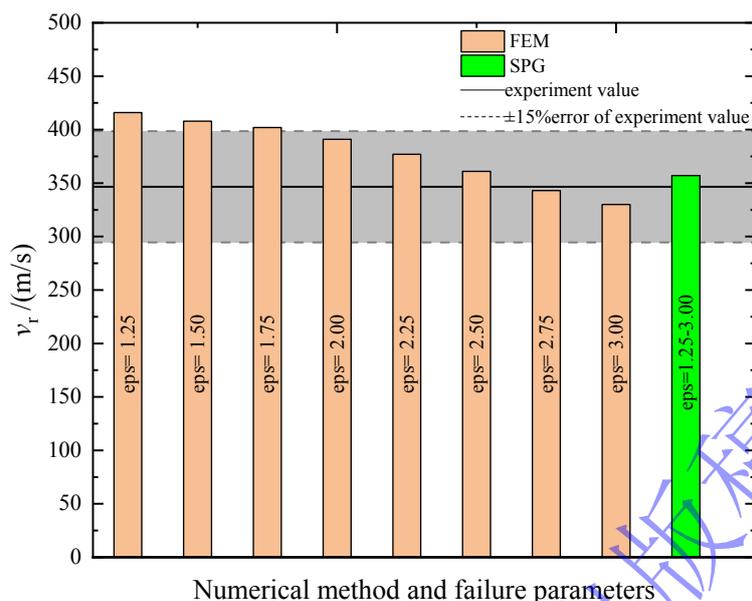


图 8 失效参数对剩余速度的影响( $v_0=619.2$  m/s,  $h=6$  mm)

Fig.8 Effect of failure parameters on residual velocity( $v_0=619.2$  m/s,  $h=6$  mm)

可以看到, 采用 FEM 方法计算得到的弹丸剩余速度随着有效塑性应变的增大而减小; 而采用 SPG 方法得到的弹丸剩余速度不随有效塑性应变的变化而变化。弹丸以 1204.8m/s 的速度穿透 4mm 厚 Q235 钢靶剩余速度随有效塑性应变的变化情况, 如图 9 所示, 同样, 采用 SPG 方法计算得到的弹丸剩余速度与有效塑性应变的取值无关。

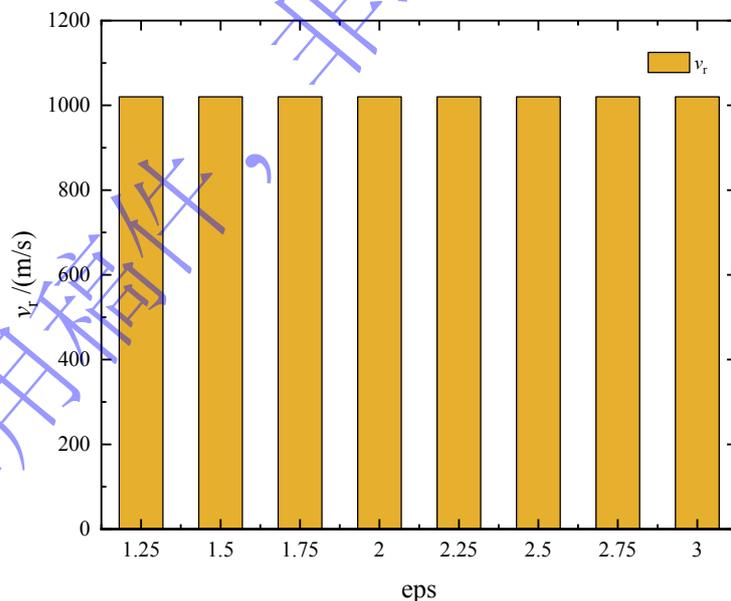


图 9 弹丸剩余速度随有效塑性应变的变化情况( $v_0=1204.8$  m/s,  $h=4$  mm)

Fig.9 Variation of residual velocity of projectile with effective plastic strain( $v_0=1204.8$  m/s,  $h=4$  mm)

这表明了 SPG 方法对于失效参数的选取并不敏感, 只要材料的本构关系正确, 无需仔细调整失效参数, 就可以得到相对准确的结果, 体现出其在获取弹丸穿靶剩余速度方面的优势。

同时, 对于 FEM 方法, 当有效塑性应变为 2.75 时, 仿真结果与试验值最为接近, 将该失效参数应用于其他弹靶工况条件下, 得到了调整后的弹丸剩余速度仿真值与试验值的对比结果, 如图 10、图 11 所示。可以看到, 调整后的失效参数可以准确地描述弹丸穿靶后的剩余速度, 仿真值与试验值

最大偏差不超过 5%，因此在使用 FEM 方法计算弹丸穿靶后的剩余速度时，应对失效准则以及失效参数进行仔细校准。

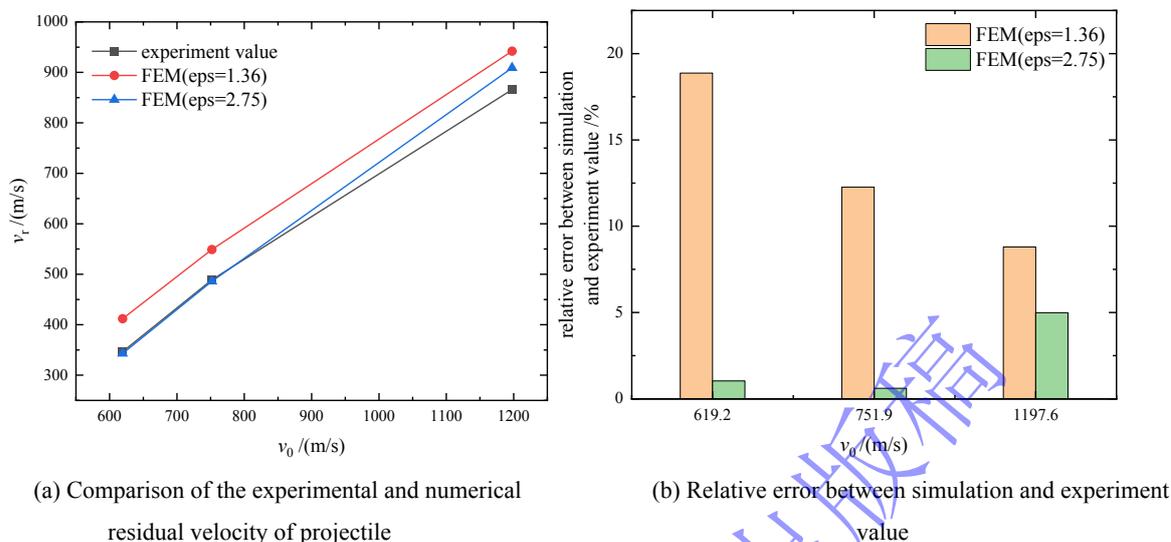


图 10(原图 9) 弹丸侵彻 6mm 厚 Q235 靶板剩余速度试验值与仿真值对比

Fig.10 Comparison of the experimental and numerical residual velocity of projectile in 6mm Q235 targets penetration tests

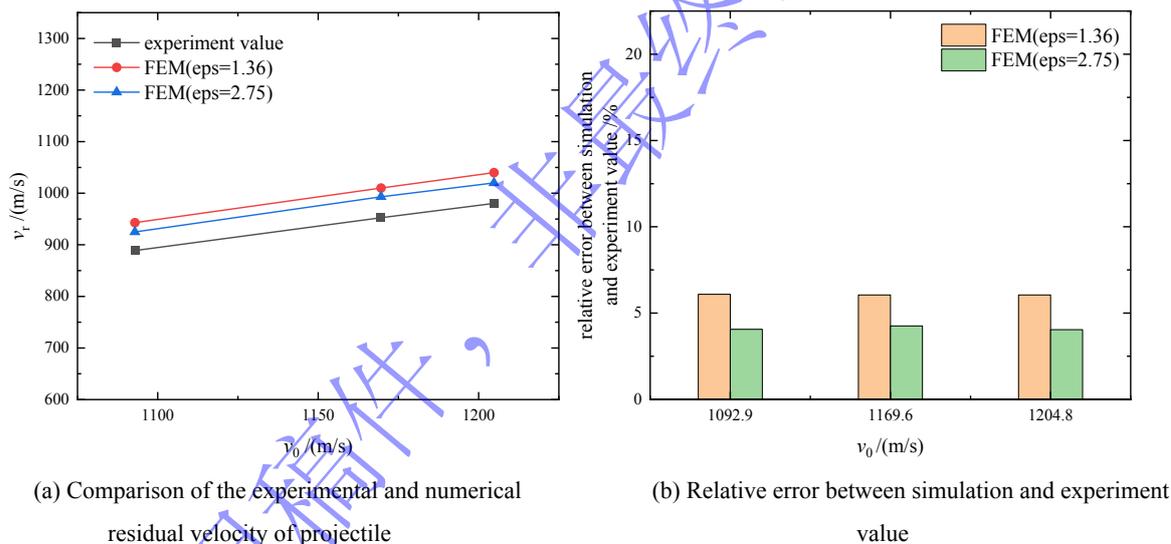


图 11 弹丸侵彻 4mm 厚 Q235 靶板剩余速度试验值与仿真值对比

Fig.11 Comparison of the experimental and numerical residual velocity of projectile in 4mm Q235 targets penetration tests

### 3.1.2 失效准则的影响

通过上一小节分析得知，采用 FEM 方法时，不同失效准则(J-C 失效、等效塑性应变失效)下弹丸剩余速度存在显著差异。现讨论失效准则对 SPG 方法的影响，SPG 方法在处理材料的失效问题时，通过设置关键字中 IDAM = 1 可以开启键断裂模式，即采用等效塑性应变失效准则来处理材料的断裂破坏问题，材料发生变形后，满足失效准则的键会发生断裂，但尽管键发生了断裂，应力仍然可以由材料的本构关系给出，不会像传统有限元那样将积分点的应力置为零，删除单元从而导致动量以及能量损失，同时 SPG 方法也支持其他的失效模型和失效准则，通过设置关键字中 IDAM = 0 可以关闭键断裂模式，本小节主要对比 J-C 失效模型与键断裂模型之间的差异。

当采用 J-C 失效模型时，通过简单改变 d1 的取值来调整靶板的失效参数，靶板材料的其余失效参数保持不变；当采用键失效准则时，靶板材料的有效塑性应变值取 1.36。

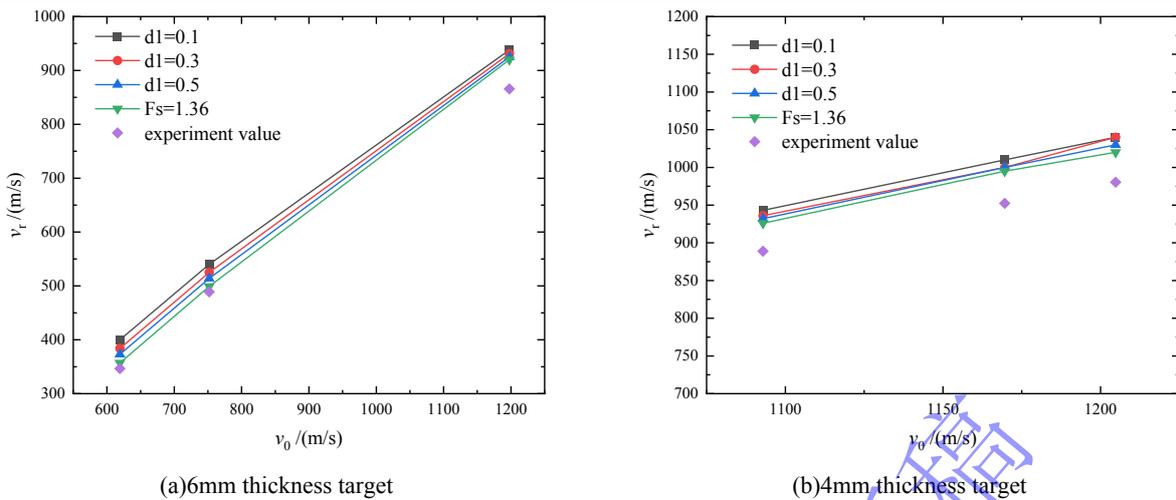


图 12 不同失效准则下弹丸剩余速度随失效参数变化情况

Fig.12 Variation of projectile residual velocity with failure parameters under different failure criteria

图 12 为不同失效准则下弹丸剩余速度随着靶速度的变化情况，结果发现在 J-C 失效准则下，弹丸穿靶后剩余速度与键断裂准则下相差较大，特别是在低速条件下，最大偏差超过 12%，同时，通过改变 J-C 失效参数  $d_1$  的取值，得到的弹丸剩余速度与失效参数之间表现出较高的敏感性。因此，SPG 方法在键断裂准则下，针对宏观结果而言，表现出对失效参数的低敏感性，而在其他失效准则下，与 FEM 方法类似，同样严格依赖于失效准则以及失效参数的选择。

### 3.2 靶板穿孔直径

有关靶板穿孔孔径的测量，取靶板迎弹面原始平面处的入口直径  $d_i$  与靶板背弹面原始平面处的出口直径  $d_o$  的平均值作为靶板的穿孔直径  $d$ 。不同数值仿真方法得到的靶板穿孔形貌特征如图 13 所示。

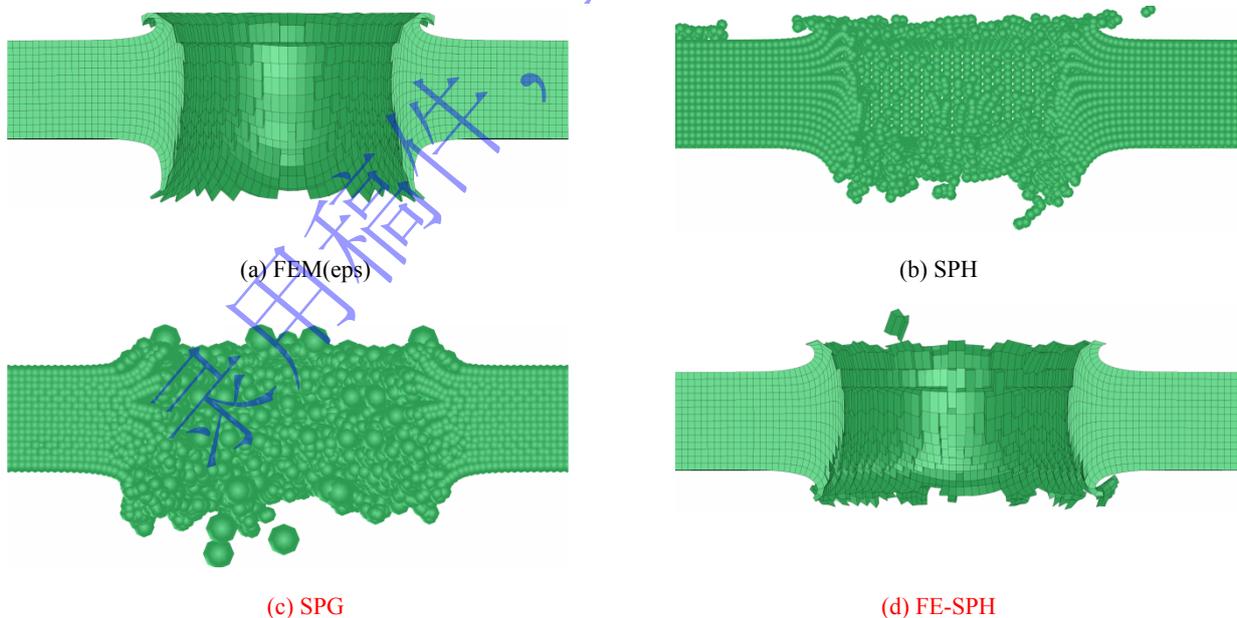


图 13(原图 12) 靶板穿孔形貌特征

Fig.13 Perforation morphology of target plate

可以看出，FEM 方法以及 FE-SPH 自适应方法具有精确的物质边界，因此可以精确描述靶板的穿孔形貌特征，而无网格 SPG、SPH 方法通过粒子对物体进行离散，粒子边界不清晰，无法准确描述靶板的穿孔形貌特征。

不同厚度靶板穿孔直径的试验值与仿真值对比结果如图 14、图 15 所示。当 FEM 方法采用有效塑性应变失效准则时，仿真值与试验值最大偏差不超过 6%；当采用 Johnson-Cook 失效准则时，仿真值与试验值最大偏差超过 20%，不能准确预估靶板的穿孔直径，可以看到，不同失效准则下的靶板穿孔直径相差较大。

FE-SPH 自适应方法由于同样采用 Johnson-Cook 失效准则，因此与 FEM 方法得到的穿孔直径较为接近，仿真值与试验值最大偏差超过 18%，在现有的失效准则以及失效参数下，无法准确地反映靶板穿孔直径与着靶速度之间的关系。

SPG 这类无网格方法，在描述靶板穿孔孔径方面优于无网格 SPH 方法，在本文所研究的着靶速度以及靶厚范围内，仿真值与试验值最大偏差不超过 10%。这反映出 SPG 方法在描述靶板穿孔直径的精度上优于同类的无网格 SPH 方法，接近采用有效塑性应变失效准则的 FEM 方法。

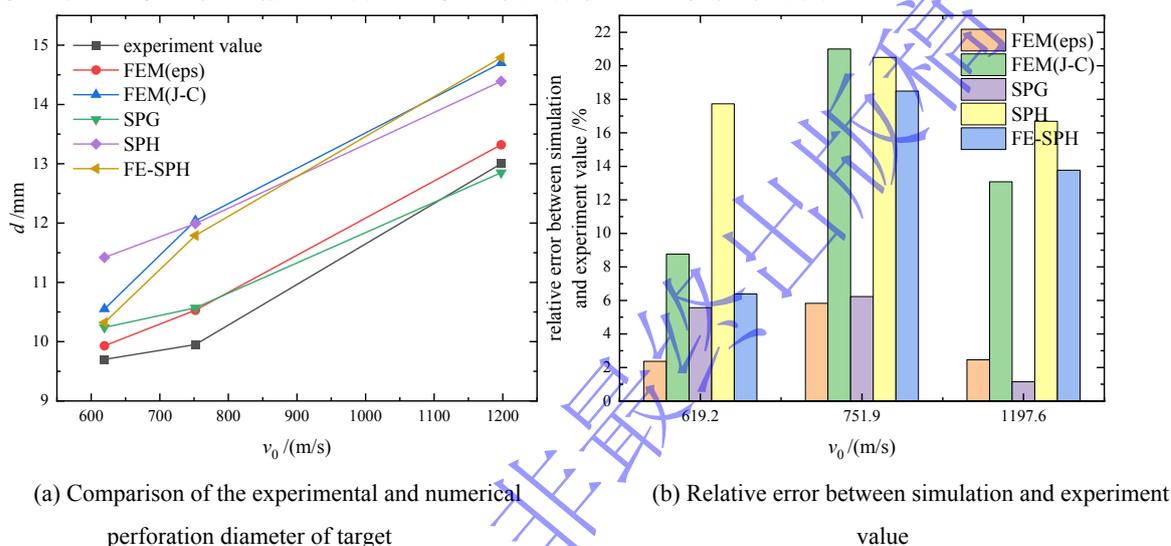


图 14(原图 13) 弹丸侵彻 6 mm 厚 Q235 靶板穿孔直径试验值与仿真值对比

Fig.14 Comparison of test and simulation values of perforation diameter of 6 mm Q235 target plate penetrated by projectile

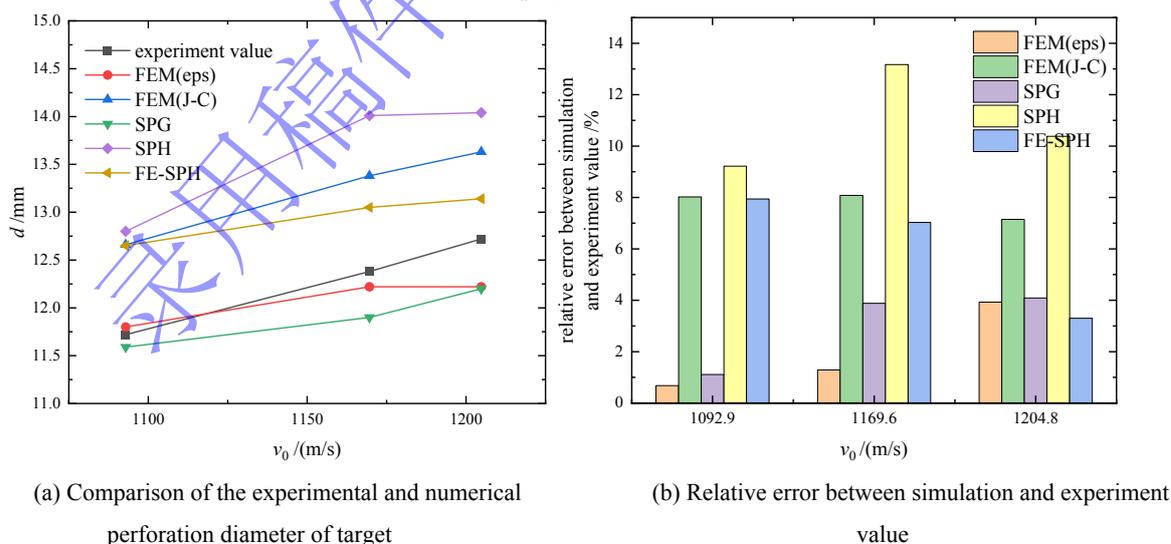


图 15 弹丸侵彻 4 mm 厚 Q235 靶板穿孔直径试验值与仿真值对比

Fig.15 Comparison of test and simulation values of perforation diameter of 4 mm Q235 target plate penetrated by projectile

同时，为进一步验证 SPG 方法在描述靶板穿孔孔径方面对失效参数的敏感性，通过调整靶板材

料失效时的有效塑性应变值，以弹丸以 751.9m/s 的着靶速度侵彻靶板厚度  $h = 6$  mm 的 Q235 钢靶为例，得到了靶板穿孔直径随有效塑性应变的变化情况，如图 16 所示。

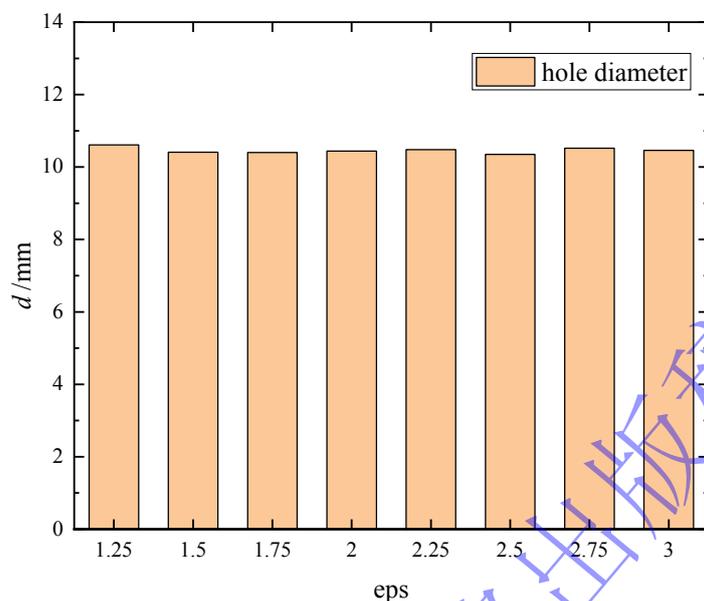


图 16(原图 15) 靶板穿孔直径随有效塑性应变的变化情况( $v_0=751.9$  m/s,  $h=6$  mm)

Fig.16 The change of perforation diameter of target plate with effective plastic strain( $v_0=751.9$  m/s,  $h=6$  mm)

可以看出，在键失效模式下采用 SPG 方法得到的靶板穿孔孔径对失效参数并不敏感，靶板穿孔直径随有效塑性应变的增加上下波动，这是由于 SPG 方法本身是一种无网格方法，没有精确的物质边界，在测量穿孔直径上存在误差，无法精确刻画靶板的穿孔形貌。

因此，在计算靶板的穿孔直径时，可优先考虑采用对失效参数不敏感的 SPG 方法，其次也可以考虑采用经试验验证过的 FEM 方法。

### 3.3 二次破片的生成及分布

#### 3.3.1 二次破片对验证靶的毁伤情况

图 17 为钨合金弹丸以 1197.6 m/s 着靶速度侵彻 6 mm 厚 Q235 钢板的高速摄像图片。距离靶板背面 0.5 m 处设置验证靶，通过高速摄像可以看到弹丸穿靶后残余弹体以及弹丸、靶板破碎产生的二次破片对验证靶仍有后效毁伤作用，结合二次破片对验证靶的毁伤统计分析可进一步得到弹/靶破片对验证靶的毁伤情况。

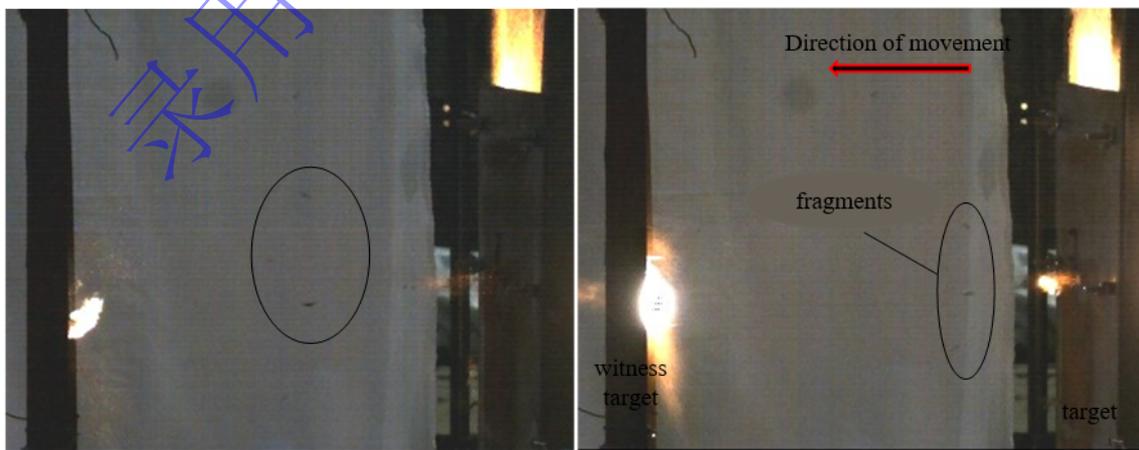
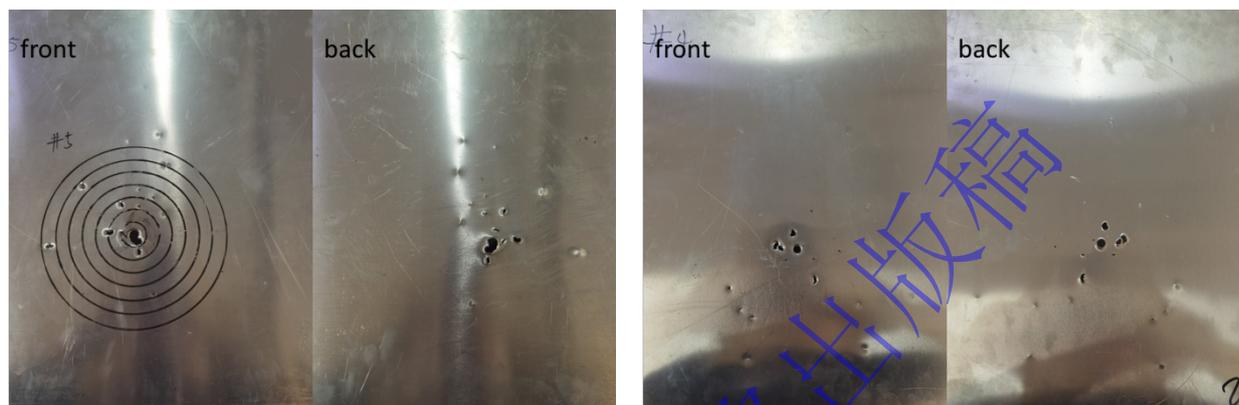


图 17 残余弹丸及破片对后效靶的毁伤作用

Fig.17 The damage effect of residual projectiles and fragments to witness target

图 18 为两次试验产生的二次破片对验证靶的毁伤情况，分别统计了二次破片在验证靶上的穿孔数与弹坑数如表 3 所示。从验证靶的毁伤情况来看，两次试验产生的二次破片数量相当。其中 4mm 靶板所对应的验证靶上中心穿孔比较规则，证明弹丸穿透 4mm 厚靶板仍然保持完整；而 6mm 靶板所对应的验证靶上的中心穿孔较大且形状不规则，推测可能由于弹丸穿靶过程中破碎或者是由靶板冲塞块与残余弹丸接连撞击靶板形成的，此外，验证靶上还嵌有许多钢破片，且大弹坑、大弹孔的数量更多，结合高速摄像图像可以判断出弹丸穿透 6mm 靶板产生的二次破片质量更大，大质量破片占比更多。



(a)  $v_0 = 1197.6 \text{ m/s}$ ,  $h = 6 \text{ mm}$

(b)  $v_0 = 1090.5 \text{ m/s}$ ,  $h = 4 \text{ mm}$

图 18 二次破片对验证靶的毁伤情况

Fig.18 The damage effect of secondary fragments on witness target

表 3 二次破片在验证靶上的穿孔数与弹坑数

Table 3 The number of penetrations and craters on witness target caused by secondary fragments

编号	试验结果	
	穿孔数量	弹坑数量
Exp.4(4mm 靶板)	9	10
Exp.5(6mm 靶板)	10	9

### 3.3.2 二次破片云形貌

图 19、图 20 为采用不同数值仿真方法得到的钨合金弹丸穿靶后产生的二次破片形貌，采用 FEM 方法时，产生的二次破片数量较少，仅仅能反映出个别较大破片的分布情况，这是由于 FEM 方法在处理材料破碎问题时基于单元侵蚀算法，将满足失效准则的单元予以删除，从而导致生成的破片数量较少，且无法完整反映出破片云形貌；采用 SPG 方法时，SPG 粒子之间基于一种键失效准则，满足失效准则的 SPG 粒子相互分离，不会删除失效的 SPG 粒子，可以同时反映出大破片以及小破片的分布情况，能够大致描述破片云形貌；采用 SPH 方法时，当 SPH 粒子满足失效准则时，SPH 粒子失效但不会被删除，仍可以反映出小破片的分布情况；采用 FE-SPH 自适应方法时，FEM 单元满足失效准则时，FEM 单元被删除的同时转化为 SPH 粒子，小破片由 SPH 粒子表示，大破片由 FEM 单元表示，能够完整描述破片云形貌。

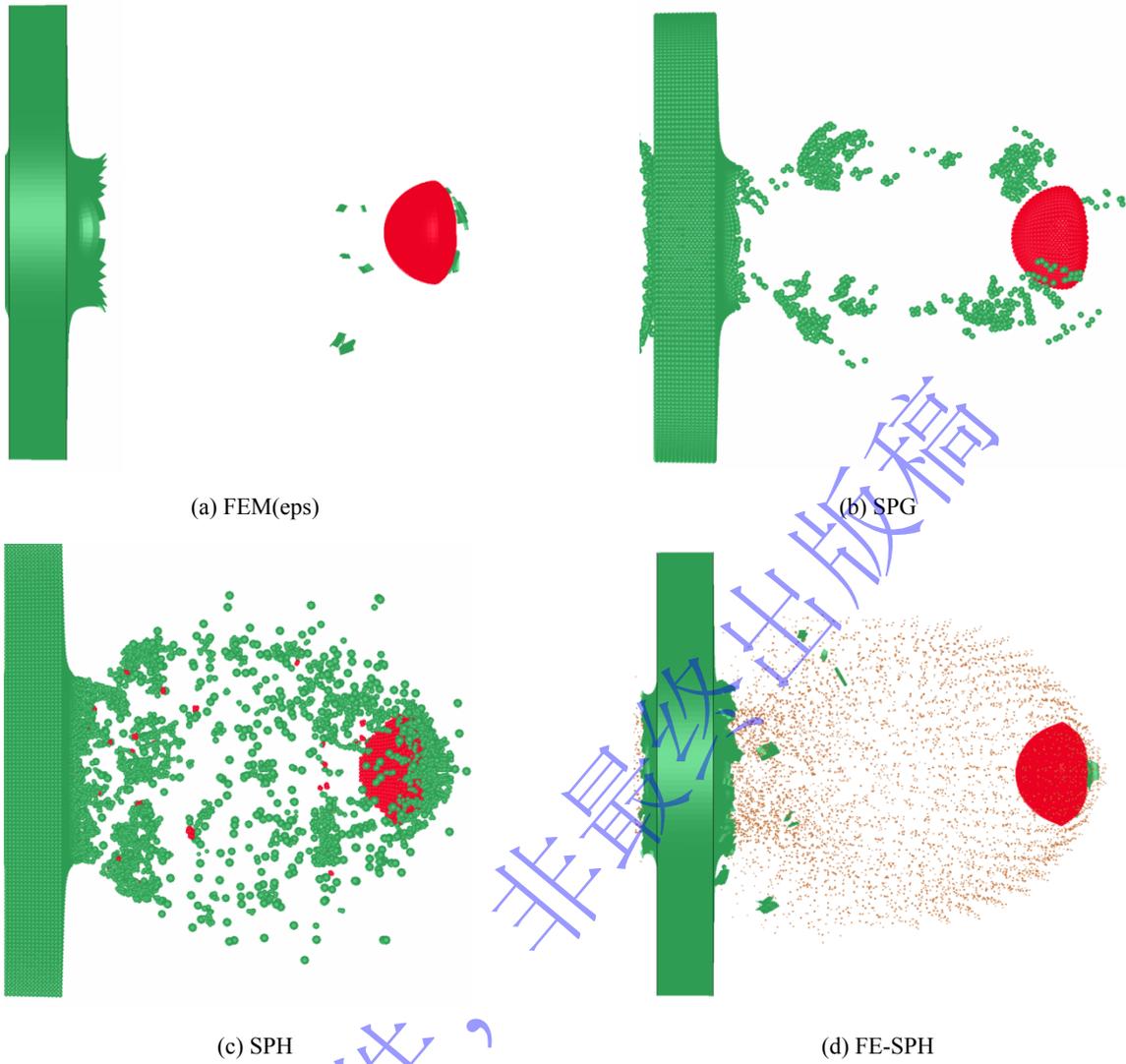
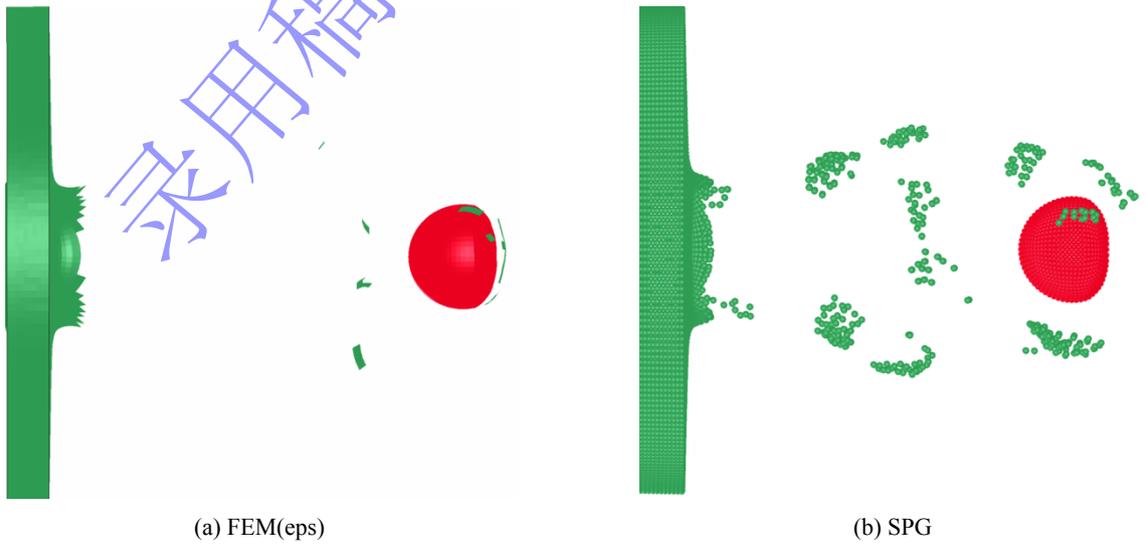


图 19 二次破片云形貌( $v_0 = 1197.6 \text{ m/s}$ ,  $h = 6 \text{ mm}$ )

Fig.19 Secondary fragment morphology( $v_0 = 1197.6 \text{ m/s}$ ,  $h = 6 \text{ mm}$ )



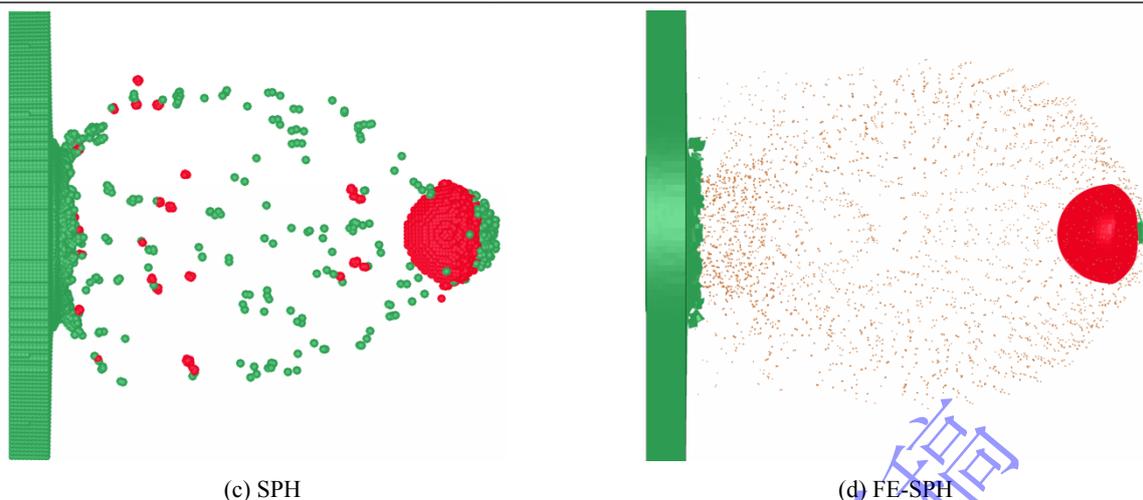


图 20 二次破片形貌( $v_0 = 1190.5 \text{ m/s}$ ,  $h = 4 \text{ mm}$ )

Fig.20 Secondary fragment morphology( $v_0 = 1190.5 \text{ m/s}$ ,  $h = 4 \text{ mm}$ )

从破片云形貌来看,采用无网格 SPG、SPH 方法以及 FE-SPH 自适应方法均可以对二次破片的生成以及分布进行表征,但不同仿真方法得到计算结果之间存在些许差异,后面将结合验证靶的毁伤情况作进一步分析。

### 3.3.3 二次破片在验证靶上的分布

考虑到二次破片在验证靶上的分布并不是二者之间简单的投影关系,还需考虑二次破片的侵彻能力,因此引入球形弹丸侵彻靶板的弹道极限方程<sup>[23]</sup>,如式(1)所示。

$$v_j = a \cdot \left( \frac{h_w}{d_f} \right)^b \cdot \frac{\rho_w^{0.3}}{\rho_f^{0.8}} \cdot \sigma_t^{0.8} \quad (1)$$

其中  $h_w$  为验证靶厚度(此处为  $0.001\text{m}$ ),  $d_f$  为二次破片的等效直径单位为  $\text{m}$ ,  $\rho_w$  为验证靶材料密度(此处为  $2700\text{kg/m}^3$ ),  $\rho_f$  为二次破片材料密度(钨破片为  $17600 \text{ kg/m}^3$ , 钢破片为  $7800 \text{ kg/m}^3$ ),  $\sigma_t$  为靶板材料的强度极限(此处为  $430\text{MPa}$ ),  $v_j$  为二次破片穿透验证靶的弹道极限速度单位为  $\text{km/s}$ ,  $a$ ,  $b$  为与二次破片和验证靶材料相关的常数。

采用 FEM 方法时, FEM 单元构成的破片可直接由 LS-PrePost 后处理软件中的 Fragment Analysis 功能进行破片识别;采用 SPH 方法时,由于 LS-PrePost 软件无法对 SPH 粒子进行破片识别,因此本文采用 SPH 粒子破片识别程序<sup>[24]</sup>对 SPH 粒子进行破片识别,进而输出每个破片的位置、质量、速度、动能等信息;采用 FE-SPH 自适应方法时,由于单个 SPH 粒子质量较小,对验证靶的毁伤能力较弱,因此仅对由单元构成的二次破片进行了统计;由于 SPG 粒子无法进行破片识别,因此仅对其余三种数值仿真方法进行讨论。

根据式(1)可以对不同数值仿真方法的到二次破片对验证靶的毁伤情况进行统计,二次破片在验证靶上的穿孔数量如表 4 所示。从验证靶穿孔数上来看, FEM 方法的计算结果与试验最为接近, FE-SPH 方法得到的穿孔数偏少, SPH 方法得到的穿孔数量最多。

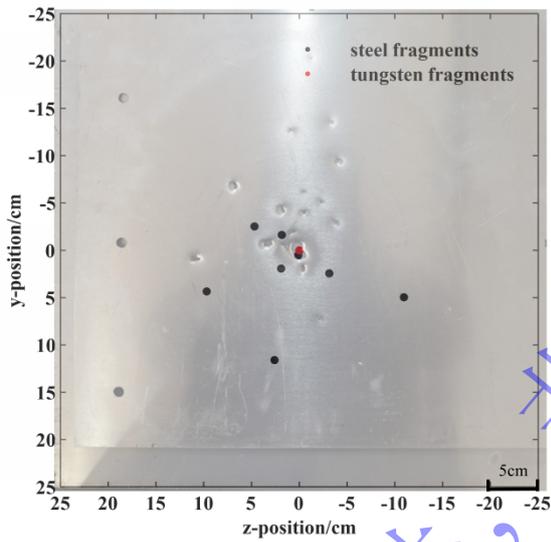
这同样是因为 FEM 方法只能反映出大质量破片的分布情况,无法反映出小破片的分布情况,因而得到的二次破片数量比 SPH 方法少; FE-SPH 虽能反映出小破片的分布情况,但单个破片质量过小,没有考虑其对验证靶的累计毁伤效应导致验证靶穿孔数量少; SPH 方法既能反映出大破片的分布情况,也能反映出小破片的分布情况,由于假设二次破片的形状为球形且不考虑二次破片的着靶角度,因此仿真计算得到的穿孔数大于试验结果,但仿真计算得到的穿孔数与试验验证靶上的穿孔数与弹坑数的总和非常接近。

表 4 不同数值仿真方法得到的二次破片在验证靶上的穿孔数量对比

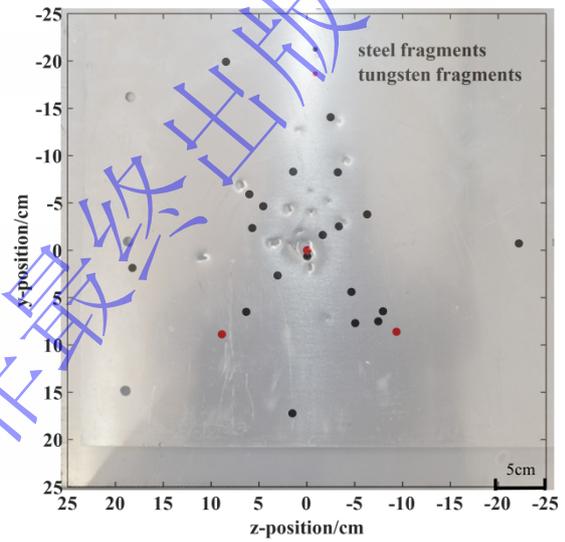
Table 4 Comparison of the number of perforations on witness target by secondary fragments obtained from various numerical simulation methods

编号	试验结果(穿孔数+弹坑数)	仿真计算结果(穿孔数)		
		FEM	SPH	FE-SPH
Exp.4(4mm 靶板)	9+10	7	20	2
Exp.4(6mm 靶板)	10+9	9	24	3

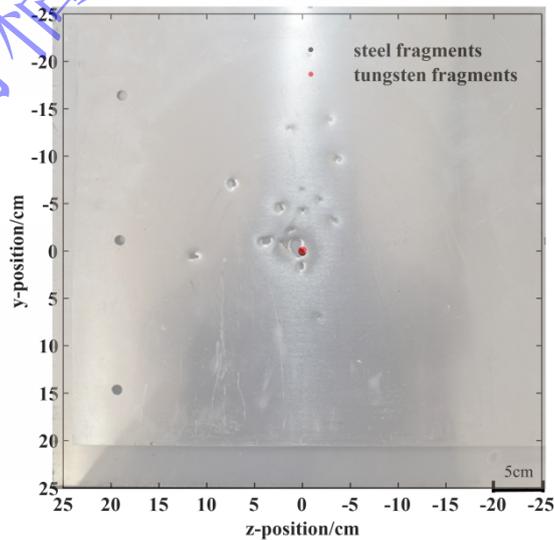
考虑到试验条件下验证靶距离靶板较远(0.5 m), 若数值模拟采用相同距离建立验证靶, 无疑会大幅增加计算时间。因此, 当二次破片形成后, 通过输出破片的坐标、质量、速度等信息, 并假定在靶板后方存在一虚拟验证靶, 按照式(1)对满足条件的二次破片进行筛选, 二次破片沿着各自的速度方向向前飞散, 二次破片与虚拟验证靶的交点坐标即为二次破片在验证靶上的位置。



(a) FEM(eps)



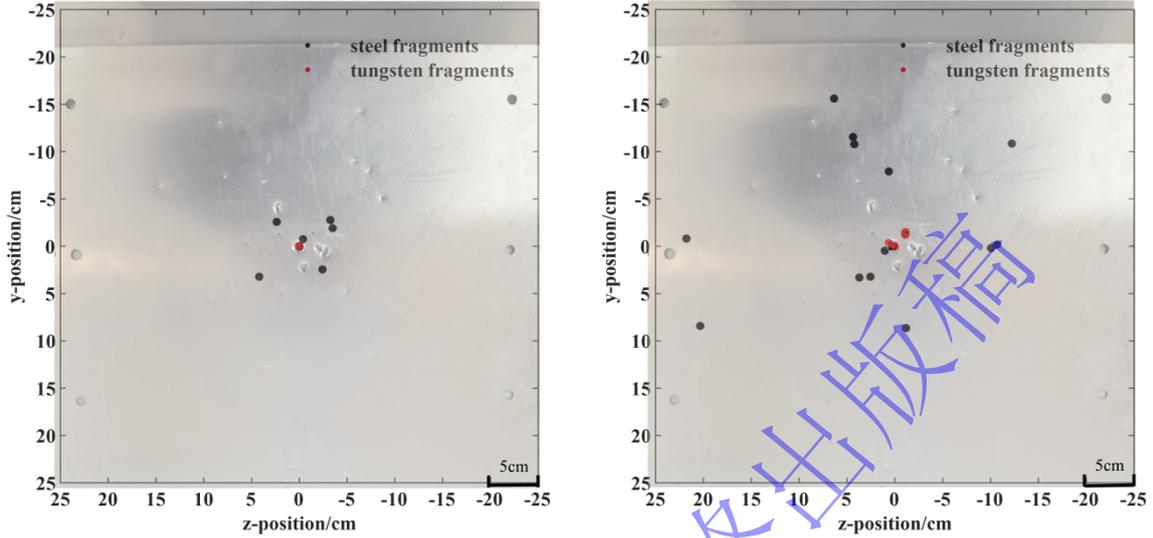
(b) SPH



(c) FE-SPH

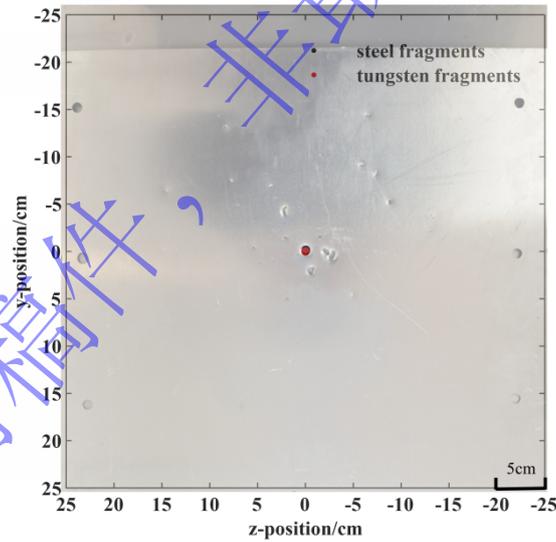
图 21(原图 19) 二次破片在虚拟验证靶上的分布情况( $v_0 = 1197.6 \text{ m/s}$ ,  $h = 6 \text{ mm}$ )

Fig.21 The distribution of secondary fragments on the witness target( $v_0 = 1197.6 \text{ m/s}$ ,  $h = 6 \text{ mm}$ )



(a) FEM(eps)

(b) SPH



(c) FE-SPH

图 22(原图 20) 二次破片在虚拟验证靶上的分布情况( $v_0 = 1090.5 \text{ m/s}$ ,  $h = 4 \text{ mm}$ )

Fig.22 The distribution of secondary fragments on the witness target( $v_0 = 1090.5 \text{ m/s}$ ,  $h = 4 \text{ mm}$ )

图 21、图 22 为试验得到的验证靶上的二次破片按缩放比例叠加到虚拟验证靶上的分布情况，从虚拟验证靶上二次破片的分布情况可以看出，采用 FEM(eps)方法时，得到的二次破片数量较少，只能反映出中心大破片的分布情况，二次破片在虚拟验证靶上的散布范围较小；采用 FE-SPH 方法时，由于仅对由单元构成的二次破片进行了统计，没有考虑由 SPH 粒子组成的小破片对验证靶的累积毁伤作用，因此也只能反映出大质量破片的分布情况，二次破片在虚拟验证靶上的散布范围较小；采用 SPH 方法时，可以对位于破片云前端小飞散角区间内以及位于破片云后端大飞散角区间内的大质量

破片进行表征,同时也可以对位于破片云中部的的小质量破片进行表征,且二次破片的散布范围与试验结果最为接近。

因此,在模拟弹丸穿靶后二次破片的生成及其散布时,可以优先考虑采用无网格 SPH 方法,该方法可以同时大质量以及小质量破片进行表征,但需要对 SPH 粒子进行破片识别统计;也可以考虑采用 FE-SPH 自适应方法,该方法可以直接获取大质量破片信息,也可以反映出小质量破片的分布情况,但同时需要考虑小破片对验证靶的累积毁伤效应。

### 3.4 计算效率对比

为了对比几种数值模拟方法在弹靶侵彻问题上的求解效率,以钨合金弹丸以 1197.6m/s 着靶速度侵彻穿透 6mm 厚 Q235 钢为例,统计了弹丸侵彻靶板 100 $\mu$ s 所用的时间。其中 SPG 方法采用 LS\_DYNA 软件中双精度版本的 R13 求解器,其余数值模拟方法采用 LS\_DYNA 软件中单精度版本的 R13 求解器,求解时调用的 cpu 核心数保持相同,具体计算时间如表 5 所示。

表 5(原表 3) 不同数值仿真方法的计算时间

Table 5 Computational time of different numerical simulation methods

数值仿真方法	计算时间(100 $\mu$ s 时刻)
FEM(eps)	8min 51s
FEM(J-C)	44min 17s
SPG	2h 20min 17s
SPH	2h 14min 20s
FE-SPH	6h 2min 46s

从求解效率上看, FEM 方法的求解效率最高,无网格方法相比较于有限元方法要花费更多的计算时间,无网格 SPG 方法与 SPH 方法计算时间相当,而 FE-SPH 自适应方法耗时最多,计算时间大约是上述两种无网格方法的三倍, FE-SPH 自适应算法的核心在于 FEM 单元与 SPH 粒子之间的转换,将满足失效条件的 FEM 单元转化成 SPH 粒子,但这一过程涉及失效条件的判定以及节点数据的映射过程(如质量、速度、应力等信息),因此相比较于 SPH 方法要花费大量的计算时间。

## 4 结论

为了更好地量化表征钨合金弹丸侵彻靶板过程,本文采用目前常用的几种数值模拟方法,对钨合金弹丸侵彻 Q235 钢靶开展了数值仿真计算,并结合弹道试验数据,对比了不同数值仿真方法在描述弹丸穿靶剩余速度、靶板穿孔孔径以及弹丸穿靶后二次破片的生成及其分布等方面的优势和不足,得出主要结论如下:

(1)在预测弹丸穿靶剩余速度方面,由于 FEM 方法在处理材料失效问题时基于单元侵蚀算法,因此 FEM 方法以及 FE-SPH 自适应方法严格依赖于失效准则以及失效参数的选择,当弹丸速度较高时,仿真值与试验值较为接近,但随着弹丸速度逐渐降低,在当前选定的失效准则以及失效参数下,仿真值与试验值最大偏差接近 20%,不能够很好地描述弹丸的穿靶过程;而 SPG、SPH 这两类无网格方法在处理材料失效问题时不会删除失效粒子,满足能量守恒,因而具有较高精度,且 SPG 方法在基于键的失效模型下(IDAM = 1)对于失效参数的选取并不敏感,无需仔细调整失效参数,就可以得到相对准确的结果,体现出其在获取弹丸穿靶剩余速度方面的优势。

(2)在描述靶板穿孔孔径方面, FEM 方法具有精确的物质边界,因此相比较于无网格方法, FEM 方法以及 FE-SPH 自适应方法可以精确刻画靶板的穿孔形貌特征,但不同失效准则下的靶板穿孔直径相差较大; SPG 这类无网格方法,在描述靶板穿孔孔径方面优于无网格 SPH 方法,采用 SPG 方法得到的靶板穿孔孔径对失效参数并不敏感,同样,只要材料的本构关系正确,就可以得到相对准确的结果。

(3)在二次破片生成及其分布方面，FEM方法产生的破片数量较少，仅能反映出个别大破片的分布情况，而且无法完整描述二次破片云形貌；SPG方法可以大致描述二次破片云形貌，但由于无法对SPG粒子进行破片识别，因此不能反映二次破片在验证靶上的分布情况；SPH方法既可以反映出大破片的分布也可反映出小破片的分布情况，能够完整描述二次破片云形貌；FE-SPH自适应方法可以直接获取大质量破片信息，同时也能够完整描述二次破片云形貌。

(4)在求解效率上，四种数值仿真方法中有限元方法的求解效率高于任何无网格方法，其中FEM方法求解效率最高，FE-SPH自适应方法求解效率最低。

## 参考文献

- [1] 何杨, 高旭东, 董晓亮. 某陶瓷/钢复合装甲抗大质量破片侵彻能力研究 [J]. 振动与冲击, 2022, 41(13): 96-102. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2022.13.013.  
HE Y, GAO X D, DONG X L. Anti-penetration ability of a certain ceramic/steel composite armor against high mass fragments [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(13): 96-102. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2022.13.013.
- [2] 陈艳丹, 陈兴, 卢永刚, 等. 球形弹丸高速冲击 IN718 合金板的变形与破坏模式 [J]. 爆炸与冲击, 2024, 44(02): 127-135. DOI: 10.11883/bzycj-2023-0071.  
CHEN Y D, CHEN X, LU Y G, et al. Deformation and failure modes of IN718 alloy plate impacted by spherical projectile at high velocity [J]. Explosion and Shock Waves, 2024, 44(02): 127-135. DOI: 10.11883/bzycj-2023-0071.
- [3] 刘铁磊, 徐豫新, 王晓锋, 等. 钨合金球形破片侵彻低碳钢的弹道极限速度计算模型 [J]. 兵工学报, 2022, 43(04): 768-779. DOI: 10.12382/bgxb.2021.0448.  
LIU T L, XU Y X, WANG X F, et al. Ballistic limit calculation model of tungsten alloy spherical fragments penetrating into low carbon steel plate [J]. Acta Armamentarii, 2022, 43(04): 768-779. DOI: 10.12382/bgxb.2021.0448.
- [4] 王逸凡, 李永鹏, 徐豫新, 等. 钨球对碳纤维增强复合材料包覆碳化硼陶瓷侵彻效应 [J]. 兵工学报, 2024, 45(08): 2487-2496. DOI: 10.12382/bgxb.2023.1083.  
WANG Y F, LI Y P, XU Y X, et al. Penetration effect of tungsten alloy spherical projectile on CFRP-coated B4C ceramics [J]. Acta Armamentarii, 2024, 45(08): 2487-2496. DOI: 10.12382/bgxb.2023.1083.
- [5] 张钰龙, 郑宾, 郭华玲, 等. 球形钨破片侵彻钢靶毁伤效应研究 [J]. 兵器装备工程学报, 2020, 41(05): 32-36. DOI: 10.11809/bqzbgexb2020.05.007.  
ZHANG Y L, ZHENG B, GUO H L, et al. Study on damage effect of spherical tungsten fragments penetrating steel targets [J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2020, 41(05): 32-36. DOI: 10.11809/bqzbgexb2020.05.007.
- [6] 包阔, 张先锋, 谈梦婷, 等. 子弹撞击碳化硼陶瓷复合靶试验与数值模拟研究 [J]. 爆炸与冲击, 2019, 39(12): 57-68. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0462.  
BAO K, ZHANG X F, TAN M T, et al. Ballistic test and numerical simulation on penetration of a boron-carbide-ceramic composite target by a bullet [J]. Explosion and Shock Waves, 2019, 39(12): 57-68. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0462.
- [7] 马铭辉, 武一丁, 王晓东, 等. 多孔钛合金夹芯层陶瓷/UHMWPE 复合结构的抗侵彻性能 [J]. 爆炸与冲击, 2024, 44(04): 3-16. DOI: 10.11883/bzycj-2023-0375.  
MA M H, WU Y D, WANG X D, et al. Penetration resistance of ceramic/UHMWPE composite structures with porous titanium alloy sandwich layer [J]. Explosion and Shock Waves, 2024, 44(04): 3-16. DOI: 10.11883/bzycj-2023-0375.
- [8] 周楠, 王金相, 王小绪, 等. 球形弹丸作用下钢/铝爆炸复合靶的抗侵彻性能 [J]. 爆炸与冲击, 2011, 31(05): 497-503. DOI: 1001-1455(2011)05-0497-07.  
ZHOU N, WANG J X, WANG X X, et al. Anti-penetration performances of explosively welded steel/aluminium plates impacted by spherical projectiles [J]. Explosion and Shock Waves, 2011, 31(05): 497-503. DOI: 1001-1455(2011)05-0497-07.

- [9] 徐豫新, 任杰, 王树山. 钨球正撞击下低碳钢板的极限贯穿厚度研究 [J]. 北京理工大学学报, 2017, 37(06): 551-556. DOI: 10.15918/j.tbit1001-0645.2017.06.001.  
XU Y X, REN J, WANG S S. Research on perforation limit thickness of low carbon steel plates impacted normally by tungsten spheres [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2017, 37(06): 551-556. DOI: 10.15918/j.tbit1001-0645.2017.06.001.
- [10] 邸德宁, 陈小伟. 碎片云 SPH 方法数值模拟中的材料失效模型 [J]. 爆炸与冲击, 2018, 38(05): 948-956. DOI: 10.11883/bzycj-2017-0328.  
DI D N, CHEN X W. Material failure models in SPH simulation of debris cloud [J]. Explosion and Shock Waves, 2018, 38(05): 948-956. DOI: 10.11883/bzycj-2017-0328.
- [11] WEN K, CHEN X W, DI D N. Modeling on the shock wave in spheres hypervelocity impact on flat plates [J]. Defence Technology, 2019, 15(4): 457-466. DOI: 10.1016/j.dt.2019.01.006.
- [12] WEN K, CHEN X W. Influence of the impedance gradient on the debris cloud produced by hypervelocity impact [J]. International Journal of Impact Engineering, 2022, 159. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2021.104034.
- [13] WEN K, CHEN X W. Analysis of the stress wave and rarefaction wave produced by hypervelocity impact of sphere onto thin plate [J]. Defence Technology, 2020, 16(5): 969-979. DOI: 10.1016/j.dt.2019.11.017.
- [14] HE Q G, CHEN X W, CHEN J F. Finite element-smoothed particle hydrodynamics adaptive method in simulating debris cloud [J]. Acta Astronautica, 2020, 175: 99-117. DOI: 10.1016/j.actaastro.2020.05.056.
- [15] PIEKUTOWSKI A J. Formation and description of debris cloud produced by hypervelocity impact: NASA-CR-4707 [R]. USA: NASA, 1996.
- [16] HE Q G, CHEN X W. Simulation method of debris cloud from fiber-reinforced composite shield under hypervelocity impact [J]. Acta Astronautica, 2023, 204: 402-417. DOI: 10.1016/j.actaastro.2023.01.008.
- [17] YIN X, LI Q, CHEN B, et al. An improved calibration of Karagozian & Case concrete/cementitious model for strain-hardening fibre-reinforced cementitious composites under explosion and penetration loadings [J]. Cement and Concrete Composites, 2023, 137. DOI: 10.1016/j.cemconcomp.2022.104911.
- [18] WU Y, WU C T. Simulation of Impact Penetration and Perforation of Metal Targets Using the Smoothed Particle Galerkin Method [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2018, 144(8). DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001470.
- [19] 陈刚, 陈小伟, 陈忠富, 等. A3 钢钝头弹撞击 45 钢板破坏模式的数值分析 [J]. 爆炸与冲击, 2007, (05): 390-397. DOI: 1001-1455 (2007)05-0390-08.  
CHEN G, CHEN X W, CHEN Z F, et al. Simulations of A3 steel blunt projectiles impacting 45 steel plates [J]. Explosion and Shock Waves, 2007(05): 390-397. DOI: 1001-1455 (2007)05-0390-08.
- [20] SILLING S A, ASKARI E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics [J]. Computers & Structures, 2005, 83(17-18): 1526-1535. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.11.026.
- [21] WU C T, REN B. A stabilized non-ordinary state-based peridynamics for the nonlocal ductile material failure analysis in metal machining process [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 291: 197-215. DOI: 10.1016/j.cma.2015.03.003.
- [22] WU C T, BUI T Q, WU Y, et al. Numerical and experimental validation of a particle galerkin method for metal grinding simulation [J]. Computational Mechanics, 2017, 61(3): 365-383. DOI: 10.1007/s00466-017-1456-6.
- [23] 黄长强, 朱鹤松. 球形破片对靶板极限穿透速度公式的建立 [J]. 弹箭与制导学报, 1993, (02):58-61.  
HUANG C Q, ZHU H S. Development of a formula for the ballistic limit penetration velocity of spherical fragments against target plates [J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 1993, (02):58-61.
- [24] 郭锐, 陈佑明, 杨贵涛, 等. 一种基于 LS-DYNA 的 SPH 算法破片识别方法: CN202210859442.6 [P]. 2022-09-23.