

DOI: 10.11883/bzycj-2024-0248

钻地弹侵彻深度尺寸效应分析与实用计算公式*

何勇¹, 徐天涵², 张效晗¹, 随亚光³, 邢灏喆²

- (1. 南京理工大学机械工程学院工程安全防护技术研究所, 江苏 南京 210094;
2. 陆军工程大学爆炸冲击防灾减灾全国重点实验室, 江苏 南京 210007;
3. 西北核技术研究所, 陕西 西安 710024)

摘要: 缩比模型试验是研究弹体侵彻规律的重要手段, 模型试验结果与原型之间的尺寸效应是建立侵深计算方法必须解决的问题。依据已有基础理论推导了钻地弹侵彻岩石类靶体介质的应力与应变状态演化和弹体侵彻阻抗函数, 得到了表征尺寸效应的弹径系数公式, 并在常规钻地弹侵彻速度范围内对弹形系数和弹径系数作了简化分析, 提出了常规钻地弹侵彻岩石类介质的实用计算公式, 系数可直接由弹靶参数确定。结果表明, 弹体侵彻阻抗的主要影响因素是靶体波阻抗, 尺寸效应是由于靶体破坏区范围不满足几何相似律, 弹形系数可简化为弹头长径比的线性函数, 平头弹弹形系数为 0.57, 弹径系数由侵彻空腔半径与破碎区半径之比决定, 对于常规钻地弹, 弹径系数可取 1.2~1.4。侵深理论公式与试验结果对比符合较好, 具有较高的可靠性。

关键词: 侵彻深度; 刚性弹; 尺寸效应; 弹径系数; 弹形系数

中图分类号: O389; TU45

国标学科代码: 13035

文献标志码: A

Analysis of the size effect on the penetration depth of earth-penetrating projectiles and practical calculating formula

HE Yong¹, XU Tianhan², ZHANG Xiaohan¹, SUI Yaguang³, XING Haozhe²

- (1. *Institute of Engineering Safety Protection Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, Jiangsu, China;*
2. *State Key Laboratory of Explosion and Impact and Disaster Prevention and Mitigation, Army Engineering University of PLA, Nanjing 210007, Jiangsu, China;*
3. *Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, Shaanxi, China*)

Abstract: The penetration depth of the earth-penetrating projectile is a basic problem in the design of protection engineering. Scaled testing is an important method to study the penetration law. The size effect between the model test results and the prototype is a problem that must be solved to establish the calculation method of penetration using scaled tests. In this study, the stress and strain state evolution of the rock-like target medium subjected to the penetration of earth-penetrating projectiles and the penetration resistance function of the projectiles were derived using cavity expansion theory. The formula for the caliber coefficient characterizing the size effect was obtained, and a simplified analysis of the nose shape coefficient and caliber coefficient was conducted using curve fitting and Taylor expansion within the penetration velocity range of the conventional earth-penetrating weapons. A practical calculation formula for the penetration depth of conventional earth-penetrating weapons into rock-like media was proposed, whose coefficients can be directly determined by parameters of target and projectiles. The results show that the main influencing factor of the projectile's penetration resistance is the impedance of

* 收稿日期: 2024-07-22; 修回日期: 2024-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(12372378, 52422808, 52378401)

第一作者: 何勇(1964—), 男, 博士, 教授, hy1964@njjust.edu.cn

通信作者: 徐天涵(1995—), 男, 博士, 讲师, martinxu41@qq.com

the target. The source of the size effect is originated from the fact that the ranges of the target damage zones do not satisfy the geometric similarity law. The nose shape coefficient can be simplified into a linear function of the projectile's aspect ratio, and the nose shape coefficient of a flat-nosed projectile is 0.57. The caliber coefficient of the projectile is determined by the ratio of the cavity radius of the penetration to the radius of the fracture zone and can be taken as 1.2–1.4 for conventional earth-penetrating weapons. The theoretical calculation formula of penetration depth is in good agreement with experimental results, and thus, has high reliability.

Keywords: penetration depth; rigid projectile; size effect; caliber coefficient; nose shape coefficient

弹体对岩石、混凝土等介质的侵彻深度是防护领域研究的关键问题。目前已有大量预测侵彻深度的经验与半经验公式^[1-8], 以及基于靶体动力响应分析的理论公式^[9-12], 这些公式在试验中得到了验证。但是, 考虑到试验成本与可操作性, 开展的试验大都是缩比模型试验。这就引出了两个问题, 即模型试验结果能否推广至原型? 应以何种方式推广?

弹靶状态随侵彻速度的不同呈现不同的特征, 随侵彻速度由低到高, 可根据弹体特征划分刚性弹侵彻、变形弹侵彻以及流体弹侵彻^[13-14]。对于实际制导钻地弹等弹体, 其引信及弹体结构所能承受的加速度具有设计上限, 且弹头不能发生很大变形。在这种情况下, 弹体变形很小可以忽略, 可视为刚体。本文讨论限于刚性弹侵彻岩石、混凝土类材料。

大量文献中认为, 刚性侵彻深度满足完全相似关系^[15-19], 即对于几何相似的弹体, 当弹靶材料以及侵彻速度不变时, 弹体侵彻深度 h_m 与弹体直径 d 之比 h_m/d (比例侵深) 为常数。因此, 由缩比模型试验得到的侵彻深度可以直接按照弹体直径之比得到原型弹在相同速度下的侵彻深度。但是, 随着更多试验的开展, 研究人员发现, 按照相似比直接计算得到的侵彻深度与试验结果存在偏差, 且这种偏差随着原型弹弹径的增大而增大^[20-22]。这意味着弹体的侵彻深度可能存在尺寸效应。

研究人员通过分析不同因素的影响, 试图寻找尺寸效应的成因。Rosenberg 等^[23] 分别利用铜和钨制成长杆弹进行了一系列侵彻试验, 结果表明, 侵深的几何相似律对于延性弹体 (如铜弹) 是成立的, 而对于准脆性弹体 (如钨弹), 不同尺寸弹体表现出不同的破坏模式, 因而会产生尺寸效应。Feng 等^[24] 对弹体侵彻混凝土材料的尺寸效应开展了数值模拟研究, 结果表明, 弹体侵彻阻抗与弹头半径和最大颗粒尺寸之比有关, 较大的弹体受到的阻抗较小。Peng 等^[25] 研究了混凝土中骨料尺寸对尺寸效应的影响, 指出尺寸效应是由于未对骨料进行缩比, 若将骨料与弹体同样进行缩比, 则不存在尺寸效应, 这在试验中得到了验证^[26]。Me-Bar^[27] 对弹体侵彻过程中的能量耗散进行了分析, 指出靶体破碎过程中耗散的表面能引起了尺寸效应, 并提供了确定尺寸效应参数的试验方法。Anderson 等^[28] 研究了应变率的作用, 但结果表明应变率的影响很小, 以至于无法解释试验中发现的尺寸效应。

在模型弹与原型弹的侵深换算方面, 大部分经验公式通过引入一个系数来修正尺寸效应^[29], 然而, 这些系数往往是通过曲线拟合得到的, 不具有物理意义, 且这些经验公式往往是量纲不符的。吴飏等^[22] 在大量试验数据的基础上引入了弹径的指数函数来修正尺寸效应。王安宝等^[30] 利用弹体质量修正系数表征弹径对侵深的影响。随着数值仿真和智能算法的发展, 可直接利用计算机模拟原型试验并给出结果, 彭永等^[31] 和程月华等^[32] 开发了反映尺寸效应的数值算法, 何勇等^[33] 和李峰等^[34] 利用数物驱动智能算法实现了毁伤效应的快速评估, 在原型弹试验上应用前景广泛。

上述研究从不同方面分析了刚性弹侵彻的尺寸效应, 尤其是 Peng 等^[25] 的研究, 认为尺寸效应是由于靶体的骨料未进行缩比, 对骨料同样缩比后与试验结果符合较好^[26]。这似乎表明尺寸效应是由于某些重要参数在缩比过程中被忽视了, 然而这些研究仍存在不足。首先, 要做到对所有弹靶参数进行相同缩比是很困难的。例如 Me-Bar^[27] 指出尺寸效应与破裂面耗散的能量有关, 则需对介质的比表面能进行缩比, 这在相似材料制备中是很难做到的。在进行缩比试验时, 通常采用相同的弹靶材料, 在这样的情况下, 将缩比试验结果换算至原型时应当考虑弹体尺寸效应。其次, 现有的侵深计算公式即使是考虑了特定因素对尺寸效应的影响, 相关参数的取值仍依靠曲线拟合, 这就限制了所得公式的应用。最后, 部

分公式的靶体参数依赖经验取值, 如 Young 公式和 Bernard 公式都含有岩石质量系数, 其具体取值依赖经验判断, 主观性较强, 因此, 计算结果的可靠性一直受到争议。大部分计算公式都较为复杂, 无法实现快速计算。

为进一步揭示岩石类材料中侵深尺寸效应成因及侵深影响因素, 本文中对侵彻过程中靶体介质破碎区、径向裂纹区及弹性区的动力响应进行理论分析, 得到侵彻阻抗的表达式, 进一步建立体现弹体尺寸效应的理论侵深公式, 并对系数的计算方法进行合理简化, 得到便于工程应用的实用公式。此外, 还提出一种通过缩比试验确定参数的方法, 可适用于复杂的靶体材料。

1 现有公式尺寸效应分析

1.1 Young 公式

1967 年, 美国桑迪亚国家实验室的 Young^[8] 提出了针对天然岩土介质及混凝土的侵彻深度经验公式, 称为 Young 公式。之后又多次对该公式进行了修正, 囊括了土、岩石、混凝土、冰以及冻土等多种材料。1997 年, Young 给出了统一的岩土及混凝土侵彻公式:

$$h_m = \begin{cases} 0.000\ 8S\lambda_1\left(\frac{m_p}{A_p}\right)^{0.7} \ln(1 + 2.15 \times 10^{-4}v_0^2) & v_0 < 61\ \text{m/s} \\ 0.000\ 018S\lambda_1\left(\frac{m_p}{A_p}\right)^{0.7} (v_0 - 30.5) & v_0 \geq 61\ \text{m/s} \end{cases} \quad (1)$$

式中: h_m 为侵彻深度, m; m_p 为弹体质量, kg; A_p 为弹体截面积, m^2 ; v_0 为弹体着靶速度, m/s; S 为侵彻性指数, 为无量纲量; λ_1 为弹形系数, 取值如下:

$$\lambda_1 = \begin{cases} 0.18\frac{l}{d} + 0.56 & \text{卵形弹} \\ 0.25\frac{l}{d} + 0.56 & \text{锥形弹} \end{cases} \quad (2)$$

式中: l 为弹头长度, d 为弹头直径。

对于岩石靶体, 参数 S 的取值如下:

$$S = 2.7(f_c Q_a)^{-0.3} \quad (3)$$

式中: f_c 为无侧限抗压强度, kg/cm^2 ; Q_a 为岩石质量指标, 取值范围为 0.1~1.0。

以式 (1) 中第 2 式为例, 将等号左右两边同时除以弹体半径 r_p , 且将 A_p 与 m_p 均用 d 表示, 可得:

$$\frac{h_m}{d} = 0.000\ 018S\lambda_1\left(\frac{4\rho_p\vartheta}{\pi}\right)^{0.7} d^{-0.3}(v_0 - 30.5) \quad (4)$$

式中: ρ_p 为弹体密度; $\vartheta = V_p/d^3$ 为与弹体形状有关的无量纲系数, V_p 为弹体体积, 对于几何相似的弹体, ϑ 为常数。

从式 (4) 可以看出, 比例侵深 h_m/d 与 $d^{-0.3}$ 成正比, 体现了弹体侵彻深度的尺寸效应, 弹体直径越大, 比例侵深越小, 指数 -0.3 为试验拟合值。

1.2 Bernard 公式

Bernard 于 1977~1979 年先后提出了 3 个适用于岩石靶体的侵彻深度计算公式, 按时间顺序可分别称为 Bernard 公式 I、II 以及 III^[6-7, 35]。Bernard 公式 I 于 1977 年提出, 其形式为:

$$h_m = 0.2\frac{m_p}{A_p}\frac{v_0}{(\rho_t f_c)^{0.5}}\left(\frac{100}{D_{tq}}\right)^{0.8} \quad (5)$$

式中: ρ_t 为靶体密度; D_{tq} 为岩石质量系数, 按岩石质量由差至好取 0~100; f_c 单位为 Pa。

于 1978 年提出的 Bernard 公式 II 的形式为:

$$h_m = \frac{m_p}{A_p} \left[1.637 \frac{v_0}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \ln \left(1 + 1.637 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_0 \right) \right] \quad (6)$$

式中: $\alpha_1 = 1.6 f_c (D_{rq}/100)^{1.6}$, $\alpha_2 = 3.6 (\rho_t f_c)^{0.5} (D_{rq}/100)^{0.8}$ 。

于 1979 年提出的 Bernard 公式 III 形式为:

$$h_m = \frac{m_p}{A_p} \frac{\lambda_1}{\rho_t} \left\{ 0.545 6 v_0 \left(\frac{\rho_t}{f_{cr}} \right)^{0.5} - \frac{4}{9} \ln \left[1 + 1.228 v_0 \left(\frac{\rho_t}{f_{cr}} \right)^{0.5} \right] \right\} \quad (7)$$

式中: $f_{cr} = f_c (D_{rq}/100)^{0.2}$ 。

卵形弹弹形系数为 $\lambda_1 = 0.863 [4\psi^2 / (4\psi - 1)]^{0.25}$, 其中 ψ 为卵形弹头曲率半径 (CRH); 锥形弹弹形系数为 $\lambda_1 = 0.805 (\sin \theta_0)^{-0.5}$, θ_0 为锥形弹头半顶角。

式 (5)~(7) 中, 等号右侧与弹体尺寸有关的量只有 m_p/A_p , 将侵彻深度 h_m 无量纲化后, 等号右侧除系数 ϑ 外不存在弹径相关系数, 对于不同缩比弹体, 比例侵深为常数, 因此 Bernard 公式在形式上未考虑弹体尺寸效应。但在公式的适用条件上, Bernard 公式对弹体直径提出了要求。例如, 对于 Bernard 公式 I, 要求侵彻深度不小于 3 倍弹体直径; 对于完整岩石 ($D_{rq} > 90$), 弹体直径应在 2.54~30.48 cm 之间, 计算误差为 $\pm 20\%$; 对于 $D_{rq} < 90$ 的岩体, 弹体直径应在 10.16~30.48 cm 之间, 计算误差为 $\pm 50\%$ 。

1.3 ACE 公式

美国陆军工程兵在 1946 年通过数据拟合给出了下面的侵彻深度计算公式, 即 ACE 公式^[4]:

$$\frac{h_m}{d} = 0.5 + 3.5 \times 10^{-4} \frac{D_* d^{0.215} v_0^{1.5}}{f_c^{0.5}} \quad (8)$$

式中: $D_* = m_p/d^3$, 为弹体口径密度; f_c 的单位为 Pa。

ACE 公式的实用范围为 $v_0 = 200 \sim 1000$ m/s, $m_p = 0.02 \sim 1000$ kg, $d = 11 \sim 155$ mm, $f_c = 26.5 \sim 43.1$ MPa。可以看出, ACE 公式的比例侵深与 d 相关, 随弹径增大而增大, 体现了尺寸效应。

1.4 别列赞公式

别列赞公式根据大量侵彻试验结果总结得到, 其认为弹体侵彻过程中受到的侵彻阻力与速度呈线性关系, 将弹体运动方程积分后可得侵彻深度为^[36]:

$$h_m = \lambda_1 K_j \frac{m_p}{d^2} v_0 \quad (9)$$

式中: K_j 为截止阻力系数, 与靶体介质有关。

将式 (9) 等号两侧同时除以 d , 可得

$$\frac{h_m}{d} = \lambda_1 K_j \rho_p \vartheta v_0 \quad (10)$$

可见, 在其他条件相同时, 不同缩比弹体的比例侵深为常数, 表明别列赞公式未体现尺寸效应。文献 [37] 在别列赞公式基础上通过试验修正得到侵彻深度计算公式:

$$h_m = \lambda_1 \lambda_2 K_z \frac{m_p}{d^2} v_0 K_\alpha \cos \alpha \quad (11)$$

式中: λ_2 为弹径系数, K_z 为介质侵彻系数, K_α 为弹体偏转系数, α 为弹体入射角。

式 (11) 中通过引入系数 λ_2 来修正尺寸效应的影响, 对于不同弹径范围的弹体取不同的经验值。

1.5 空腔膨胀理论

空腔膨胀理论认为弹体侵入介质后, 对介质的挤压作用可等效为圆柱形或球形空腔的扩张作用。对于岩石类材料, 空腔外介质可划分为破碎区、径向裂纹区和弹性区。空腔表面对弹体的作用力即侵彻阻力, 来自于空腔外介质内部的应力。Forrestal 及其合作者在空腔膨胀理论方面开展了大量工作, 并结合试验研究得到了岩石、混凝土等介质的侵彻深度理论计算方法和实用计算公式^[11-12, 16, 18, 38-39]。

根据不同岩石本构, Forrestal 给出了不同的侵彻阻力 (正入射) 计算公式, 但均可写为以下形式^[12]:

$$F_z = \pi r_p^2 \sigma_r(\delta), \quad \sigma_r(\delta) = S(\delta)K \quad (12)$$

式中: F_z 为沿侵彻方向的侵彻阻力, σ_r 为介质径向应力, δ 为表示空腔表面的无量纲位置参数, S 为与介质本构和介质参数有关的函数, K 为介质体积模量。

Forrestal 等^[18] 和 Frew 等^[40] 分别给出了适用于混凝土和石灰岩的半经验两项式阻力函数:

$$F_z = \pi r_p^2 (R_t + \lambda_1 \rho_t v_p^2) \quad h_m > 4r_p \quad (13)$$

式中: $R_t = 82.6 f_c (f_c / 10^6)^{-0.544}$ 为靶体强度系数, f_c 单位为 Pa, v_p 为弹体侵彻过程中的瞬时速度, $\lambda_1 = (8\psi - 1) / 24\psi^2$ 。

当 $h_m < 4r_p$ 时, 认为侵彻阻力与侵彻深度成正比。根据牛顿第二定律可得 $h_m \geq 4r_p$ 时侵彻深度为:

$$h_m = \frac{m_p}{2\pi r_p^2 \rho_t \lambda_1} \ln \left(1 + \frac{\lambda_1 \rho_t v_1^2}{R_t} \right) + 4r_p \quad (14)$$

式中: v_1 为侵彻深度达 $4r_p$ 时的弹体瞬时速度, 按下式计算:

$$v_1^2 = \frac{m_p v_0^2 - 4\pi r_p^3 R_t}{m_p + 4\pi r_p^3 \lambda_1 \rho_t} \quad (15)$$

将式 (15) 分子分母同时除以 d^3 可得:

$$v_1^2 = \frac{2\vartheta v_0^2 - \pi R_t}{2\vartheta + \pi \lambda_1 \rho_t} \quad (16)$$

可见, v_1 是弹径不相关的。将式 (14) 等号两侧同时除以 d , 同样可得比例侵深与弹径无关, 因此, 式 (14) 给出的空腔膨胀理论侵深计算公式未体现弹体尺寸效应。然而 Forrestal 等^[20] 在后续研究中发现, 按式 (14) 计算得到的结果与试验相差较大, 指出 R_t 除靶体参数外还应当考虑弹体尺寸效应, 但未能给出计算公式。吴飏等^[22] 通过试验数据拟合在 R_t 中引入了弹径 d 的指数函数, 以表征尺寸效应。

上述经验与理论公式中, 通过限定试验初始条件、引入修正系数等方法减小或修正尺寸效应的影响, 但无法反映尺寸效应的物理本质, 其取值的经验性也限制了公式的进一步拓展, 尤其难以适应日益出现的各种新材料、新弹体。蒋东等^[41] 指出, 材料的破坏(如绝热剪切和动态拉伸过程)会导致尺寸效应, Me-Bar^[27] 也认为尺寸效应与侵彻过程中的“面积效应”即介质破碎有关。因此, 可以从侵彻介质破碎区的动力响应出发研究侵彻尺寸效应。

2 岩石类材料侵彻基本理论

2.1 靶体介质动力学方程

弹体侵入靶体介质时, 靶体介质受到挤压向外运动。试验表明, 介质按破坏特征通常可划分为破碎区、径向裂纹区和弹性区, 如图 1 所示, 其中 r_c 、 r_s 、 r_f 分别为空腔区、破碎区和径向裂纹区的半径。弹体挤压介质向外运动形成空腔区, 空腔区外破碎区介质在高压作用下发生剪切破碎, 径向裂纹区的介质受到破碎区介质的挤压(膨胀)形成破坏裂缝, 类似径向柱杆, 主要把破碎区的压力过渡到弹性区介质中去, 应力-应变关系满足胡克定律。弹性区介质具有原始的弹性特征, 可以采用广义胡克定律。

以空腔中心为原点建立球坐标(图 1), 则破碎区介质的动量守恒及质量守恒方程在球坐标

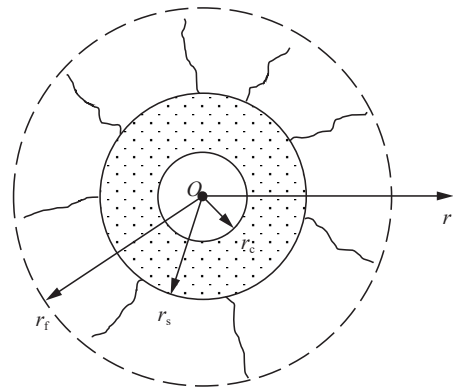


图 1 侵彻破坏分区示意图

Fig. 1 Schematic diagram of penetration damage zones

系下的欧拉形式分别为:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = (1 - \varepsilon) \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r + \sigma_\theta)}{r} \right] \quad (17)$$

$$(1 - \varepsilon) \left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] = 0 \quad (18)$$

式中: t 为时间; $\varepsilon = 1 - \rho_0/\rho$ 为介质体应变, 其中 ρ_0 为初始密度, ρ 为变形后密度; v 为介质粒子速度; σ_r 为介质径向应力; σ_θ 为介质环向应力。

式 (17)~(18) 的边界条件和初始条件如下。

(1) 弹体表面侵彻阻抗 σ_n 大小等于空腔表面径向应力 σ_r , 空腔表面粒子速度等于空腔膨胀速度, 即:

$$\begin{cases} \sigma_n = -\sigma_r \\ v(r_c, t) = \dot{r}_c \end{cases} \quad (19)$$

式中: \dot{r}_c 为空腔膨胀速度。

(2) 在无穷远处, 介质径向应力为零, 即 $\sigma_r(\infty) = 0$ 。可认为在某一边界 $r = R$ 以外, 介质不受侵彻作用影响, 则在该边界处满足:

$$\begin{cases} v(R) = 0 \\ \sigma_r(R) = \sigma_\theta(R) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

(3) 空腔运动的初始条件为:

$$\dot{r}_c|_{t=0} = 0 \quad (21)$$

2.2 介质的动态演化

2.2.1 破碎区应力分析

根据岩石介质受强动载近区的“短波”理论^[23], 在侵彻近区波阵面上的应力与粒子速度可写为:

$$\begin{cases} -\sigma_r = \rho_0 c_p v \\ v = -c_p \varepsilon \end{cases} \quad (22)$$

式中: c_p 为介质纵波波速, 负号表示指向微元内侧。

破碎区介质处于内摩擦状态, 环向应力与径向应力的关系满足:

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_r} = \alpha^* \quad \alpha_0 < \alpha^* < 1 \quad (23)$$

式中: $\alpha^* = (1 - \sin\phi)/(1 + \sin\phi)$ 为内摩擦介质侧压力系数, 其值大小与内摩擦角 ϕ 有关, 随着压力的增加, ϕ 减小并逐渐趋近于零, α_0 为弹性介质侧压力系数。

结合式 (22)~(23), 可将式 (18) 写为:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + (2 - \alpha^*) \frac{\varepsilon}{r} = 0 \quad (24)$$

积分式 (24) 可得:

$$\varepsilon(r, t) = \frac{\lambda(t)}{r^n} \quad (25)$$

式中: $\lambda(t)$ 为待定系数, $n = 2 - \alpha^*$ 为衰减系数, 对于均匀、连续的理想介质, n 应当小于 2, 可取 $n = 1.6 \sim 1.8$, 但对于实际存在节理、裂隙以及骨料的岩石、混凝土类材料, n 可以大于 2。

将式 (22)、(19) 代入式 (25) 可得:

$$\lambda(t) = -\frac{\dot{r}_c}{c_p} r_c^n \quad (26)$$

因此, 式 (25) 可写为:

$$\varepsilon(r, t) = -\frac{\dot{r}_c}{c_p} \left(\frac{r_c}{r} \right)^n \quad (27)$$

式 (27) 为破碎区应变分布函数。

若考虑介质压缩的弱非线性, 则破碎区应力与应变的微分关系为:

$$\frac{d\sigma_r}{d\varepsilon} = \rho_0 c_p^2 (1 + l_* \varepsilon) \quad (28)$$

式中: l_* 为弱非线性系数, 且满足 $|l_* \varepsilon| \ll 1$, 反映介质压缩的非线性特征。

积分式 (28) 可得:

$$\sigma_r = \rho_0 c_p^2 \left[\varepsilon + \frac{l_*}{2} \varepsilon^2 + D_1 \right] \quad (29)$$

式中: D_1 为待定系数。

将式 (27) 代入式 (29), 可得破碎区径向应力通解为:

$$-\sigma_r^s = \rho_0 c_p \dot{r}_c \left(\frac{r_c}{r} \right)^n - \frac{l_*}{2} \rho_0 \dot{r}_c^2 \left(\frac{r_c}{r} \right)^{2n} - \rho_0 c_p^2 D_1 \quad (30)$$

2.2.2 径向裂纹区应力分析

径向裂纹区介质被张开的径向裂纹分割, 环向应力分量为零, 因此, 平衡方程为:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\sigma_r}{r} = 0 \quad (31)$$

在 $r = r_s$ 处, 即径向裂纹区与破碎区边界上, 介质满足 Tresca 屈服条件, 即:

$$\sigma_\theta(r_s) - \sigma_r(r_s) = 2\tau_s \quad (32)$$

式中: τ_s 为靶体介质的剪切屈服极限。

考虑到 $\sigma_\theta = 0$, 积分式 (31), 并以式 (32) 为边界条件, 可得径向裂纹区的径向应力为:

$$-\sigma_r^f = 2\tau_s \frac{r_s^2}{r^2} \quad (33)$$

2.2.3 弹性区应力分析

径向裂纹区外介质处于弹性状态, 平衡方程与应力-应变的关系为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \\ \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = G(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) \end{cases} \quad (34)$$

边界条件为式 (20)。考虑到弹体侵彻时, 靶体至少有一个自由面, 因此, 弹性区消耗在体积压缩上的能量不大, 可以认为满足体积不可压缩条件 $\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = 0$, 即:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} = 0 \quad (35)$$

式中: u_r 为介质径向位移。

式 (35) 的通解为:

$$u_r = \frac{D_2}{r^2} \quad (36)$$

式中: D_2 为待定系数。

由式 (36) 可得弹性区介质应变为:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -2 \frac{D_2}{r^3} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{D_2}{r^3} \end{cases} \quad (37)$$

将式 (37) 代入式 (34), 可得弹性区应力通解为:

$$-\sigma_r^e = 4GD_2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \quad (38)$$

根据径向裂纹区与弹性区边界处的应力连续条件 $\sigma_r^p(r_f) = \sigma_r^e(r_f)$, 可得系数 D_2 为:

$$D_2 = \frac{\tau_s r_s^2 r_f}{2G \left[1 - \left(\frac{r_f}{R} \right)^3 \right]} \quad (39)$$

由此可得弹性区应力为:

$$-\sigma_r^e = \frac{2\tau_s r_s^2 r_f}{\left[1 - (r_f/R)^3 \right]} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \quad (40)$$

2.2.4 空腔表面径向应力

根据破碎区和径向裂纹区表面应力连续条件 $\sigma_r^s(r_s) = \sigma_r^p(r_s)$, 可得式 (30) 中的待定系数 D_1 为:

$$D_1 = -\frac{2\tau_s}{\rho_0 c_p^2} + \frac{\dot{r}_c}{c_p} \left(\frac{r_c}{r_s} \right)^n - \frac{l_* \dot{r}_c^2}{2 c_p^2} \left(\frac{r_c}{r_s} \right)^{2n} \quad (41)$$

将式 (41) 代入式 (30), 可得破碎区径向应力为:

$$-\sigma_r^s = 2\tau_s + \rho_0 c_p \dot{r}_c \left[\left(\frac{r_c}{r} \right)^n - \left(\frac{r_c}{r_s} \right)^n \right] - \frac{l_* \rho_0 \dot{r}_c^2}{2} \left[\left(\frac{r_c}{r} \right)^{2n} - \left(\frac{r_c}{r_s} \right)^{2n} \right] \quad (42)$$

当 $r = r_c$ 时, 得到空腔表面径向应力 $\sigma_r^s(r_c)$, 根据式 (19) 即可得到侵彻阻抗为:

$$\sigma_n = -\sigma_r^s(r_c) = \lambda_s + \lambda_d \rho_0 c_p \dot{r}_c + \lambda_e \rho_0 \dot{r}_c^2 \quad (43)$$

式中: $\lambda_s = 2\tau_s$, $\lambda_d = 1 - (r_c/r_s)^n$, $\lambda_e = -\frac{l_*}{2} [1 - (r_c/r_s)^{2n}]$ 。

式 (43) 中空腔半径 r_c 可取弹体半径, 由此得到了侵彻阻抗系数与介质物理力学特征以及弹径的关系。对于岩石材料刚性侵彻, 可以忽略介质压缩的弱非线性特征 ($l_* = 0$), 因此, 侵彻阻抗主要由介质固有强度 τ_s 以及波阻抗 $\rho_0 c_p$ 决定, 本质上体现了剪切变形与体积压缩的线性相关性, 其中 τ_s 为破碎区与径向裂纹区边界的介质强度, 实际为准静态弹性极限, 数值上与 $\rho_0 c_p \dot{r}_c$ 相比较小, 因此, 波阻抗是影响侵彻阻抗的主要因素。

2.3 侵彻阻力函数

式 (43) 给出了侵彻过程中弹体表面微元受到的法向侵彻阻抗, 而弹体所受侵彻阻力还与弹头形状有关, 常见弹头形状有锥形弹和卵形弹。

(1) 锥形弹侵彻阻力

锥形弹弹头特征如图 2 所示, 弹头截面为等腰三角形, r_p 为弹体半径, l 为弹头长度, θ_0 为弹头半顶角, r 为弹头表面一点到弹体轴线的距离。

根据锥形弹头几何特征, 可得作用在弹头微元上的法向阻力与切向阻力为:

$$\begin{cases} dF_n = 2\pi \frac{r}{\sin \theta_0} \sigma_n dr \\ dF_t = \mu_0 dF_n \end{cases} \quad (44)$$

式中: μ_0 为弹靶之间的摩擦因数。

将式 (44) 沿弹头表面积分, 可得弹头轴向合阻力为:

$$F = 2\pi \int_0^{r_p} r \sigma_n \left(1 + \frac{\mu_0}{\tan \theta_0} \right) dr \quad (45)$$

空腔膨胀速度与弹体瞬时侵彻速度 v 之间

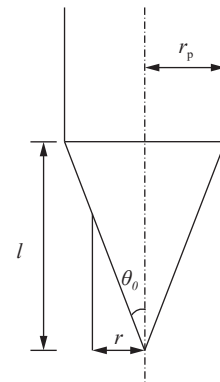


图 2 锥形弹弹头特征

Fig. 2 Characteristics of conical projectile

的关系为:

$$\dot{r}_c = v \sin \theta_0 \quad (46)$$

若不考虑介质压缩的弱非线性, 将式 (43) 代入式 (45), 可得弹体侵彻阻力为:

$$F = \alpha_s + \beta_s v \quad (47)$$

式中: $\alpha_s = \pi r_p^2 \kappa_0 \lambda_s$, $\beta_s = \pi r_p^2 \kappa_0 \frac{\sin \theta_0}{K_q} \lambda_d$, $\kappa_0 = 1 + \mu_0 \cot \theta_0$, $K_q = 1/\rho_0 c_p$ 。

(2) 卵形弹侵彻阻力

卵形弹弹头特征如图 3 所示, 弹头截面为对称的圆弧, 圆弧半径为 s , 圆弧上任意一点的半径与弹轴方向夹角为 θ , 弹尖对应夹角为 θ_0 , 即 $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{s-r_0}{s}\right) = \arcsin\left(1 - \frac{1}{2\psi}\right)$, $\psi = \frac{s}{2r_0}$ 为弹头的 CRH 值。

根据卵形弹几何特征, 可得作用在弹头微元的法向阻力与切向阻力为:

$$\begin{cases} dF_n = 2\pi s^2 \left(\sin \theta - \frac{s-r_p}{s}\right) \sigma_n d\theta \\ dF_t = \mu_0 dF_n \end{cases} \quad (48)$$

将式 (48) 沿弹头圆弧积分, 可得弹头轴向合阻力为:

$$F = 2\pi s^2 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \theta - \frac{s-r_p}{s}\right) (\cos \theta + \mu_0 \sin \theta) \sigma_n d\theta \quad (49)$$

式 (49) 中积分变量为 θ , 而积分函数中的 σ_n 含有变量 \dot{r}_c (式 (43)), 根据卵形弹头几何特征, 可得空腔膨胀速度与弹体瞬时侵彻速度 v 之间的关系为:

$$\dot{r}_c = v \cos \theta \quad (50)$$

将式 (43) 代入式 (49), 并将 \dot{r}_c 用式 (50) 代替, 则积分函数中的积分变量 θ 均以显式形式存在, 可直接积分。若不考虑介质压缩的弱非线性, 将式 (49) 积分并整理后可得侵彻阻力为:

$$\begin{cases} F = \alpha_s + \beta_s v \\ \alpha_s = \pi r_p^2 \lambda_s \left[1 + 4\mu_0 \psi^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) - \mu_0 (2\psi - 1)(4\psi - 1)^{0.5} \right] \\ \beta_s = \pi r_p^2 \frac{\lambda_d}{K_q} \left[\frac{12\psi^2 - 4\psi + 1}{6\psi} \sqrt{4\psi - 1} - 2\psi(2\psi - 1) \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + \mu_0 \left(1 - \frac{1}{6\psi}\right) \right] \end{cases} \quad (51)$$

3 侵彻深度计算公式与简化

3.1 弹体侵彻深度

考虑弹体垂直入射半无限均匀靶体, 则弹体运动方程为:

$$m_p \frac{d^2 h}{dt^2} = -F \quad (52)$$

式中: h 为任意时刻的侵彻深度。

初始条件为:

$$\begin{cases} h|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \end{cases} \quad (53)$$

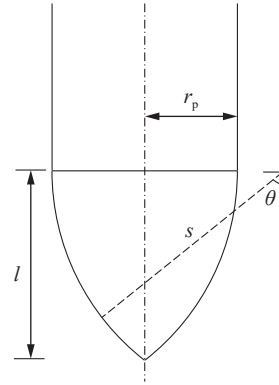


图 3 卵形弹弹头特征

Fig. 3 Characteristics of ogival projectile

由式 (47)、(51) 可知, 对于不同弹头形状, 侵彻阻力均可写为 $F = \alpha_s + \beta_s v$ 的形式, 将其代入式 (52) 可得:

$$-m_p \frac{d^2 h}{dt^2} = \alpha_s + \beta_s v \quad (54)$$

将式 (54) 等号两边同时乘以 v 并作变换可得:

$$dh = -\frac{m_p v}{\alpha_s + \beta_s v} dv \quad (55)$$

积分式 (55) 可得最终侵彻深度为:

$$h_m = \frac{m_p}{\beta_s} \left[v_0 - \frac{\alpha_s}{\beta_s} \ln \left(1 + \frac{\beta_s}{\alpha_s} v_0 \right) \right] \quad (56)$$

根据岩石、混凝土类介质打击速度的作用分区^[42], 在现有制导钻地弹打击速度范围内 ($v_0/c_p > 0.1$), 完全可以忽略式 (56) 中对数项的影响, 则侵彻深度公式可简化为:

$$h_m = \frac{m_p}{\beta_s} v_0 = \frac{m_p}{d^2} \frac{4r_p^2 \lambda_d}{\beta_s K_q} \frac{1}{\lambda_d} K_q v_0 = \frac{m_p}{d^2} \lambda_1 \lambda_2 K_q v_0 \quad (57)$$

式中: $\lambda_1 = \frac{4r_p^2 \lambda_d}{\beta_s K_q}$ 和 $\lambda_2 = 1/\lambda_d$ 为无量纲系数, $K_q = 1/\rho_0 c_p$ 为侵彻介质系数。

将式 (57) 进行变换后可得其无量纲形式, 即在等号两侧同时除以 d 可得:

$$\frac{h_m}{d} = \lambda_1 \lambda_2 \frac{m_p}{\rho_0 d^3} \frac{v_0}{c_p} \quad (58)$$

式中: 对于相同材料且几何相似的弹体, $m_p/\rho_0 d^3$ 为无量纲常数, 可见该式是量纲相符的。

式 (57) 与正入射的别列赞公式具有相同的形式, 别列赞公式中系数均由经验确定, 而式 (57) 回答了侵彻系数与弹靶介质特征的关联, 具有明确的物理意义。还可以看出, 影响侵彻深度的主要介质性质为波阻抗。式 (58) 中, 在相同弹靶材料情况下, 缩比试验与原型试验的 $m_p/\rho_0 d^3$ 与 v_0/c_p 相同, 下文中将指出 λ_1 仅与弹头形状有关, 因此称为弹形系数, λ_2 与弹径有关, 使得比例侵深随弹径变化, 反映了侵深尺寸效应, 称为弹径系数。此外, 式 (58) 中 λ_1 与 λ_2 的计算较为复杂, 不便于工程应用, 在常见钻地弹尺寸与侵彻速度范围内, 可对其进行简化。

3.2 侵彻公式系数简化分析

3.2.1 弹形系数简化

(1) 锥形弹

将式 (47) 中的 β_s 代入式 (57) 中的 λ_1 , 可得锥形弹弹形系数为:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi \kappa_0 \sin \theta_0} \quad (59)$$

根据弹头几何关系, λ_1 可写为:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi [1/2 + \mu_0(l/d)]} \sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad (60)$$

弹形系数不仅与弹头形状有关, 还与摩擦因数有关, 这是由于不同形状弹头的摩擦程度不同。在侵彻过程中, 靶体介质发生破碎并向弹体后方射出, 在弹靶界面上形成颗粒流, 使摩擦因数减小, 因此, 可取摩擦因数 μ_0 为零, 此外, 忽略摩擦得到的侵彻深度偏大, 对于工程设计而言是偏安全的。对于现有制导钻地弹, 弹头长径比 l/d 通常在 1~3 范围内, 将式 (60) 在 $l/d = 1$ 处泰勒展开, 取到一次项, 可得:

$$\lambda_1 = 2.28 \frac{l}{d} + 0.57 \quad (61)$$

泰勒展开所得曲线见图 4, 在长径比 1~3 范围内, 式 (61) 与式 (60) 相比的最大相对误差为 -4%。

(2) 卵形弹

将式 (51) 中的 β_s 代入式 (57) 中的 λ_1 , 可得卵形弹弹形系数为:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{12\psi^2 - 4\psi + 1}{6\psi} \sqrt{4\psi - 1} - 2\psi(2\psi - 1) \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + \mu_0 \left(1 - \frac{1}{6\psi} \right) \right]^{-1} \quad (62)$$

考虑到 $\psi = (l/d)^2 + 1/4$ 以及 $\theta_0 = \arcsin[1 - 1/(2\psi)]$, 可将式 (62) 写成长径比 l/d 以及摩擦因数 μ_0 的函数。取 $\mu_0=0$, 对式 (62) 进行线性拟合, 可得:

$$\lambda_1 = 2.2 \frac{l}{d} + 0.57 \quad R^2 = 0.9997 \quad (63)$$

式 (62) 与式 (63) 的对比见图 5, 线性拟合曲线的相对误差最大为 -1.8%。

当 $l/d=0$ 时, 锥形弹与卵形弹均退化为平头弹, 对比式 (61) 与式 (63) 可以看出, 此时弹形系数均为 0.57, 而 Young 公式中平头弹弹形系数为 0.56^[8], 可见本文给出的弹形系数自身具有一致性, 且与经验公式符合较好。

3.2.2 弹径系数简化

取 $n=2$, 则式 (57) 中弹径系数 λ_2 可写为:

$$\lambda_2 = \frac{1}{1 - (r_c/r_s)^2} \quad (64)$$

考虑到 $(r_c/r_s)^2$ 是个小量, λ_2 可简化为:

$$\lambda_2 = \frac{1}{1 - (r_c/r_s)^2} \approx 1 + (r_c/r_s)^2 \quad (65)$$

根据裂纹扩展条件及破碎区和径向裂纹区的位移连续条件, 可得空腔半径 r_c 与破碎区半径 r_s 之间的关系为^[42]:

$$\frac{r_c^2}{r_s^2} = \frac{2\tau_s}{3G} \sqrt{\frac{2\tau_s}{\gamma_B} r_c} \quad (66)$$

式中: τ_s 为靶体剪切强度, G 为靶体剪切模量, γ_B 为裂纹扩展单位面积表面能。

将式 (66) 代入式 (65), 并令 $d=2r_c$, 可得:

$$\lambda_2 = 1 + \frac{2\tau_s}{3G} \sqrt{\frac{\tau_s}{\gamma_B} d} \quad (67)$$

式 (67) 中除靶体介质特征参数外, 还包括弹体直径 d , 因此, λ_2 体现了弹体侵彻深度的口径放大效应, 即尺寸效应, 随着弹体直径的增加, 弹径系数增大, 即比例侵深增大, 与 ACE 公式和别列赞公式规律相同。从式 (65)~(66) 可以看出, 尺寸效应与 r_c/r_s 有关, 本质上是空腔半径与破碎区半径不满足几何相似律, 这是由介质自身破坏过程所决定的。对于岩石类材料, 破碎区半径大于空腔半径, 提高剪切强度或增大弹体直径时, r_c/r_s 增大, 对于厘米级小直径弹体, λ_2 接近于 1, 因此, 小比例室内试验与原型试验之间的尺寸效应不可忽视。

在平面应变条件下, 介质的比表面能可写为^[43]:

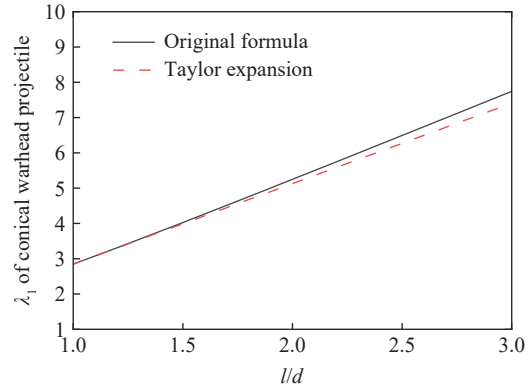


图 4 锥形弹弹形系数原公式与泰勒展开对比

Fig. 4 Comparison between the nose shape coefficient of conical projectile and its Taylor expansion

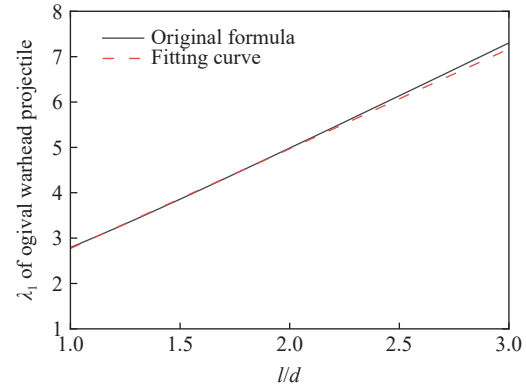


图 5 卵形弹弹形系数原公式与拟合曲线对比

Fig. 5 Comparison of the original formula and fitting curve of the nose shape coefficient for ogival projectile

$$\gamma_B = \frac{\pi K_{Ic}^2 (1-\nu)}{4G} \quad (68)$$

式中: ν 为介质泊松比, K_{Ic} 为介质的 I 型断裂韧度。

将式 (68) 代入式 (67), 可得:

$$\lambda_2 = 1 + \frac{4}{3\sqrt{\pi(1-\nu)}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\Delta}} d \quad (69)$$

式中: $\varepsilon_0 = \tau_s/G$, $\Delta = (K_{Ic}/\tau_s)^2$ 。

对于 $\nu = 0.2 \sim 0.3$, 系数 $4/[3\sqrt{\pi(1-\nu)}] = 0.84 \sim 0.90$, 可取平均值 0.87, 因此弹径系数为:

$$\lambda_2 = 1 + 0.87 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\Delta}} d \quad (70)$$

由式 (70) 可知, 侵彻深度的尺寸效应与介质的极限剪应变 $\varepsilon_0 = \tau_s/G$ 与参数 $\Delta = (K_{Ic}/\tau_s)^2$ 有关, Δ 是确定介质中侵彻爆炸破坏范围的重要尺度参数, 是材料动态破坏力学的基础问题。

从式 (57)、(70) 可以看出, 靶体参数中影响弹体侵彻深度的主要因素是波阻抗 $\rho_0 c_p$ 以及裂纹尖端塑性区尺度 Δ , 在设计抗侵彻材料时, 波阻抗的提高倍数一般为 2~3 倍, 除此以外, 还应提高材料韧性, 如添加纤维材料。

根据公开文献可得典型岩石材料参数, 见表 1, 可见岩石极限剪应变在 $(0.8 \sim 4.0) \times 10^{-3}$ 范围内, 可取 2×10^{-3} 。根据表中数据还可得不同岩体的 τ_s/K_{Ic} 在 $13 \sim 22 \text{ m}^{-1/2}$ 范围内。

表 1 典型岩石参数^[44-49]

Table 1 Typical rock parameters^[44-49]

岩石类型	剪切强度/MPa	剪切模量/GPa	I 型断裂韧度/(MPa·m ^{1/2})
花岗岩	15~30 ^[44]	8~24 ^[45]	0.68~1.39 ^[46]
			1.65~1.73 ^[47]
大理岩	10~30 ^[44]	4~7 ^[48]	0.87~1.18 ^[46]
	15~30 ^[45]		0.71~1.45 ^[48]
砂岩	8~40 ^[45]	2~32 ^[45]	—
玄武岩	25~60 ^[45]	32~44 ^[45]	2~3 ^[47]

将 $\varepsilon_0 = 2 \times 10^{-3}$ 以及 $\tau_s/K_{Ic} = 13 \sim 22 \text{ m}^{-1/2}$ 代入式 (70) 可得:

$$\lambda_2 = 1 + (0.5 \sim 0.8) \sqrt{d} \quad (71)$$

式中: 弹径 d 的单位为 m。

美国制导钻地弹 GBU-28 的直径为 36.83 cm, B61-11 直径为 34 cm, MMTD 直径为 15 cm^[49], 因此, 弹径 d 取 0.1~0.4 m, 代入式 (71) 可得在不同参数变化范围内的弹径系数大小, 见图 6, 其中 $\xi = 0.87 \sqrt{\varepsilon_0/\Delta}$ 表征了不同的材料特征。

从图 6 可以看出, 对于给定弹径的弹体, 不同靶体材料 (ξ 不同) 引起的 λ_2 变化在 15% 以内, 取平均值 $\xi = 0.65$ 时, λ_2 的误差不超过 10%, 因此, 对于常见岩体材料, 可以忽略介质性质对 λ_2 的影响, 避免测定 ε_0 、 τ_s 以及 K_{Ic} 等材料参数带来的麻烦, 可按下式计算 λ_2 :

$$\lambda_2 = 1 + 0.65 \sqrt{d} \quad (72)$$

由式 (72) 可得, 在弹径 0.1~0.4 m 范围内, $\lambda_2 = 1.2 \sim 1.4$ 。

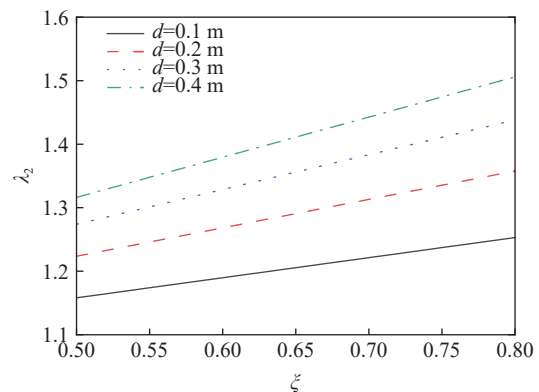


图 6 不同靶体材料弹径系数变化曲线

Fig. 6 Curves of variation in diameter coefficient of different target materials

对于钢纤维混凝土、玻璃纤维混凝土等高强高韧新型防护材料, ξ 可能超过图 6 的范围, 且难以快速获取其 K_{ic} 、 τ_s 等力学参数, 可以采用试验的方法确定靶体参数以及弹径系数。

进行两组侵彻试验, 弹靶介质相同, 弹体直径分别为 d_1 、 d_2 且弹体几何相似, 因此, 弹体的弹径系数相同。设试验侵彻深度分别为 h_{m1} 与 h_{m2} , 由于对于几何相似的弹体, m_p/d^3 为常数, 因此, 根据式 (57) 可得比例侵深之比为:

$$\frac{h_{m1}/d_1}{h_{m2}/d_2} = \frac{(m_{p1}/d_1^3)\lambda_{11}\lambda_{21}K_qv_{01}}{(m_{p2}/d_2^3)\lambda_{12}\lambda_{22}K_qv_{02}} = \frac{\lambda_{21}v_{01}}{\lambda_{22}v_{02}} \quad (73)$$

式中: 系数中下标最后一个数字代表试验组别, $\lambda_{11} = \lambda_{12}$ 。

将弹径系数 $\lambda_{21} = 1 + \xi\sqrt{d_1}$ 、 $\lambda_{22} = 1 + \xi\sqrt{d_2}$ 代入式 (73) 可得:

$$\xi = \frac{1 - \bar{h}_{12}/\bar{v}_{12}}{\sqrt{d_2}(\bar{h}_{12}/\bar{v}_{12} - \sqrt{d_1}/d_2)} \quad (74)$$

式中: $\bar{h}_{12} = \frac{h_{m1}/d_1}{h_{m2}/d_2}$, $\bar{v}_{12} = \frac{v_{01}}{v_{02}}$ 。

式 (74) 中, \bar{v}_{12} 和 d_1 、 d_2 为已知的试验初始条件, \bar{h}_{12} 可根据试验结果得到, 由此, 理论上根据两组弹体几何相似的侵彻试验即可确定系数 ξ , 从而确定弹径系数 λ_2 。实际由于侵彻结果的离散性, 应当多次试验, 选取不同组别计算 ξ 后取平均值。

基于式 (73) 还可分析不同缩比试验的尺寸效应, 根据前期研究^[50], 缩比为 1/4~1/10 的模型试验换算至原型时, 侵彻深度应乘以尺寸效应系数 1.2~1.3, 与式 (72) 根据实际岩石数据得到的结果一致。

4 计算结果对比分析

4.1 花岗岩试验对比

张德志等^[51] 利用 2 种不同弹径的钢弹对花岗岩进行侵彻试验。弹体直径分别为 15、20 mm, 质量分别为 0.19、0.45 kg, 两种弹体几何相似, 弹头为尖卵形, CRH 值均为 3。靶体单轴抗压强度为 154 MPa, 弹性模量为 66 GPa, 泊松比为 0.23, 密度为 2660 kg/m³, 计算可得纵波波速为 5363 m/s。直径 20 mm 的弹体侵彻速度范围为 300~615 m/s, 直径 15 mm 的弹体侵彻速度为 332~988 m/s, 其中侵彻速度大于等于 900 m/s 时, 发生侵深递减, 根据试验结果, 这是由于弹体发生失稳跳弹, 因此, 刚性侵彻速度范围取小于 900 m/s。根据弹靶参数计算得到 $K_q = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}/\text{kg}$, $\lambda_1 = 4.22$, λ_2 按式 (72) 计算, 弹径为 15、20 mm 时 λ_2 分别为 1.08 与 1.10, 将上述参数代入式 (57), 可得侵彻深度理论结果, 同时与第 1 节的经验、半经验公式进行对比, 结果见图 7。

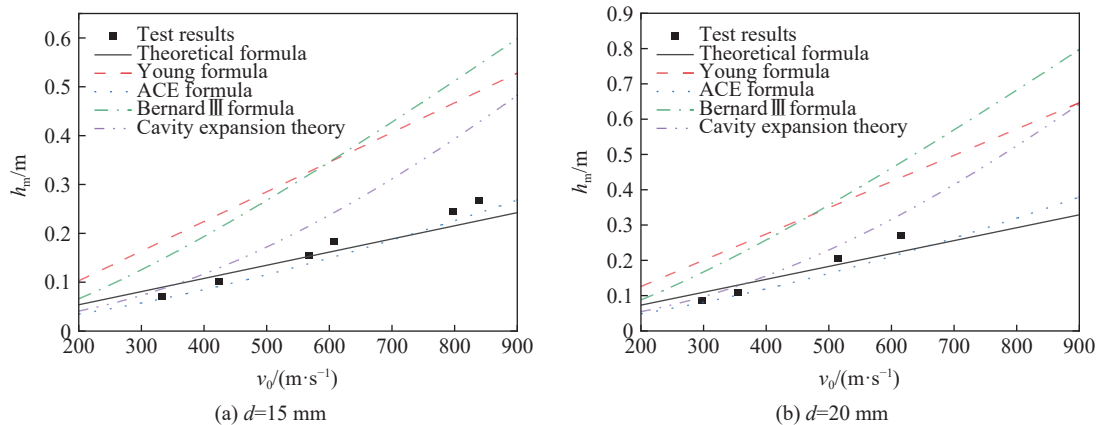


图 7 花岗岩侵彻试验结果对比

Fig. 7 Comparison of empirical and experimental penetration results for granite target

可以看出, Young 公式以及 Bernard III 公式与试验结果相比均偏大, 空腔膨胀理论和 ACE 公式在侵彻速度小于 500 m/s 时与试验误差较小, 速度大于 500 m/s 时空腔膨胀理论偏大明显, ACE 公式与试验结果较为相符, 但整体偏小。本文理论公式基本介于空腔膨胀理论与 ACE 公式之间, 速度较低时与空腔膨胀理论接近, 速度较高时与 ACE 公式接近, 总体与试验结果符合较好。对于弹径 15 mm 情况, 本文理论计算结果的平均误差为 16%, 对于弹径 20 mm, 平均误差为 13%。

4.2 石灰岩试验对比

Frew 等^[40] 利用 3 种钢弹对石灰岩靶体进行了侵彻试验。弹体直径分别为 7.1、12.7、25.4 mm, 对应弹体质量分别为 0.020 5、0.117 0、0.931 0 kg, 弹头均为弧形弹, CRH 值为 3。靶体抗压强度为 60.7 MPa, 密度为 2310 kg/m³, 纵波波速为 3572 m/s。根据试验结果, 当侵彻速度超过 900 m/s 后, 弹体产生明显的质量损失, 因此, 刚性侵彻速度范围取 900 m/s 以内。根据靶体参数计算得到 $K_q = 1.21 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s} / \text{kg}$, 弹径系数按式 (72) 计算, 分别为 1.05、1.07、1.10。将参数代入式 (57) 可得侵彻深度理论结果, 同时与第 1 节的经验、半经验公式进行对比, 结果见图 8。

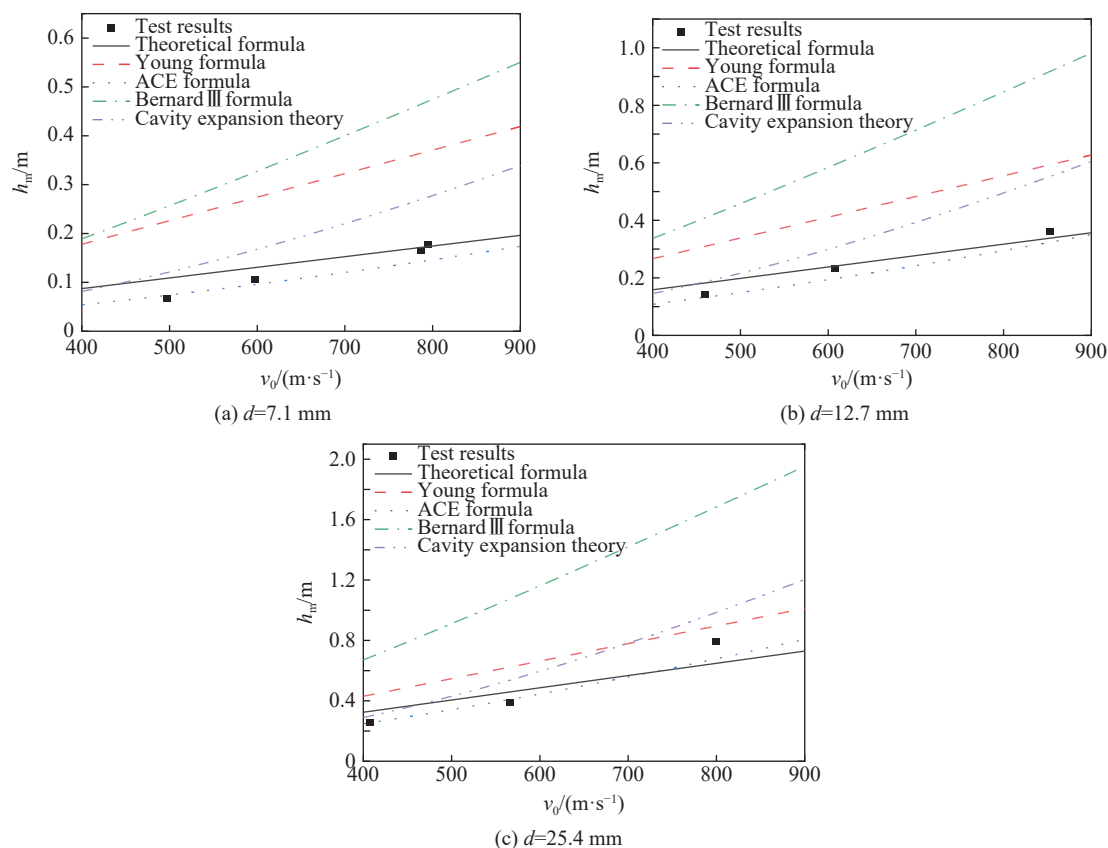


图 8 石灰岩侵彻试验结果对比

Fig. 8 Comparison of empirical and experimental penetration results for limestone target.

对比结果与花岗岩试验相似, Young 公式与 Bernard III 公式偏大明显, 本文理论公式介于空腔膨胀理论与 ACE 公式之间, 对于弹径 7.1 mm 的弹体, 本文理论与试验结果的平均误差为 23%, 对于弹径 12.7 mm 的弹体, 平均误差为 12%, 对于弹径 25.4 mm 的弹体, 平均误差为 21%。可以看出, 3 种弹径理论计算侵深与试验结果的符合度均较好。

5 讨论

从侵彻过程中靶体介质的应力-应变状态出发推导了单位面积的侵彻阻抗, 从而得到弹体受到的侵

彻阻力,进一步积分得到侵彻深度公式,通过整理得到了表征侵深尺寸效应的弹径系数。与现有经验及理论公式不同的是,本文公式中弹径系数来源于侵深公式推导过程本身,而非额外引入的修正系数。从结果看,弹径系数由侵彻空腔半径与破碎区半径之比决定(式(64)),表明尺寸效应与介质的破坏过程有关。Markeset 等^[52]指出材料的绝热剪切、动态拉伸等破坏是时间相关的,某一时刻的损伤会影响下一刻的损伤演化,而时间与缩比因子成比例,因此材料破坏过程是不符合相似律的。时间的另一个影响是材料的应变率效应,理论上应变率效应也会导致尺寸效应,但 Anderson 等^[28]研究表明,应变率的影响很小,不足以解释试验中发现的尺寸效应。本文建立了基于材料破坏过程的尺寸效应表征,充实了对岩石类材料侵深尺寸效应的理论描述。

与经验、半经验公式相比,本文公式所有系数均可由弹靶参数计算而得,且与试验对比符合较好,但需要指出的是,本文理论仍存在一些不足。一方面,本文模型是基于连续介质假设提出的,可能不适用于钢筋混凝土、复合夹层混凝土等复杂材料,另一方面,本文为方便参数取值计算未考虑应变率影响。但本文公式也揭示了影响材料侵彻深度与尺寸效应的普遍规律,可以指导抗侵彻材料设计,如提高材料波阻抗与韧度,对于岩石类材料有较好可靠性。此外,本文公式在形式上可以拓展用于其他材料,利用式(74)可以确定相关参数。

6 结 论

(1) 岩石中侵彻阻抗主要影响因素为介质固有强度 τ_s 及波阻抗 $\rho_0 c_p$, 其中 τ_s 为准静态弹性极限,与波阻抗相比影响较小。

(2) 锥形弹与卵形弹的弹形系数可简化为弹头长径比 l/d 的线性函数,当长径比为零时退化为平头弹,对应弹形系数为 0.57,与 Young 公式的 0.56 相符。

(3) 岩石类材料中侵深尺寸效应来源于介质破坏范围不满足几何相似律,是由介质固有破坏过程决定的。弹径系数 λ_2 反映了尺寸效应的影响,由侵彻空腔区与破碎区半径之比决定,与靶体剪切强度和断裂韧度有关,对于常规钻地弹侵彻岩石材料,弹径系数 $\lambda_2 = 1 + 0.65\sqrt{d}$,可取 $\lambda_2 = 1.2 \sim 1.4$,对于厘米级小口径模型弹, $\lambda_2 \approx 1$,因此,小比例室内试验与原型试验之间的尺寸效应不可忽视。

(4) 要提高靶体抗侵彻能力,除增加强度与波阻抗外,还应提高靶体韧性,如增加纤维材料。

(5) 通过不少于 2 组不同缩比的模型试验可确定弹径系数,该方法适用于动态力学性能尚不明确的新型靶体材料。

(6) 与常用经验、半经验公式相比,本文计算公式与侵彻试验数据符合较好,且系数可直接由弹靶本身参数确定,具有明显的优势。

参考文献:

- [1] KENNEDY R P. A review of procedures for the analysis and design of concrete structures to resist missile impact effects [J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1976, 37(2): 183–203. DOI: 10.1016/0029-5493(76)90015-7.
- [2] HUGHES G. Hard missile impact on reinforced concrete [J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1984, 77(1): 23–35. DOI: 10.1016/0029-5493(84)90058-X.
- [3] KAR A K. Local effects of tornado-generated missiles [J]. *Journal of the Structural Division*, 1978, 104(5): 809–816. DOI: 10.1061/JSDEAG.0004915.
- [4] ACE. Fundamentals of protective design: AT1207821 [R]. Pennsylvania, USA: Office of the Chief of Engineers, 1946.
- [5] NDRC. Effects of impact and explosion: summary technical report of division 2, vol. 1 [R]. Washington: National Defense Research Committee, 1946.
- [6] BERNARD R S. Depth and motion prediction for earth penetrators: ADA 056701 [R]. Vicksburg: U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, 1978.
- [7] BERNARD R S. Empirical analysis of projectile penetration in rock: ADA 047989 [R]. Vicksburg: U. S. Army Engineer

- Waterways Experiment Station, 1977.
- [8] YOUNG C W. Penetration equations: AC04-94AL85000 [R]. Albuquerque: Sandia National Labs. , 1997.
- [9] FORRESTAL M J, OKAJIMA K, LUK V K. Penetration of 6061-T651 aluminum targets with rigid long rods [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, 55(4): 755–760. DOI: 10.1115/1.3173718.
- [10] FORRESTAL M J, WARREN T L. Penetration equations for ogive-nose rods into aluminum targets [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, 35(8): 727–730. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2007.11.002.
- [11] FORRESTAL M J, LUK V K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, 55(2): 275–279. DOI: 10.1115/1.3173672.
- [12] FORRESTAL M J. Penetration into dry porous rock [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1986, 22(12): 1485–1500. DOI: 10.1016/0020-7683(86)90057-0.
- [13] WANG M Y, QIU Y Y, LI J, et al. Theoretical and experimental study on penetration in rock and ground impact effects of long rod projectiles of hyper speed [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, 37(3): 564–572. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.1348.
- [14] LI J, WANG M Y, CHENG Y H, et al. Analytical model of hypervelocity penetration into rock [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, 122: 384–394. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2018.08.008.
- [15] LUK V K, FORRESTAL M J. Penetration into semi-infinite reinforced-concrete targets with spherical and ogival nose projectiles [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1987, 6(4): 291–301. DOI: 10.1016/0734-743X(87)90096-0.
- [16] FORRESTAL M J, TZOU D Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(31/32): 4127–4146. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00017-6.
- [17] HE T, WEN H M, GUO X J. A spherical cavity expansion model for penetration of ogival-nosed projectiles into concrete targets with shear-dilatancy [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, 27(6): 1001–1012. DOI: 10.1007/s10409-011-0505-1.
- [18] FORRESTAL M J, ALTMAN B S, CARGILE J D, et al. An empirical equation for penetration depth of ogive-nose projectiles into concrete targets [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1994, 15(4): 395–405. DOI: 10.1016/0734-743X(94)80024-4.
- [19] FREW D J, HANCHAK S J, GREEN M L, et al. Penetration of concrete targets with ogive-nose steel rods [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1998, 21(6): 489–497. DOI: 10.1016/S0734-743X(98)00008-6.
- [20] FORRESTAL M J, FREW D J, HICKERSON J P, et al. Penetration of concrete targets with deceleration-time measurements [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2003, 28(5): 479–497. DOI: 10.1016/S0734-743X(02)00108-2.
- [21] GOMEZ J T, SHUKLA A. Multiple impact penetration of semi-infinite concrete [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2001, 25(10): 965–979. DOI: 10.1016/S0734-743X(01)00029-X.
- [22] 吴飏, 任辉启, 陈力, 等. 弹体侵彻混凝土尺度效应试验研究与理论分析 [J]. *防护工程*, 2020, 42(2): 1–10. DOI: 10.3969/j.issn.1674-1854.2020.02.001.
- WU B, REN H Q, CHEN L, et al. Experimental study and theoretical analysis of size effect on projectile penetrating concrete [J]. *Protective Engineering*, 2020, 42(2): 1–10. DOI: 10.3969/j.issn.1674-1854.2020.02.001.
- [23] ROSENBERG Z, KREIF R, DEKEL E. A note on the geometric scaling of long-rod penetration [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1997, 19(3): 277–283. DOI: 10.1016/S0734-743X(96)00023-1.
- [24] FENG J, SUN W W, LI B M. Numerical study of size effect in concrete penetration with LDPM [J]. *Defence Technology*, 2018, 14(5): 560–569. DOI: 10.1016/j.dt.2018.07.006.
- [25] PENG Y, WU H, FANG Q, et al. Geometrical scaling effect for penetration depth of hard projectiles into concrete targets [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, 120: 46–59. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2018.05.010.
- [26] CANFIELD J A, CLATOR I G. Development of a scaling law and techniques to investigate penetration in concrete: NWL report No. 2057[R]. Dahlgren: U. S. Naval Weapons Laboratory, 1966.
- [27] ME-BAR Y. A method for scaling ballistic penetration phenomena [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1997, 19(9/10): 821–829. DOI: 10.1016/S0734-743X(97)00020-1.
- [28] ANDERSON C E, MULLIN S A, KUHLMAN C J. Computer simulation of strain-rate effects in replica scale model penetration experiments [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1993, 13(1): 35–52. DOI: 10.1016/0734-743X(93)90107-I.
- [29] LI Q M, REID S R, WEN H M, et al. Local impact effects of hard missiles on concrete targets [J]. *International Journal of*

- [Impact Engineering](#), 2005, 32(1/2/3/4): 224–284. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2005.04.005.
- [30] 王安宝, 邓国强, 杨秀敏, 等. 一个新的通用型侵彻深度计算公式 [J]. [土木工程学报](#), 2021, 54(10): 36–46. DOI: 10.15951/j.tmgcxb.2021.10.004.
- WANG A B, DENG G Q, YANG X M, et al. A new general formula for calculating penetration depth [J]. [China Civil Engineering Journal](#), 2021, 54(10): 36–46. DOI: 10.15951/j.tmgcxb.2021.10.004.
- [31] 彭永, 卢芳云, 方秦, 等. 弹体侵彻混凝土靶体的尺寸效应分析 [J]. [爆炸与冲击](#), 2019, 39(11): 113301. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0402.
- PENG Y, LU F Y, FANG Q, et al. Analyses of the size effect for projectile penetrations into concrete targets [J]. [Explosion and Shock Waves](#), 2019, 39(11): 113301. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0402.
- [32] 程月华, 姜鹏飞, 吴昊, 等. 考虑尺寸效应的典型钻地弹侵彻混凝土深度分析 [J]. [爆炸与冲击](#), 2022, 42(6): 063302. DOI: 10.11883/bzycj-2021-0373.
- CHENG Y H, JIANG P F, WU H, et al. On penetration depth of typical earth-penetrating projectiles into concrete targets considering the scaling effect [J]. [Explosion and Shock Waves](#), 2022, 42(6): 063302. DOI: 10.11883/bzycj-2021-0373.
- [33] 何勇, 戎晓力, 吴威涛, 等. 数据驱动智能仿真在重要目标毁伤效应评估中的应用 [J]. [防护工程](#), 2023, 45(6): 19–30. DOI: 10.3969/j.issn.1674-1854.2023.06.005.
- HE Y, RONG X L, WU W T, et al. Application of data-and-physics-driven intelligent simulation in damage effects assessment of critical targets [J]. [Protective Engineering](#), 2023, 45(6): 19–30. DOI: 10.3969/j.issn.1674-1854.2023.06.005.
- [34] 李峰, 石全, 孙正. 目标毁伤效果评估技术研究综述 [J]. [兵器装备工程学报](#), 2018, 39(9): 69–72. DOI: 10.11809/bqzbgcxb2018.09.015.
- LI F, SHI Q, SUN Z. Summary of technical research on the evaluation of target mutilation [J]. [Journal of Ordnance Equipment Engineering](#), 2018, 39(9): 69–72. DOI: 10.11809/bqzbgcxb2018.09.015.
- [35] BERNARD R S, CREIGHTON D C. Projectile penetration in soil and rock: analysis for non-normal impact: SL-79-15 [R]. Vicksburg: U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, 1979.
- [36] 任辉启, 穆朝民, 刘瑞朝. 精确制导武器侵彻效应与工程防护 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [37] 周健南, 金丰年, 王斌. 别列赞公式中弹体参数取值的探讨 [J]. [弹道学报](#), 2008, 20(2): 20–23.
- ZHOU J N, JIN F N, WANG B. Discussion on projectile parameters in Березаиъ formula [J]. [Journal of Ballistics](#), 2008, 20(2): 20–23.
- [38] LONGCOPE D B, FORRESTAL M J. Penetration of targets described by a Mohr-Coulomb failure criterion with a tension cutoff [J]. [Journal of Applied Mechanics](#), 1983, 50(2): 327–333. DOI: 10.1115/1.3167040.
- [39] FORRESTAL M J, LONGCOPE D B. Closed-form solutions for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength [J]. [Mechanics of Materials](#), 1982, 1(4): 285–295. DOI: 10.1016/0167-6636(82)90028-X.
- [40] FREW D J, FORRESTAL M J, HANCHAK S J. Penetration experiments with limestone targets and ogive-nose steel projectiles [J]. [Journal of Applied Mechanics](#), 2000, 67(4): 841–845. DOI: 10.1115/1.1331283.
- [41] 蒋东, 史文卿, 黄瑞源, 等. 高速/超高速侵彻的尺度效应及相似规律 [J]. [中国科学: 物理学 力学 天文学](#), 2021, 51(10): 104710. DOI: [10.1360/SSPMA-2021-0070](#).
- JIANG D, SHI W Q, HUANG R Y, et al. Scale effects and similarity laws on high/hypervelocity impact penetration [J]. [SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica](#), 2021, 51(10): 104710. DOI: [10.1360/SSPMA-2021-0070](#).
- [42] 钱七虎, 王明洋. 岩土中的冲击爆炸效应 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.
- QIAN Q H, WANG M Y. Impact and explosion effects in rock and soil [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010.
- [43] 杨卫. 宏观断裂力学 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [44] 杨占军. 岩石抗剪强度的检测与计算 [J]. [内蒙古煤炭经济](#), 2022(21): 148–150. DOI: 10.3969/j.issn.1008-0155.2022.21.049.
- YANG Z J. Detection and calculation of rock shear strength [J]. [Inner Mongolia Coal Economy](#), 2022(21): 148–150. DOI: 10.3969/j.issn.1008-0155.2022.21.049.
- [45] 徐志英. 岩石力学 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1986.
- [46] CHANG S H, LEE C I, JEON S. Measurement of rock fracture toughness under modes i and ii and mixed-mode conditions by using disc-type specimens [J]. [Engineering Geology](#), 2002, 66(1/2): 79–97. DOI: 10.1016/S0013-7952(02)00033-9.
- [47] ZHANG Z X. An empirical relation between mode I fracture toughness and the tensile strength of rock [J]. [International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences](#), 2002, 39(3): 401–406. DOI: 10.1016/S1365-1609(02)00032-1.

- [48] 王启智, 吴礼舟. 用平台巴西圆盘试样确定脆性岩石的弹性模量、拉伸强度和断裂韧度——第二部分: 试验结果 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2004, 23(2): 199–204. DOI: 10.3321/j.issn:1000-6915.2004.02.004.
WANG Q Z, WU L Z. Determination of elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks by using flattened Brazilian disk specimen-part II: experimental results [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(2): 199–204. DOI: 10.3321/j.issn:1000-6915.2004.02.004.
- [49] 何唐甫. 美国钻地武器研究发展状况及钻地计算分析 [C]//第三届全国工程结构防护学术会议论文集. 北京: 中国力学学会, 1999: 350–358.
- [50] 徐天涵, 谢方, 何勇. 刚性弹侵彻缩比实验尺寸效应分析 [J]. *南京理工大学学报*, 2024, 48(2): 141–147. DOI: 10.14177/j.cnki.32-1397n.2024.48.02.003.
XU T H, XIE F, HE Y. Analysis of size effect for scaled penetration test of rigid projectiles [J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2024, 48(2): 141–147. DOI: 10.14177/j.cnki.32-1397n.2024.48.02.003.
- [51] 张德志, 张向荣, 林俊德, 等. 高强钢弹对花岗岩正侵彻的实验研究 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(9): 1612–1618. DOI: 10.3321/j.issn:1000-6915.2005.09.024.
ZHANG D Z, ZHANG X R, LIN J D, et al. Penetration experiments for normal impact into granite targets with high-strength steel projectile [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(9): 1612–1618. DOI: 10.3321/j.issn:1000-6915.2005.09.024.
- [52] MARKESET G, LANGBERG H. High performance concrete-penetration resistance and material development [C]// Proceedings of the 9th International Symposium on Interaction of the Effects of Munitions with Structures. Berlin-Strausberg: Bundesrepublik Deutschland, 1999.

(责任编辑 曾月蓉)